

Analizi 2

LEZIONE #1 07/03/2023

DEFINIZIONE 1.1

SIA X UN INSIEME

SIA $d: X \times X \rightarrow [0; +\infty]$

$$\overset{\varphi}{x} \quad \overset{\varphi}{y} \Rightarrow d(x, y) \rightarrow [0; +\infty]$$

$\Rightarrow d$ SI CHIAMA FUNZIONE DISTANZA SE SODISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ

i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x \in X, \forall y \in X$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

iii) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\forall x, y, z \in X$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

DEFINIZIONE 1.2

SI DEFINISCE SPAZIO METRICO LA COPPIA (X, d)

DOVE d È LA DISTANZA DEFINITA SU X

ESEMPIO

SIA $X = \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{DIMOSTRARE CHE È UNA DISTANZA PER ESERCIZIO}$$

ESEMPIO

$$X = \mathbb{R}^2 \quad x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{DIMOSTRARE PER ESERCIZIO}$$

MA ATTENZIONE NON È L'UNICA DISTANZA POSSIBILE

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \text{HO CALCOLATO}$$

PER d_1 HO: i) ok LA SOMMA DEI DUE CATETI

ii) ok

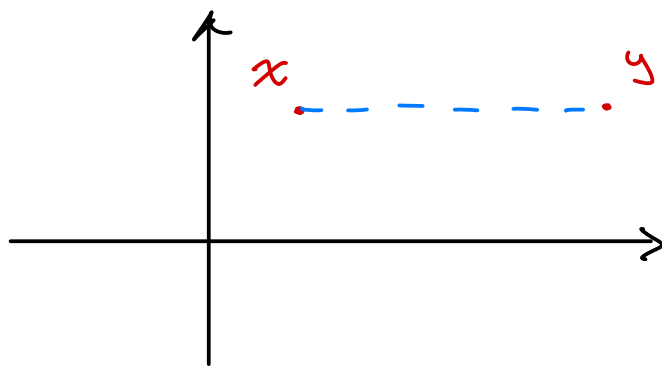
iii) PER ESERCIZIO

DEFINISCO UN'ALTRA DISTANZA:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{È IL}$$

VERIFICA PER ESERCIZIO CATETO PIÙ GRANDE

MA SE PRENDO $\hat{d}(x, y) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
NON LO È PERCHÉ LA ii) NON È VERIFICATA



QUI $\hat{d} = 0$ MA
 $x \neq y$

ESEMPIO

$$X = \mathbb{N}$$

$$d(m, n) = |m - n|$$

SE PRENDO UNO SPAZIO METRICO (X, d) E

PRENDO $E \subseteq (X, d)$, COSA CHE HO FATTO ORA,

E POI PRENDO LA STESSA DISTANZA

$\Rightarrow (E, d)$ È COMUNQUE SPAZIO METRICO

DEFINIZIONE 1.3

DATO UNO SPAZIO METRICO (X, d)

DATO $x \in X$ E $\varepsilon > 0$

DEFINISCO PALLA CENTRATA IN x E DI RAGGIO ε

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

DEFINIZIONE

SIA $A \subseteq X$, A È UN APERTO DI X SE:

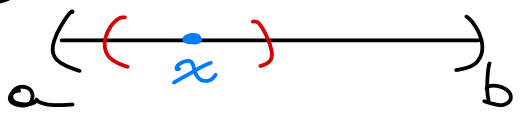
$$\forall x \in A, \exists B_\varepsilon(x) : B_\varepsilon(x) \subseteq A$$

ESEMPIO

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ È APERTO

PERCHÉ $\forall x \in (a, b), B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$

$$\text{INFATTI } B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} =$$

$$= (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$


$\Rightarrow$ PER ESSERE APERTO

$$(a, b) \supseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \quad \text{OK}$$

DEFINIZIONE

$C \subseteq X$ SI DIRÀ CHIUSO SE IL SUO

COMPLEMENTARE $X \setminus C = C^c = \{x \in X : x \notin C\}$

È APERTO, CIOÈ $C^c \subseteq X$ È APERTO

PROPRIETÀ (no dim.)

SE $A_1, A_2, \dots$ SONO TUTTI APERTI

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ È APERTO}$$

QUESTA ERA LA VERSIONE NUMERABILE MA
SI PUÓ FARE ANCHE SE NON È NUMERABILE:

I INSIEME DI INDICI

$\forall i \in I, A_i \text{ È APERTO} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ È APERTO}$

PROPRIETÀ

SIA I UN INSIEME DI INDICI E $\forall i \in I$ HO

C_i CHIUSO $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \text{ È CHIUSO}$

DEFINIZIONE

DATO (X, d) SP. MET.

DICO CHE $(x_m) \subseteq X, m \in \mathbb{N}$

↳ SUCCESSIONE DI PUNTI IN X

QUESTA SUCC. CONVERGE A $x \in X$ SE

$d(x_m, x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ E SI PUÓ SCRIVERE

$x_m \rightarrow x \text{ PER } m \rightarrow +\infty$

DIRE CHE $x_m \rightarrow x \text{ PER } m \rightarrow +\infty$ È EQUIVALENTE

A DIRE:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(x_m, x) < \varepsilon \quad \forall m \geq N_\varepsilon$

ESEMPIO

$(x_m) \subseteq \mathbb{R}$

SE $x_m \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_m - x| < \varepsilon$

$\forall m \geq N_\varepsilon$

LEZIONE #2 09/03/23

RIPRENDIAMO DELLE DEF. IMPORTANTI:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

$$x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

CONCETTI
FONDAMENTALI

PROPOSIZIONE

$$d(x_n, x) < \varepsilon \iff x_n \in B_\varepsilon(x)$$

QUINDI:

$$x_n \rightarrow x \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n > N_\varepsilon$$

OSSERVAZIONE

SIA $A \subseteq X$ APERTO

$$\Rightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon(x) > 0 : B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq A$$

PROPOSIZIONE

$$A = \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\text{SICURAMENTE } A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

$$\text{PERCHÉ SE PRENDO } y \in A \Rightarrow \exists B_{\varepsilon(y)}(y) \subseteq A$$

QUESTA C'È PER DEFINIZIONE DI APERTO

QUINDI.

$$y \in A \Rightarrow y \in B_{\varepsilon(y)}(y) \Rightarrow y \in \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

ORA DEVO FAR VEDERE IL VICEVERSA, COÉ:

$$A \supseteq \bigcup_{x \in A} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

QUESTA È SEMPRE VERA PERCHÉ $\forall x \in A$
 $B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq A$

PROPRIETÀ

SIA (X, d)

SIA $C \subseteq X$ CHIUSO

$\Rightarrow$ SE $(x_n) \subseteq C$ E $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in C$

$\downarrow$
SUCC. DI PUNTI
DI C

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO PER L'ASSURDO CHE $x \notin C$

$\Rightarrow x \in C^c$ (PER DEF. DI COMPLEMENTARE)

MA C^c È APERTO

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq C^c$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap C = \emptyset$

MA L'IPOTESI È CHE $x_n \rightarrow x$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

PERCIÒ SE PRENDO $\varepsilon = \varepsilon$

$\exists N > 0 : x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \geq N$

RICORDIAMO CHE $x_n \in C \Rightarrow$ ASSURDO

PERCHÉ

$$x_n \in B_\varepsilon(x)$$

$$x_n \in C$$

$$\text{MA } B_\varepsilon(x) \cap C = \emptyset$$

DEFINIZIONE

SIA $E \subseteq X$

DEFINISCO $\bar{E}$ LA CHIUSURA DI E COME IL PIÙ PICCOLO INSIEME CHIUSO CONTENENTE E .

CIOÈ SE F È CHIUSO E $F \supseteq E$

$\Rightarrow \bar{E} \subseteq F \quad \forall F \text{ CHIUSO } F \supseteq E$

INFATTI SE PRENDO $\mathcal{F} = \{F \text{ CHIUSO} : F \supseteq E\}$

POI DEFINISCO

$\bar{E} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ SI VERIFICA CHE $\bar{E}$ SODDISFA
LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

SIA $E \subseteq X$

SIA (X, d)

$x \in X$ SI DICE PUNTO DI ACCUMULAZIONE
PER E SE:

$\exists (x_m) \subseteq E : x_m \neq x \quad \forall m, \quad x_m \rightarrow x \text{ PER } m \rightarrow \infty$

OSSERVAZIONE

E CHIUSO $\Rightarrow$ OGNI PUNTO DI ACCUMULAZIONE
 $\in E$.

DEFINIZIONE

SIA $E \subseteq X$

DEFINISCO LA PARTE INTERNA DI E COME
IL PIÙ GRANDE INSIEME APERTO $E^\circ \subseteq E$.

INFATTI SE DEFINISCO $\mathcal{A} = \{A \text{ APERTI} : A \subseteq E\}$

E $E^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

VA VERIFICATO: i) $E^\circ \subseteq E$

ii) SE $A \subseteq E$ È APERTO

$\Rightarrow A \subseteq E^\circ$

} PER
CASA

ESEMPIO

$$X = \mathbb{R}$$

• (a, b) È APERTO

RICORDIAMO CHE $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

QUINDI

• $[a, b]$ È CHIUSO PERCHÉ:

$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ È APERTO

• $[a, b)$? SE PRENDO $B_\varepsilon(a) \not\subseteq [a, b)$
 $\Rightarrow$ NON È APERTO $\rightarrow (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

MA NON È NEMMENO CHIUSO

PERCHÉ IL SUO COMPLEMENTARE

NON È APERTO PER LO STESSO

MOTIVO DI PRIMA

$$[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, +\infty]$$

$$\overset{\circ}{[a, b)} = (a, b)$$

$$\overline{[a, b)} = [a, b]$$

• SE PRENDO $E = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \bar{E} = \mathbb{R} \rightarrow$ PERCHÉ $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ TROVO $x_n \in \mathbb{Q} : x_n \rightarrow x$

CIOÈ OGNI $x \in \mathbb{R}$ È DI

ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{E} = ?$$

NON DIRE $\mathbb{Q}$ PERCHÉ

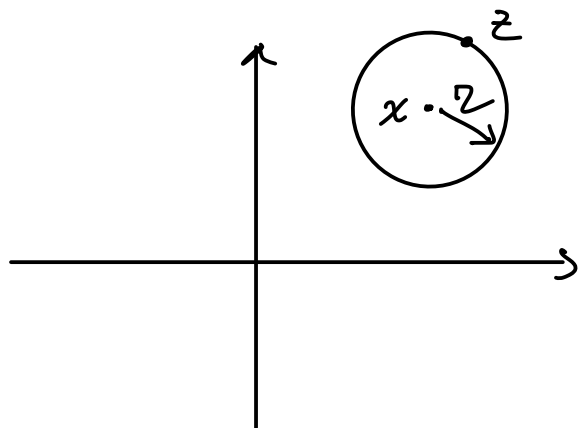
SE $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow B_2(x) \subseteq \mathbb{Q}$?? NO PERCHÉ

$(x-z, x+z) \not\subseteq \mathbb{Q}$ PERCHÉ TROVO DEI PUNTI
IN QUESTO INTERVALLO $\notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mathbb{Q} = \emptyset$ $\emptyset$ È APERTO PER DEF.

ORA PRENDO $E \subseteq \mathbb{R}^2$

LE PALLE COME SONO ?? $B_2(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$



$$x = (x_1, x_2)$$

$\Rightarrow$ SE PRENDO z

SULLA CIRCONFERENZA

$$\text{HO } |x - z| = d(x, z) =$$

$$= \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} = r$$

$$\Rightarrow z \in B_2(x)$$

CHIAMO

$$D_2(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \text{ (disco)}$$

$\Rightarrow$ IN QUESTO CASO $D_2(x) = B_2(x) \cup \text{CIRCONFERENZA}$

NEL CASO $X = \mathbb{R}^2$ HO CHE $D_2(x) = \overline{B_2(x)}$

PERCHÉ OGNI PUNTO DELLA $D_2(x)$ È UN
PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER LA PALLA.

CIOÈ

$$\text{CHIAMO } v \in \mathbb{R}^2 = \frac{z - x}{r} = \left(\frac{z_1 - x_1}{r}, \frac{z_2 - x_2}{r} \right)$$

ORA $\forall t \in \mathbb{R}, x + tv$, AL VARIARE DI t MI

DEFINISCE UNA RETTA PASSANTE PER x E z

$$S(t) = X + tV$$

$$t=0 \rightarrow S(0) =$$

INIZIO
PARTE SU
 $X + tV$

$$t=1 \rightarrow S(1) = \left(x_1 + \frac{z_1 - x_1}{2}, x_2 + \frac{z_2 - x_2}{2} \right)$$

$$t=2 \rightarrow S(2) = \left(x_1 + \cancel{2} \cdot \frac{z_1 - x_1}{2}, x_2 + \cancel{2} \cdot \frac{z_2 - x_2}{\cancel{2}} \right) \\ = (z_1, z_2)$$

$$S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

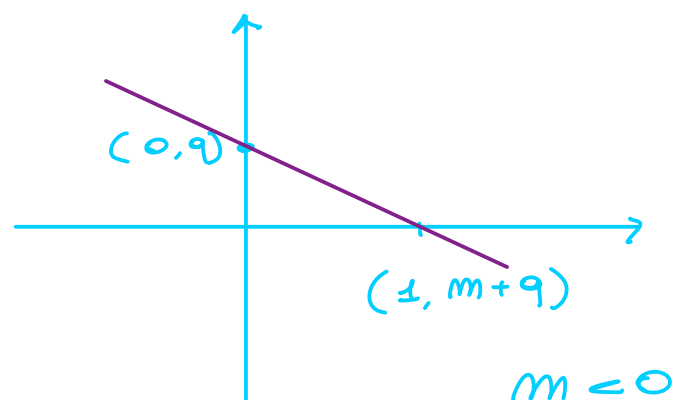
$t \mapsto S(t)$ QUESTA È UNA RETTA IN
FORMA PARAMETRICA

ESERCIZIO: SCRIVERE $S(t) = X + tV$ IN FORMA
ATTENZIONE $X = mx + q$

↓
I PUNTI DEL PIANO X HANNO UN'ASCISSE
 x_1 E UN ORDINATA x_2 , QUINDI LA FORMA
ESPLICITA DELLA RETTA (CIOÈ IN FORMA $X = mx + q$)
HA QUESTO SIGNIFICATO: $x_2 = mx_1 + q$.

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = q \Rightarrow (0, q) \text{ È GRAFICO DI} \\ f(x_1) = mx_1 + q$$

$$x_1 = 1 \rightarrow f(x_1) = m + q$$

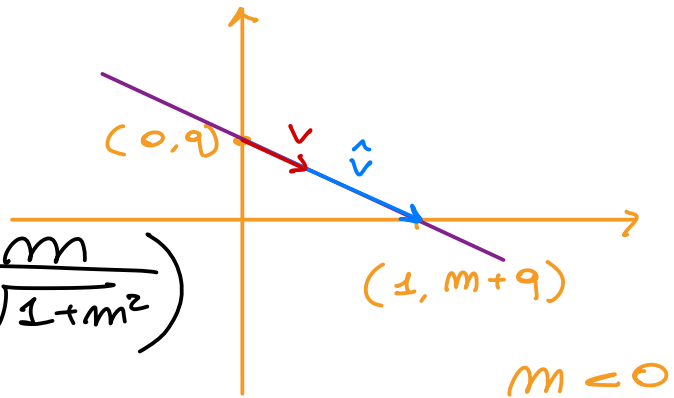


QUINDI, CHIAMO $X = (0, q)$, ORA VOGLIO
DEFINIRE V : TALE CHE X ARRIVA $(1, m+q)$

$$\Rightarrow \hat{V} = (1, m+q) - (0, q) = (1, m)$$

ORA VOGLIO CHE $\hat{V}$
ABBA LUNGHEZZA 1

$$\Rightarrow V = \frac{\hat{V}}{|\hat{V}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$



UN PUNTO DELLA RETTA, DI CONSEGUENZA, LO POSSO
SCRIVERE:

$$\underbrace{(0, q)}_X + t \underbrace{(1, m)}_{\hat{V}} = (t, q+tm)$$

DI PARTENZA

SE CHIAMO x_1 LA PRIMA COORDINATA E x_2
LA SECONDA: $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = q + mt \end{cases} \Rightarrow x_2 = mx_1 + q$

QUINDI SE $\underbrace{x_2 = mx_1 + q}_{(1)} \Rightarrow$ LE COPPIE DI
PUNTI DEL PIANO (x_1, x_2) t.c. SODISFAU
LA (1), SONO TUTTI E SOLI I PUNTI DEL
PIANO (x_1, x_2) t.c. $\exists t \in \mathbb{R}$ PER CUI

$$(x_1, x_2) = (0, q) + t(1, m)$$

INFATTI BASTA PRENDERE $t = x_1$

$$\text{PERCHÉ: } (x_1, x_2) = (x_1, q + mx_1)$$

IL VICEVERSA NON È VERO.

CIOÈ SE DO UN PUNTO DI PARTENZA E
UNA DIREZIONE NON È DETTO CHE MI VENGA ∞
↳ NON SO SE È GIUSTO

SE USASSI V INVECE DI $\hat{V}$ AVREI:

$$(x_1, x_2) = (0, q) + t \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

SE PRENDO $t = x_1 \sqrt{1+m^2}$ HO:

$$\left(x_1, q + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} x_1 \sqrt{1+m^2} \right) = (x_1, q + m x_1)$$

⇒ ANCHE IN QUESTO CASO x_2 DEVE
SODDISFARE $x_2 = q + m x_1$, COME PER $\hat{V}$

$$\text{QUINDI CON } S(t) = (0, q) + t \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

SE PRENDO I PUNTI $S(t_1)$ E $S(t_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow |S(t_1) - S(t_2)| = |t_1 - t_2| \quad \text{QUESTO È}$$

L'UNICO VANTAGGIO

DI PRENDERE V

MODULO = 1 ← NORMALIZZATO
CIOÈ V E NON $\hat{V}$

QUINDI CON $t=0 \rightarrow (0, q)$

$$t=1 \rightarrow (0, q) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

CIOÈ CON V HO IMPOSTATO LA VELOCITÀ
A 1.

ORA DICO CHE $(0, 9) = P$

$$(0, 9) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) = A$$

$$\Rightarrow |P-A| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right| = 1$$

DEFINIZIONE

LA FUNZIONE $S(t) = x + tv$ SI CHIAMA
RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI UNA
RETTA

FINE PARTE
SU $x + tv$

RITORNO ALL'ESEMPIO

VOLEVO FAR VEDERE CHE z È UN PUNTO
DI ACCUMULAZIONE PER $B_z(x)$.

BASTA CHE PRENDO $v = \frac{x-z}{|x-z|}$, $S(t) = x + tv$

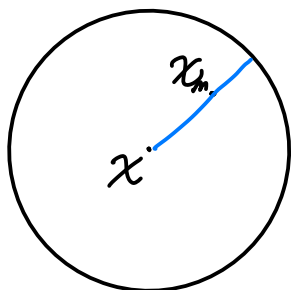
E ORA VOGLIO PRENDERE I PUNTI CHE STANNO
SULLA RETTA

SE PRENDO $t=1 \rightarrow S(1) = z$

$\Rightarrow$ BASTA CHE PRENDO GLI $x_m = S\left(z - \frac{1}{m}\right)$

GRAZIE AL FATTO CHE $|v|=1$ SO: DETTO PRIMA
PER $|v|=1$

$$|x_m - x| = \left| S\left(z - \frac{1}{m}\right) - S(0) \right| = \left| z - \frac{1}{m} - 0 \right| =$$



$= z - \frac{1}{m} \rightarrow$ DISTANZA DEL
PUNTO x_m DA
 x

$$\Rightarrow x_m \in B_z(x)$$

$$\Rightarrow x_m \rightarrow z \text{ PER } m \rightarrow +\infty$$

LA DISTANZA TRA $x_n \in \mathbb{Z}$ E:

$$|x_n - z| = \left| S\left(z - \frac{1}{n}\right) - S(z) \right| = \left| z - \frac{1}{n} - z \right| = \frac{1}{n}$$

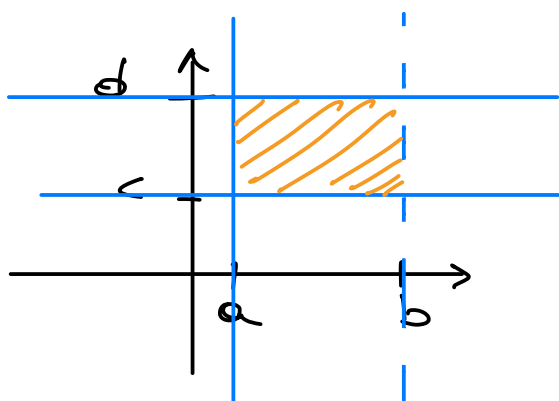
↓
COME PRIMA

$\Rightarrow$ HO DIMOSTRATO CHE $x_n \rightarrow z$ PER $n \rightarrow +\infty$

ESEMPIO

$$[a, b) \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [a, b), x_2 \in [c, d]\}$$

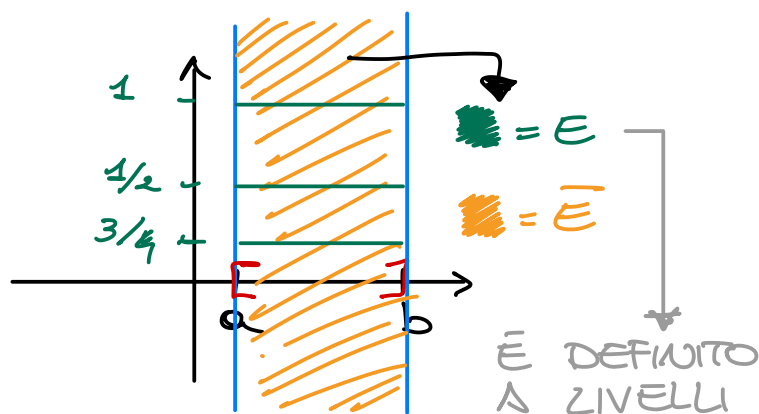


$[a, b) \times [c, d]$ NON È APERTO E NEMMENO CHIUSO

$E = [a, b] \times \emptyset$ NÈ APERTO E NÈ CHIUSO

$$E^\circ = (a, b) \times \emptyset = \emptyset$$

$$\bar{E} = [a, b] \times \mathbb{R}$$



ESEMPIO

$$(\mathbb{Z}, d) \text{ con } d(m, n) = |m - n|$$

$$B_1(0) = \{0\}$$

$$D_1(0) = \{-1, 0, 1\}$$

$$\overline{B_1(0)} = D_1(0) \text{ ?}$$

$$\text{SE FOSSE VERO } \overline{B_1(0)} = D_1(0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in D_1(0) \Rightarrow \exists x_m \in B_1(0) : x_m \rightarrow x$$

NO. PERCHÉ L'UNICA SUCC. CHE POSSO
PRENDERE È $x_m = 0$

QUELLO CHE È VERO È CHE $\overline{B_1(0)} \subseteq D_1(0)$

PREPOSIZIONE

IN UNO SPAZIO METRICO $\overline{B_r(x)} \subseteq D_r(x)$

MA NON È NECESSARIAMENTE =.

NEL CASO DI $X = \mathbb{R}^2$ O $X = \mathbb{R}^n$ HO $\overline{B_r(x)} = D_r(x)$.

DEFINIZIONE

DATO (X, d) SPAZ. MET.

$E \subseteq X$

$\Rightarrow$ CHIAMO DIAMETRO DI E IL NUMERO

$$\text{diam}(E) = \sup \left\{ d(x, y) \mid \begin{matrix} x \in E \\ y \in E \end{matrix} \right\}$$

ESERCIZIO PER CASA

DIMOSTRARE CHE $\text{diam}(B_2(x)) \leq 2r$

DIMOSTRARE CHE $\text{diam}(D_2(x)) \leq 2r$

ESEMPIO

$$X = \mathbb{Z} \quad B_1(0) = \{0\}$$

$$\text{diam}(B_1(0)) = 0$$

$\Rightarrow$ NON È DETTA L'UGUAGLIANZA

DEFINIZIONE

SIA $g: X \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow g$ SI DICE CONTINUA IN $x \in X$ SE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \text{SE } y \in B_\delta(x) \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

EQUIVALENTEMENTE

g È CONTINUA IN x SE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \text{SE } d(x, y) < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

$\Uparrow$ QUESTE DUE È
OVVIO CHE SIANO
UGUALI (NON SI
DIMOSTRANO)

EQUIVALENTEMENTE

g È CONTINUA IN x SE

$\forall$ succe. $x_n \in X$ CON $x_n \rightarrow x$ SI HA $g(x_n) \rightarrow g(x)$

$\rightarrow$ DIMOSTRAZIONE

SIA $x_n \rightarrow x$, CIOÈ:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0: \text{SE } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

SCELGO $\varepsilon = \delta$

$$\Rightarrow \forall \delta > 0, \exists N_\delta > 0: s \in m \geq N_\delta \Rightarrow d(x_m, x) < \delta$$

$$\Rightarrow s \in x_m \rightarrow x \Rightarrow \exists N_\delta: d(x_m, x) < \delta \quad \forall m \geq N_\delta$$

(DA QUELLE ALTRE DUE)

$$\Rightarrow |g(x_m) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\delta > 0: |g(x_m) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq N_\delta$$

MA $g(x_m) \rightarrow g(x) \ni$ HA QUANDO

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: |g(x_m) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq N$$

CHE È QUELLO DETTO SOPRA

DIMOSTRIAMO IL VICEVERSA.

DIMOSTRO CHE È UGUALE ALLA 1°

QUINDI DIMOSTRO CHE SE LA 3° È VERA $\Rightarrow g$ È CONTINUA E LO FACCO PER ASSURDO.

SUPPONIAMO g NON CONTINUA.

LA g È CONTINUA IN x SE $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0:$

$$s \in d(x, y) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ NON È CONTINUA SE:

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \delta > 0, \exists y_\delta: d(y_\delta, x) < \delta \in$$

$$|g(y_\delta) - g(x)| \geq \varepsilon_0$$

SE FISSO $\delta = \frac{1}{n} \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ HO CHE

$$\exists y_\delta: d(y_n, x) < \frac{1}{n} \in |g(y_n) - g(x)| \geq \varepsilon_0$$

$\Rightarrow$ LA SUCC. $y_n \rightarrow x$ PER $n \rightarrow +\infty$ MA NON PUÒ

SUSSISTERE CHE $g(y_m) \rightarrow g(x)$ PERCHÉ
 $|g(y_m) - g(x)| \not\rightarrow 0$ ASSURDO

ESERCIZIO PER CASA

- DATO $y \in X$, FISSATO (CON (X, d) SP. MET.)
CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $g(x) = d(x, y)$
VERIFICARE CHE g È CONTINUA $\forall x \in X$.
- DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $R: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$
 $R(x, y) = d(x, y)$

SE $x_m \rightarrow x \in y_m \rightarrow y \Rightarrow d(x_m, y_m) \rightarrow d(x, y)$

DEFINIZIONE

$K \subseteq X$ SI DICE COMPATTO SE DATI UNA
FAMIGLIA DI INSIEMI APERTI $\{A_i\}_{i \in I}$ TALI CHE

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ FINITO: } K \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$$



RICOPRIMENTO
APERTO

ESEMPIO

$K \subseteq X$, (X, d) SP. MET.

$\forall x \in K$ PRENDO $B_1(x)$

$\Rightarrow$ HO SICURAMENTE CHE $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_1(x)$

$\left. \begin{array}{l} i = x \\ I = K \\ \Rightarrow i \in I \end{array} \right\}$ CASO PARTICOLARE DI
UN'INTELLIGENTE
SCELTA DI INDICI

LEZIONE #3 14/03/23 Giuseppe Scianmò

DEFINIZIONE

SIA (X, d) SP. MET.

SIA $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI X

SIA $\ell \in \mathbb{R}$

SI DICE CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ SE:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0: d(x_0, x) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

TEOREMA DEL CONFRONTO

SIANO $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$

SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$$\exists \delta > 0: \forall x: d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

SIA POI

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

ESERCIZIO 1

SIA (X, d) SP. MET.

DIMOSTRARE CHE $\forall y \in X, x \mapsto d(x, y)$ È CONTINUA
 $X \mapsto [0, +\infty)$

TEOREMA

SIA (X, d) SP. MET.

SIA $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $x_0 \in X \Leftrightarrow$:

$$1) \forall x_n \rightarrow x_0 \in \quad |f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

SVOLGIMENTO ESERCIZIO 1

VOGLIO DIMOSTRARE CHE

$$\forall \bar{x} \in X, x_n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow |d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \rightarrow 0$$

$$\text{SI NOTI CHE } d(x_n, y) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, y)$$

$$\Rightarrow |d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \leq$$

$$\leq d(x_n, \bar{x}) + \cancel{d(\bar{x}, y)} - \cancel{d(\bar{x}, y)} = d(x_n, \bar{x})$$

$$\Rightarrow |d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \leq d(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0$$

$$\text{INFATTI } \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0 : n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) \leq \varepsilon$$

ESERCIZIO 2

$$\text{SIA } d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$$

DIMOSTRARE CHE d È CONTINUA

VOGLIO DIMOSTRARE CHE:

$$\text{SIA } (\bar{x}, \bar{y}) \in X \times X$$

$$\text{SIA } (x_n, y_n) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \text{ CHE SIGNIFICA } x_n \rightarrow \bar{x}$$

$$\Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) \quad y_n \rightarrow \bar{y}$$

$$\Rightarrow d \text{ È CONTINUA}$$

PER FARLO, DEVO DIMOSTRARE:

$$|d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| \rightarrow 0$$

QUINDI PRENDIAMO IL VALORE ASSOLUTO

$$\begin{aligned}
 & |d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| = \\
 & = |d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, y_n) + d(\bar{x}, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| \\
 & \leq |d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, y_n)| + \underbrace{|d(\bar{x}, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})|}_{\alpha_n \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, y_n)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| & \leq \\
 & \leq |d(x_n, \bar{x}) + \cancel{d(\bar{x}, y_n)} - \cancel{d(\bar{x}, y_n)}| + |\alpha_n| = \\
 & = \underbrace{|d(x_n, \bar{x})|}_{\beta_n \rightarrow 0} + |\alpha_n| = |\beta_n| + |\alpha_n| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

DEFINIZIONE

SIA $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE LIPSCHITZIANA SE:

$$\exists L > 0 : |g(x) - g(y)| \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

ESERCIZIO 3

DIMOSTRARE CHE TUTTE LE FUNZIONI LIPSCHITZIANA SONO CONTINUE.

CIOÉ VOGLIO DIMOSTRARE CHE:

$$|g(x) - g(x_0)| \rightarrow 0 \text{ SE } x \rightarrow x_0$$

MA PER DEFINIZIONE

$$|g(x) - g(x_0)| \leq L d(x, x_0)$$

$$\Rightarrow \text{PER } x \rightarrow x_0 \text{ HO } |g(x) - g(x_0)| \rightarrow 0$$

ESERCIZIO 4

$$\text{SIA } X = \mathbb{R}^2 \quad \vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2)$$

$$\text{SIA } d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty)$$

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

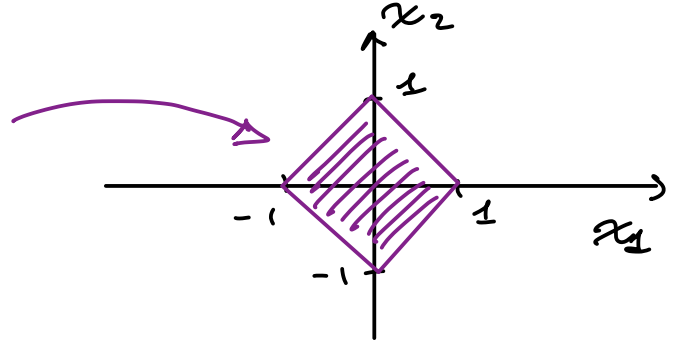
COM'É FATTO $B_1(\vec{0}, r) = \{ \vec{x} : d_1(\vec{0}, \vec{x}) < r \}$
 $r > 0$

SE LO FACCIAMO PER $r=1$ SARÁ IMMEDIATA

L'ESTENSIONE

DEVO PRENDERE I PUNTI

$$\{ (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| < 1 \}$$



LEZIONE #4 16/03/23

DEFINIZIONE

SIA $E \subseteq X$ DOVE (X, d) È SP. MET.

$\Rightarrow \text{diam}(E) := \sup \{ d(x, y) : x, y \in E \}$ È IL DIAMETRO DI E .

OSSERVAZIONE

VISTO CHE DATO $B_\varepsilon(x)$ ACCADE CHE

$$(B_\varepsilon(x)) \subseteq 2\varepsilon$$

DATI $y, z \in B_\varepsilon(x)$ SI OSSERVA GRAZIE ALLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE CHE

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\forall y, z \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow \sup \{ d(y, z) : y, z \in B_\varepsilon(x) \} \leq 2\varepsilon$$

DEFINIZIONE

SIA (X, d) SP. MET.

UNA SUCC. $(x_n) \subseteq X$ SI DICE SUCCESSIONE DI CAUCHY SE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon$$

DEFINIZIONE

UNO SP. MET. (X, d) SI DICE COMPLETO SE OGNI SUCC. DI CAUCHY È CONVERGENTE.

INOLTRE DIREMO CHE $E \subseteq X$ È COMPLETO SE OGNI SUCC. DI CAUCHY $(x_n) \subseteq E$ AMMETTE UN LIMITE IN E . ($\Leftrightarrow (E, d)$ È COMPLETO)

ESEMPIO

$\mathbb{R}$ CON LA DISTANZA $|x-y| = d(x, y)$

- $\mathbb{R}$ È COMPLETO
- GLI INTERVALLI APERTI NON SONO COMPLETI.
SCELGO $x_n \in (a, b)$ CON $x_n \searrow a$.
ALLORA x_n È DI CAUCHY ↓ DECRESCONO E
MA NON CONVERGE IN (a, b) TENDONO AD a
- GLI INTERVALLI CHIUSI SONO COMPLETI

OSSERVAZIONE

OGNI SUCC. CONVERGENTE È DI CAUCHY, ANCHE NEGLI SPAZI NON COMPLETI.

DIMOSTRAZIONE

SIA $x_n \in X: x_n \rightarrow x$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0: d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

SE PRENDO $m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

QUINDI PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ OGNI SUCC. CONV. È DI CAUCHY

OSSERVAZIONE

SIA (X, d) SP. MET. COMPLETO

SIA $E \subseteq X$ COMPLETO $\Rightarrow E$ È CHIUSO.

INFATTI SE PRENDO $x_m \in E : x_m \rightarrow x$

x_m ESSENDO SUCC. CONV. È DI CAUCHY.

ESSENDO E COMPLETO, ESSA DEVE CONVERGERE AD UN PUNTO DI E .

$\Rightarrow x \in E \Rightarrow E$ È CHIUSO

VICEVERSA SE (X, d) È COMPLETO ED $E \subseteq X$

CHIUSO $\Rightarrow E$ È COMPLETO VERIFICA PER ESERCIZIO

DEFINIZIONE

UN INSIEME $E \subseteq X$ SI DICE TOTALMENTE

LIMITATO SE $\forall \varepsilon > 0$ POSSO TROVARE DELLE

PALLE CENTRATE IN $x_1, x_2, \dots, x_m$ DI RAGGIO $\varepsilon > 0$.

$B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2), \dots, B_\varepsilon(x_m)$ IN NUMERO FINITO

$m > 0 : E \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$

DEFINIZIONE

UN INSIEME $E \subseteq X$ SI DICE LIMITATO SE

$\exists R > 0, \exists x \in X : B_R(x) \supseteq E$

$\Rightarrow \text{diam}(E) \leq \text{diam}(B_R(x)) \leq 2R$

ESERCIZIO PER CASA

E LIMITATO $\Leftrightarrow \text{diam}(E) < C$ CON $C > 0$

FATTO GENERALE

CI SONO ALCUNI SPAZI METRICI IN CUI LA

NOZIONE DI LIMITATEZZA E QUELLA DI

TOTALE LIMITATEZZA NON SONO EQUIVALENTI

ESEMPIO

IN $\mathbb{R}$ UNA PALLA DI RAGGIO 1 È $B_1(x)$.

$$B_1(x) = (x-1, x+1)$$

$$\text{diam}(B_1(x)) = 2$$

È TOTALMENTE LIMITATO PERCHÉ SE $\varepsilon > 0$ POSSO TROVARE DEI PUNTI $x_1, \dots, x_m : B_\varepsilon(x_i) = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ RICOPRONO TUTTO $(x-1, x+1)$

AD ESEMPIO $x_1 = x-1, x_2 = x_1 + \varepsilon, x_3 = x_2 + \varepsilon \dots$

OSSERVIAMO CHE $m \approx 2/\varepsilon$ E LE $B_\varepsilon(x_i)$

RICOPRONO TUTTO $(x-1, x+1)$.

INFATTI SE PRENDO $B_1(x) = (x-1, x+1) \rightarrow \text{diam} = 2$

$$B_{\frac{1}{2}}(y) \rightarrow \text{diam}(B_{\frac{1}{2}}(y)) = 1$$

MI SERVIRANNO ALMENO 2 PALLINE DI RAGGIO

$1/2$ PER COPRIRE UN DIAMETRO LUNGO 2.

ESEMPIO

$X = \mathbb{R}^2$ CONSIDERO LA PALLA DI RAGGIO 1

$$B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$$

SE VOGLIO RICOPRIRE $B_1(x)$ CON PALLE DI

RAGGIO $1/2$. L'AREA DI PALLA DI RAGGIO $1/2$

È $\pi/4$. DEDUCO CHE COME MINIMO SONO

$$\text{NECESSARIE } \frac{\pi}{\pi/4} = 4$$

ESEMPIO

$X = \mathbb{R}^3$ E CONSIDERO $B_1(x) = \frac{4}{3}\pi$ E $B_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ ALMENO MI SERVONO $\frac{4}{3}\pi : \frac{\pi}{6} = 8$ SFERE

DI RAGGIO $1/2$.

ESEMPIO

$$X = \mathbb{R}^m$$

IN GENERALE, UNA SFERA $B_2(x)$ IN $\mathbb{R}^m$ HA UN VOLUME CHE SI ESPRIME COME

$$\text{Vol}(B_2(x)) = C_m 2^m$$

$$\Rightarrow \text{Vol}(B_1(x)) = C_m$$

$$\text{Vol}(B_{\frac{1}{2}}(x)) = \frac{C_m}{2^m}$$

$\Rightarrow$ SE VOGLIO RICOPRIRE $B_1(x)$ CON PALLE DI RAGGIO $1/2$ MI SERVONO ALMENO $\frac{C_m}{\frac{C_m}{2^m}} = 2^m$

OSSERVAZIONE

UN INSIEME TOTALMENTE LIMITATO È LIMITATO

VERIFICA PER ESERCIZIO

IL VICEVERSA NON È SEMPRE VERO

DEFINIZIONE

UN INSIEME $K \subseteq X$ SI DICE COMPATTO PER SUCC. SE $\forall (x_n) \subseteq K$ ESISTE UNA SOTTO SUCC. x_{m_k} CHE CONVERGE A $x \in K$

OSSERVAZIONE

LE NOZIONI DI COMPATTEZZA E COMPATTEZZA PER SUCC. NON SONO SEMPRE EQUIVALENTI NEGLI SPAZI TOPOLOGICI, MA RISULTANO EQUIVALENTI NEGLI SPA. MET.

TEOREMA

SIA (X, d) SPA. MET. E $K \subseteq X$

$\Rightarrow K$ È COMPATTO $\Leftrightarrow \bar{K}$ COMPATTO PER
SUCCESSIONI

PREPOSIZIONE 1

K COMPATTO IN (X, d)

$\Rightarrow K$ È COMPATTO PER SUCC.

PREPOSIZIONE 2

K COMPATTO PER SUCC. $\Rightarrow K$ È TOTALMENTE
LIMITATO

PREPOSIZIONE 3

K COMPLETO E TOT. LIMITATO $\Rightarrow K$ COMPATTO

DIMOSTRAZIONE 1

SUPPONIAMO K COMPATTO.

RICORDIAMO CHE K SI DICE COMPATTO SE
 $\forall$ RICOPRIMENTO $\{A_i\}_{i \in I}$ DI INSIEMI APERTI

TALI CHE $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq K$

POSSIAMO TROVARE UN SOTTO RICOPRIMENTO

FINITO DI K (OVERO $\exists J \subseteq I$ CON $\#J < \infty$ E

TALE CHE $\bigcup_{j \in J} A_j \supseteq K$)

SUPPONIAMO PER ASSURDO K NON È COMPATTO

PER SUCC. $\Rightarrow$ POSSIAMO TROVARE $(x_m) \subseteq K$

TALE CHE NESSUNA SOTTO SUCC. DI x_m

CONVERGE IN K .

PER OGNI PUNTO $x \in K$ SO CHE ESISTE UN
INTORNO $B_{\varepsilon(x)}(x)$ CON $\varepsilon(x) > 0$ TALI CHE
IL # DEI $\{m \in \mathbb{N} \text{ PER CUI } x_m \in B_{\varepsilon(x)}(x)\} < \infty$

INFATTI SE $\exists \bar{x} \in K$ TALE CHE $\forall \varepsilon > 0, B_{\varepsilon}(\bar{x})$
CONTIENE ∞ ELEMENTI DELLA SUCC.

$\Rightarrow$ POTREI ESTRARRE UNA SOTTO SUCC. $x_{m_k} \rightarrow \bar{x}$

$$\varepsilon = 1, \exists x_{m_1} \in B_1(\bar{x})$$

$$\varepsilon = 1/2, \exists x_{m_2} \in B_{1/2}(\bar{x}), m_2 > m_1$$

$\vdots$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^m} \exists x_{m_{m+1}} \in B_{\frac{1}{2^m}}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow (x_{m_k}) \subseteq K, x_{m_k} \rightarrow \bar{x}$$

SE RIDUCO IL RAGGIO INTORNO $\bar{x}$, AVRÓ CHE
 $x_{m_k} \rightarrow \bar{x}$

ORA CONSIDERO LA FAMIGLIA DI PALLINE

$$\{B_{\varepsilon(x)}(x) : x \in K\}, \text{ ESSENDO } K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

ED ESSENDO K COMPATTO, $\exists$ UNA SOTTO FAMIGLIA

FINITA DI $\{B_{\varepsilon(x)}(x) : x \in K\}$ TALI CHE ESSA

CONTINUA A RICOPRIRE K .

$\Rightarrow \exists N > 0$ E DEI PUNTI $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ TALI CHE

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)$$

MA QUESTO È UN ASSURDO POICHÉ PER

DEFINIZIONE DI $\varepsilon(\bar{x}_i)$ AVREI CHE $\forall i=1, \dots, N$

$$\text{IL } \# \{m \in \mathbb{N} : x_m \in B_{\varepsilon(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)\} < +\infty$$

QUINDI

$$K \neq \{m \in \mathbb{N} : x_m \in \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon}(\bar{x}_i)(x_i)\} < +\infty$$

QUESTO È UN ASSURDO POICHÉ

$(x_m) \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon}(\bar{x}_i)(\bar{x}_i)$ E (x_m) CONTIENE INFINITI PUNTI.

DIMOSTRAZIONE 2

LA PROPOSIZIONE 2, DICE: K COMPATTO

$\Rightarrow K$ È COMPLETO E TOT. LIMITATO

DIMOSTRIAMO CHE K È COMPLETO.

SIA $(x_m) \subseteq K$ SUCC. DI CAUCHY. VOGLIAMO

MOSTRARE CHE $\exists \bar{x} \in K$ TALE CHE $x_m \rightarrow \bar{x}$.

HO CHE, ESSENDO K COMPATTO PER SUCC.,

$\exists (x_{m_k})$ SOTTO SUCC. DI (x_m) TALE CHE

$x_{m_k} \rightarrow \bar{x}$ PER QUALCHE $\bar{x} \in K$. VERIFICARE CHE (x_m) CONV. A $\bar{x}$.

$\Rightarrow x_m$ È CONVERGENTE A $\bar{x}$ E QUINDI K È

COMPLETO. MOSTRIAMO CHE K DEVE ESSERE

TOTALMENTE LIMITATO.

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NON LO SIA.

QUINDI $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall$ FAMIGLIA FINITA DI PUNTI $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ ($\forall m > 0$), $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_0}(\bar{x}_i)$

INIZIAMO A PRENDERE $x_1 \in K$ SE PRENDO

$B_{\varepsilon_0}(x_1)$ QUESTA NON PUÒ RICOPRIRE

TUTTO K , $K \not\subseteq B_{\varepsilon}(x_1)$

$\Rightarrow \exists x_2 \in K \setminus B_{\varepsilon_0}(x_1)$

$\Rightarrow$ CONSIDERO LA PALLA $B_{\varepsilon_0}(x_2)$ E DEDUCO CHE $K \not\subset B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2)$

$\Rightarrow \exists x_3 \in K \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2))$ E COSÌ

VIA... CONSIDERO $B_{\varepsilon_0}(x_3)$ E DEDUCO CHE

$\exists x_4 \in K \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_{\varepsilon_0}(x_i)$

ANDANDO AVANTI RICORSIVAMENTE

$\forall m \in \mathbb{N}$ TROVO UN PUNTO

$x_m \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_0}(x_i) \right)$

$\Rightarrow$ HO COSTRUITO UNA SUCC. DI PUNTI $x_m \in K$.

È FACILE VEDERE CHE

$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, d(x_m, x_n) > \varepsilon_0$

INFATTI SE SUPPONIAMO $m > n$ AUREI

$x_m \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} B_{\varepsilon_0}(x_i) \right)$

$\Rightarrow x_m \in K \setminus B_{\varepsilon_0}(x_n)$

$\Rightarrow x_m \notin B_{\varepsilon_0}(x_n) \Rightarrow d(x_m, x_n) > \varepsilon_0$

$\Rightarrow (x_m)$ NON È UNA SUCC. DI CAUCHY

$\Rightarrow$ NON PUÒ CONVERGERE

INOLTRE, NESSUNA SOTTOSUCC. È DI CAUCHY

$\Rightarrow$ NESSUNA SOTTO SUCC. PUÒ CONVERGERE

$\Rightarrow$ ASSURDO PERCHÉ K È COMPATTO PER SUCC.

TEOREMA

SIA $K \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow$ SONO EQUIVALENTI:

i) K COMPATTO

ii) K COMPATTO PER SUCC.

iii) K CHIUSO E TOT. LIMITATO

iv) K CHIUSO E LIMITATO

IN PARTICOLARE K LIMITATO $\Leftrightarrow$ TOT. LIM.

ESERCIZIO PER CASA

LIMITATO $\Leftrightarrow$ TOT. LIMITATO

FINE PARTE
INIZIALE

OSSERVAZIONE

IN $\mathbb{R}^m$, UN PUNTO $x \in \mathbb{R}^m$ SI PUÒ SCRIVERE
COME UN VETTORE CON m COORDINATE

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

PER SEMPLICITÀ CI METTEREMO SEMPRE IN $m=2$
QUINDI $\mathbb{R}^2$.

INIZIAMO CON IL CONSIDERARE:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ INSIEME APERTO

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

DEFINIZIONE

$f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ SI DICE CONTINUA IN $x \in A$ SE
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$

IN QUESTO CASO

$$|x - y| = d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

DEFINIZIONE

f È CONTINUA IN A SE $\forall x \in A, f$ È CONTINUA
IN x

OSSERVAZIONE

f È CONTINUA IN $X \iff \forall (x_m) \subseteq A: x_m \rightarrow x$

SI HA $f(x_m) \rightarrow f(x)$

DEFINIZIONE

SIA $x \in A$ DIREMO CHE f AMMETTE DERIVATA PARZIALE IN x RISPETTO ALLA PRIMA VARIABILE SE ESISTE IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

E SCRIVO

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

SIMILMENTE POSSO DEFINIRE

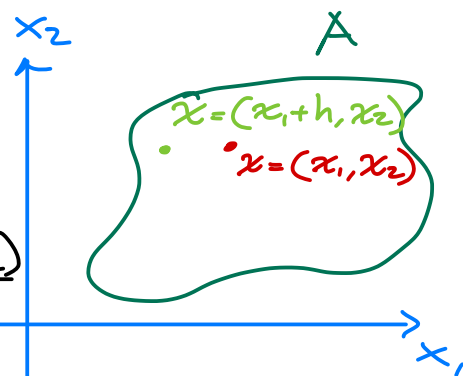
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

NEL CASO IN CUI f AMMETTE DERIVATE PARZIALI IN x SIA RISPETTO A x_1 E x_2 , SI DICE CHE f È DERIVABILE IN x .

SE f È DERIVABILE IN OGNI $x \in A$ DICO CHE f È DERIVABILE IN A .

NEL CASO IN CUI f È DERIVABILE NEL PUNTO $x \in A$, CHIAMO GRADIENTE DI f IN x IL VETTORE

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right)$$



ESEMPIO

CONSIDERO $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DATA DA:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

$\Rightarrow f$ È DERIVABILE $\forall x \in \mathbb{R}^2$

PRENDIAMO $x \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} =$$

$$f(x_1 + h, x_2) = x_1 + h + x_2 + 1$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1 + h + x_2 + 1 - x_1 - x_2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{PER } x_2 \text{ AVRÒ } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 1$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = (1, 1)$$

LA FUNZIONE f INOLTRE RISULTA CONTINUA SU $\mathbb{R}^2$. INFATTI PRENDIAMO $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, FACCIAMO

VEDERE CHE SE $x^n \rightarrow \bar{x} \Rightarrow f(x^n) \rightarrow f(\bar{x})$

↳ È COME x_n MA LO SCRIVIAMO COSÌ PER NON CONFONDERCI CON LE COORDINATE

SE $x^n \rightarrow \bar{x} \Leftrightarrow d(x^n, \bar{x}) \rightarrow 0$ PER $n \rightarrow +\infty$

$$\text{DOVE } d(x^n, \bar{x}) = \sqrt{(x_1^n - \bar{x}_1)^2 + (x_2^n - \bar{x}_2)^2} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow x_1^n \rightarrow \bar{x}_1 \text{ E } x_2^n \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\text{INFATTI } |x_1^m - \bar{x}_1| \leq \sqrt{(x_1^m - \bar{x}_1)^2 + (x_2^m - \bar{x}_2)^2}$$

PER $m \rightarrow +\infty$ IL MEMBRO DI DESTRA $\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \text{ANCHE } |x_1^m - \bar{x}_1| \rightarrow 0$$

POSSO FARE LA STESSA COSA PER $|x_2^m - \bar{x}_2|$

CALCOLIAMO $g(x^m)$

$$g(x^m) = x_1^m + x_2^m + 1 \quad \text{QUANDO } m \rightarrow +\infty \text{ HO}$$

$$\text{CHE } g(x^m) \rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 1 = g(\bar{x})$$

$$\Rightarrow g \text{ È CONTINUA}$$

ESEMPIO

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

VERIFICARE CHE g È CONTINUA

IN x , $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ PER CASA

VOGLIO VERIFICARE CHE g È CONTINUA IN $x = (0, 0)$.

INIZIAMO CON IL CALCOLO DELLE DERIVATE PARZIALI DI g IN $(0, 0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}((0, 0)) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^4} = 0$$

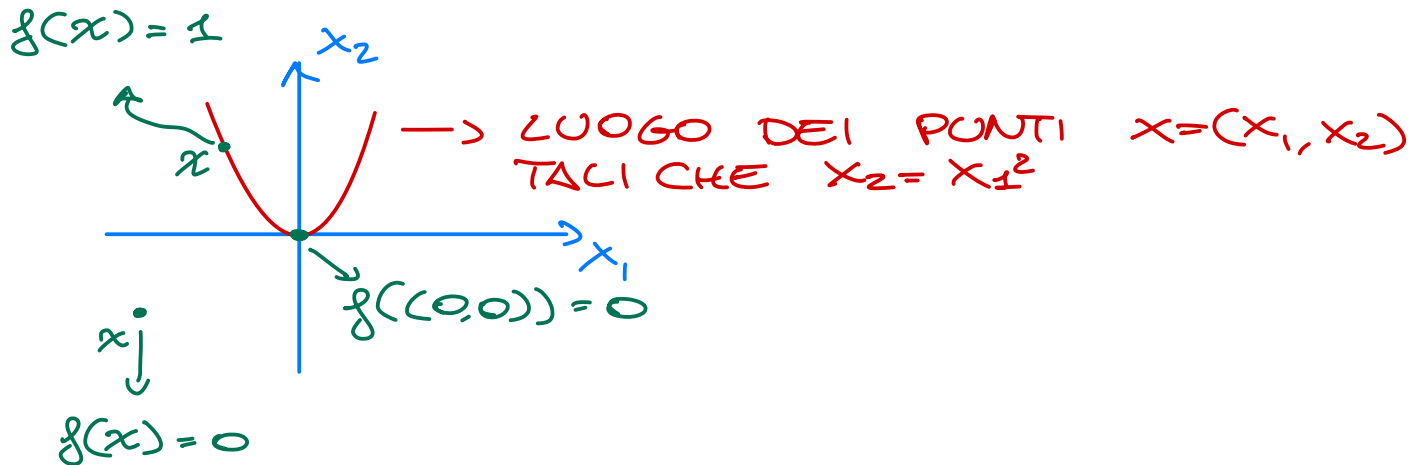
PER DEFINIZIONE DI g

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}((0,0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h+0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f((0,0)) = (0,0)$$

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x_2 = x_1^2, (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0) = (0,0)$$

$\Rightarrow$ È DERIVABILE IN $(0,0)$ MA NON CONTINUA IN $(0,0)$

DEFINIZIONE

SIA $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DERIVABILE IN $x \in A$. $\Rightarrow$ DIREMO CHE f È DIFFERENZIABILE

$$\text{IN } \bar{x} \text{ SE } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

OSSERVAZIONE

$$\nabla g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) \right)$$

$$x - \bar{x} = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)$$

$$\nabla g(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) (x_2 - \bar{x}_2)$$

OSSERVAZIONE

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} = ?$$

STO CALCOLANDO IL LIMITE PER

$$x = (x_1, x_2) \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

QUINDI STO CHIEDENDO $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$

$$x_2 \rightarrow \bar{x}_2$$

DIRE CHE $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L$ SIGNIFICA CHE

$$\forall (x^n) : x^n \rightarrow \bar{x} \text{ HO } f(x^n) \rightarrow L$$

LEZIONE #5 17/03/23

DEFINIZIONE

SIA $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, CON $A \subseteq \mathbb{R}^2$

SIA $\bar{x} \in A$

SUPPONIAMO f SIA DERIVABILE IN $\bar{x}$

$\Rightarrow f$ SI DICE DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SE:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

ESEMPIO

SIA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE PARZIALI IN $\bar{x} = (1, -2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, -2) - f(1, -2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h+4 - (1+4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + (h-2)^2 - (1+4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2-4h+4 - (1+4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h-4 = -4$$

OSSERVAZIONE

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \left. \frac{df}{dh}(\bar{x}_1+h, \bar{x}_2) \right|_{h=0} =$$

$$= \left. \frac{df}{dx_1} f(x_1, \bar{x}_2) \right|_{x_1=\bar{x}_1}$$

ESEMPIO

RIPRENDIAMO L'ESEMPIO PRECEDENTE

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2+h) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} =$$

= DERIVATA DI $f(\bar{x}_1, \cdot)$ CALCOLATA
IN $\bar{x}_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = 0 + 2x_2 \Big|_{x=\bar{x}} = -4$$

DEFINIZIONE

SE VOGLIO CALCOLARE LA DERIVATA LUNGO
 x_1 IN $\bar{x}$, POSSO FARE COSÌ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} =$$

VERSORE DI x_1
↓

$$\text{MA } f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) = f(\bar{x} + h e_1)$$

DOVE:

$$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad e_1 = (1, 0)$$

$$\Rightarrow \bar{x} + h e_1 = (\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2)$$

QUINDI

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h e_2) - f(\bar{x})}{h}$$

PERCIÒ LE DERIVATE PARZIALI SONO
DERIVATE LUNGO UNA DIREZIONE SPECIFICA

ORA FISSIAMO UN VETTORE $v = (v_1, v_2)$

E SUPPONIAMO $|v| = 1 \Rightarrow \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$

E CALCOLIAMO IL RAPPORTO INCREMENTARE

$$\frac{f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})}{h}$$

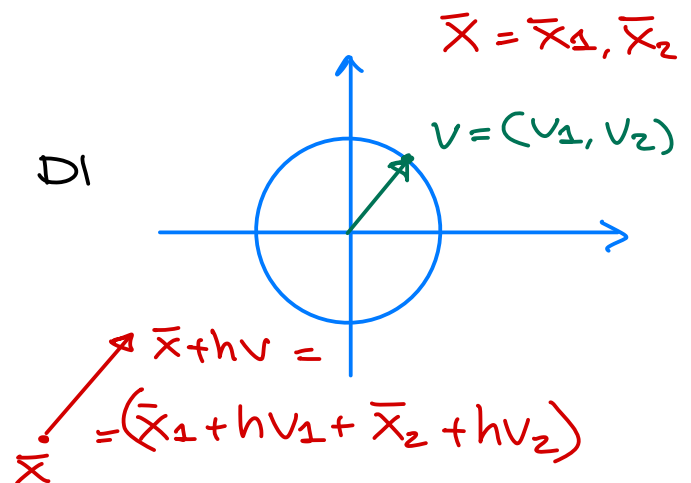
DEFINISCO LA DERIVATA DI

f IN DIREZIONE v E

CALCOLATA IN $\bar{x}$ COME

IL LIMITE:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})}{h}$$



QUESTA È CHIAMATA DERIVATA DIREZIONALE

DI $\bar{x}$ IN DIREZIONE V IN $\bar{x}$.

PARENTESI

DATO UN PUNTO $P \in \mathbb{R}^2$ E UN VETTORE $V = (V_1, V_2)$ CON $V_1^2 + V_2^2 = 1$, DEFINISCO L'INSIEME DEI PUNTI $\mathcal{Z}(P, V)$ COME:

$$\mathcal{Z}(P, V) = \{ X \in \mathbb{R}^2 : X = P + tV, \text{ PER QUALUNQUE } t \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(P, V) = \{ P + tV : t \in \mathbb{R} \} \quad \text{È UNA RETTA NEL PIANO}$$

IN GENERALE SE $X \in \mathcal{Z}(P, V)$

$$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} : X = P + tV = (P_1 + tV_1, P_2 + tV_2)$$

$$\begin{cases} X_1 = P_1 + tV_1 \\ X_2 = P_2 + tV_2 \end{cases}$$

ESPLICITANDO t DALLA PRIMA EQUAZIONE

AVREI $t = \frac{X_1 - P_1}{V_1}$, SOSTITUISCO NELLA 2[°]

EQUAZIONE:

$$X_2 = P_2 + \frac{X_1 - P_1}{V_1} V_2$$

$$\Rightarrow X_2 = P_2 - \frac{P_1 V_2}{V_1} + \frac{X_1 V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow X_2 = mX_1 + q \quad \text{DOVE} \begin{cases} m = V_2 / V_1 \\ q = P_2 - P_1 V_2 / V_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ TROVIAMO CHE OGNI $X \in P + tV$ DEVE

SODDISFARE L'EQ. $X_2 = mX_1 + q$

PER ESERCIZIO VERIFICARE CHE PER OGNI x CHE SODDISFA $x_2 = mx_1 + q$ DEVE ANCHE STARE IN $Z(P, V)$.

VERIFICARE ANCHE CHE

$$Z(P, V) = \{ x : x_2 = mx_1 + q \}$$

IN QUESTI CALCOLI HO SUPPOSTO CHE $V_1 \neq 0$,
SE FOSSE $V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = \pm 1$.

SE $V_1 = 0$ AVREI:

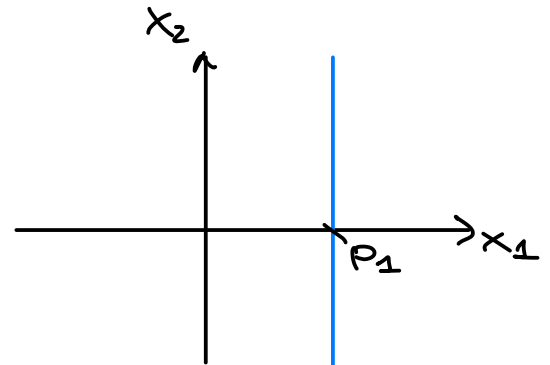
$$\begin{cases} x_1 = p_1 \\ x_2 = p_2 + tV_2 \end{cases} \Rightarrow \text{DALLA 1}^\circ \text{ EQ. DEDUCO} \\ \text{CHE } x_1 \text{ È COSTANTE}$$

$\Rightarrow$ TUTTI GLI $x \in Z(P, V)$ DEVONO STARE SULLA
RETTA DI EQ $x_1 = p_1$.

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO

CHE OGNI PUNTO $x \in$ ALLA

RETTA VERTICALE È IN $Z(P, V)$



TORNANDO ALLE DERIVATE DIREZIONALI

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h}$$

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

CALCOLIAMO LA DERIVATA DIREZIONALE DI f IN

DIREZIONE $V = (v_1, v_2)$ E NEL PUNTO $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h v_1, \bar{x}_2 + h v_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_1 + h v_1 + (\bar{x}_2 + h v_2)^2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2)}{h} =$$

CALCOLI $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h v_1 + h^2 v_2^2 + 2 \bar{x}_2 h v_2}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} v_1 + h v_2^2 + 2 \bar{x}_2 v_2 =$$

$$= v_1 + 2 \bar{x}_2 v_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = v_1 + 2 \bar{x}_2 v_2$$

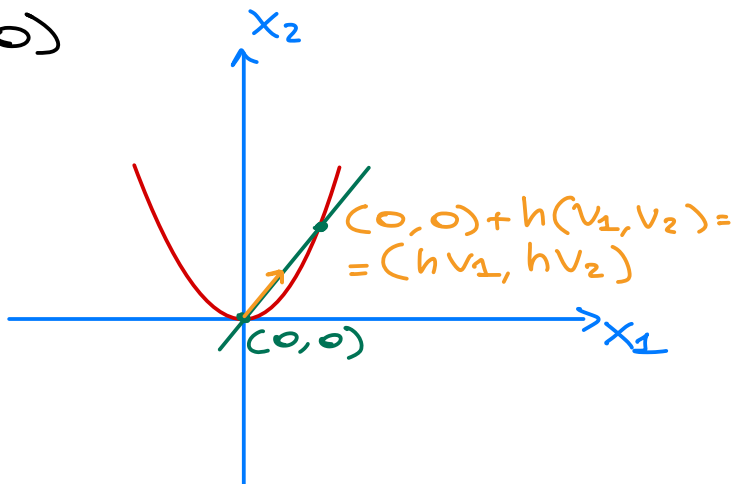
ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{SE } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ & \text{E } x_2 = x_1^2 \\ 0 & \text{ELSE} \end{cases}$$

CALCOLIAMO PER OGNI $v = (v_1, v_2)$ LE DERIVATE DIREZIONALI IN $\bar{x} = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h v) - f(0)}{h}$$



PER $h \rightarrow 0$ SI HA CHE CHE $f(0 + h v)$ FA SEMPRE 0, PERCHÉ MI STO MUOVENDO LUNGO LA RETTA VERDE, MA SONO FUORI DALLA

PARABOLA.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0) = 0$$

$\forall$ VETTORE $V = (v_1, v_2)$

↓
 $v_1^2 + v_2^2 = 1$

QUALSIASI DIREZIONE
CHE PRENDO, POSSO
USARE QUESTO
RAGIONAMENTO

TEOREMA

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

SIA $\bar{x} \in A$

SUPPONIAMO f DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ E (QUINDI
SUPPONIAMO AMMETTE DERIVATE PARZIALI)

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $\bar{x}$ E AMMETTE TUTTE LE
DERIVATE DIREZIONALI IN $\bar{x}$ E

$$\forall V = (v_1, v_2) \text{ E } \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})V$$

DIMOSTRAZIONE

ESSENDO f DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, HO:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

VOGLIO FAR VEDERE CHE f È CONTINUA IN $\bar{x}$,
QUINDI PRENDO UNA SUCC. $x^m \rightarrow \bar{x}$ E FACCIO
VEDERE CHE $f(x^m) \rightarrow f(\bar{x})$ QUANDO $m \rightarrow +\infty$
SCRIVO:

$$f(x^m) - f(\bar{x}) =$$

$$= \frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} |x^n - \bar{x}| + \nabla f(\bar{x})(x^n - \bar{x})$$

ORA PASSO AI VALORI ASSOLUTI E SCRIVO:

$$|f(x^n) - f(\bar{x})| \leq$$

$$\leq \left| \frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} \right| |x^n - \bar{x}| +$$

↑
DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$+ |\nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})|$$

$$\leq \left| \frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} \right| |x^n - \bar{x}| + |\nabla f(\bar{x})| \cdot |x^n - \bar{x}|$$

QUANDO $n \rightarrow +\infty$ HO $x^n \rightarrow \bar{x}$

ESSENDO f DIFFERENZIABILE:

$$\frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} \rightarrow 0$$

E DATO CHE $x^n \rightarrow \bar{x}$, HO $|x^n - \bar{x}| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow |f(x^n) - f(\bar{x})| \rightarrow 0$$

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $\bar{x}$

ORA DIMOSTRIAMO LA SECONDA PARTE DEL TEOREMA

ANDIAMO A FISSARE $V = (V_1, V_2)$ E CALCOLIAMO:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h}$$

IL PUNTO $\bar{x} + h \rightarrow \bar{x}$ QUANDO $h \rightarrow 0$, PERTANTO GRAZIE ALLA DIFFERENZIABILITÀ DI f IN $\bar{x}$ POSSO CONCLUDERE CHE:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (\bar{x} + hv - \bar{x})}{|\bar{x} + hv - \bar{x}|} = 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(hv)}{|hv|} = 0$$

MA IL MODULO DI V È SEMPRE 1:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})V}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{|h|} - \frac{h}{|h|} \nabla f(\bar{x})V \right) = 0$$

$$\text{SE } h > 0 \Rightarrow |h| = h$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} - \nabla f(\bar{x})V \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})V$$

$$\text{SE } h < 0 \Rightarrow |h| = -h$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{-h} + \nabla f(\bar{x})V \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{-h} \right) = -\nabla f(\bar{x})V$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + hV) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})V$$

$\Rightarrow$ VISTO CHE $\lim$ PER $h \rightarrow 0^+$ E $h \rightarrow 0^-$ SONO UGUALI

$$\Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hV) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})V$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial V}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})V$$

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE DIREZIONALI IN $(0, 0)$.

$V = (v_1, v_2)$ CON $v_1^2 + v_2^2 = 1$ E CALCOLIAMO

$\frac{\partial f}{\partial V}(0, 0)$. ABBIAMO GIÀ VISTO CHE:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

ORA CALCOLIAMO $\frac{\partial f}{\partial V}(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial V}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + hV) - f((0, 0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 v_1^2 v_2^2}{h^3 v_1^2 + h^5 v_2^4} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h^3 v_1^2 + h^5 v_2^4} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4}$$

SE $v_1 = 0$ STIAMO CALCOLANDO $\frac{\partial f}{\partial v}$

CON $v = (0, 1)$ O $v = (0, -1)$

STIAMO CALCOLANDO $\frac{\partial f}{\partial x_2}((0, 0))$

OPPURE $-\frac{\partial f}{\partial x_2}((0, 0))$

CHE SAPPIAMO ESSERE ZERO

$$\text{SE } v_1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}((0, 0)) = \frac{v_2^2}{v_1}$$

SE $v_2 = 0 \Rightarrow v = (1, 0)$ O $v = (-1, 0)$

CIOÈ STIAMO CALCOLANDO:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}((0, 0)) \text{ O } -\frac{\partial f}{\partial x_1}((0, 0))$$

SE $v = (v_1, v_2)$ È TALE CHE $v_1 \neq 0 \neq v_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial v}((0,0)) = \frac{v_2^2}{v_1} \neq 0$$

PER IL TEOREMA PRECEDENTE SE g FOSSE STATA DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$, AVREI POTUTO CALCOLARE:

$$\frac{\partial g}{\partial v}((0,0)) = \nabla g((0,0))v$$

DOVE PERÒ $\nabla g((0,0)) = (0,0)$

$$\Rightarrow \nabla g((0,0))v = (0,0)$$

IN TAL CASO AVREI $\frac{\partial g}{\partial v}((0,0)) = (0,0)$

$$\forall v = (v_1, v_2)$$

QUINDI g NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

MA g È CONTINUA IN $(0,0)$?

SE $x^n \rightarrow (0)$ DOBBIAMO VERIFICARE CHE

$$g(x^n) \rightarrow 0$$

DOVE $x^n = (x_1^n, x_2^n)$,

$$x^n \rightarrow 0 \iff \begin{cases} x_1^n \rightarrow 0 \\ x_2^n \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{QUINDI } g(x^n) = \frac{x_1^n x_2^{n^2}}{x_1^{n^2} + x_2^{n^4}} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

PRENDIAMO PER ESEMPIO $x^n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$

$$\Rightarrow g(x^n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\underbrace{\frac{1}{n}}_{x_1^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{x_2^n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} =$$

$$= \frac{n}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

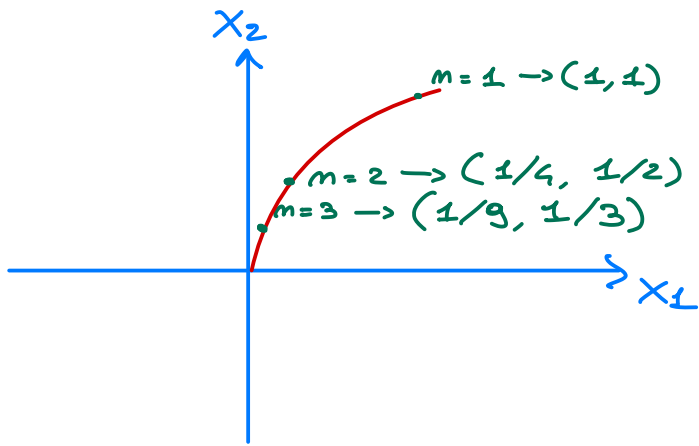
RISPETTO A QUESTA
SUCC. SEMBRA
ESSERE CONTINUA

ORA PRENDIAMO:

$$\begin{cases} x_1^n = 1/n^2 \\ x_2^n = 1/n \end{cases} \quad x_1^n = (x_2^n)^2$$

$$\Rightarrow f(x^n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^n) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{NON È CONTINUA}$$



$$x^n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right)$$

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow f(x) = |x|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \nexists$$

$\Rightarrow f$ NON È DERIVABILE IN $(0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) =$ DERIVO $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ E LA CALCOLO
IN $(0, 0)$

$$= \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

DOVREI CALCOLARLA IN $(0,0)$ E VEREBBE $\frac{0}{0}$

$\Rightarrow$ POTREI PROVARE A CALCOLARE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

SE ESISTE IL LIMITE DOVREI AVERE CHE

$$\forall x^n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1^n}{\sqrt{x_1^{n^2} + x_2^{n^2}}} = L$$

PROVO A PRENDERE:

$$x_1^n = \frac{1}{n} \quad x_2^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 0}} = 1$$

ORA PRENDO $x_1^n = 0, x_2^n = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}}} = 0$$

$\Rightarrow$ HO TROVATO DUE SUCC. TALI CHE IL

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_1^n}{\sqrt{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2}} \quad \text{NON È LO STESSO}$$

COROLLARIO

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \nexists$

ESERCIZIO PER CASA

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

DIRE SE f È CONTINUA IN 0.

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2 \ln x_1}{x_1^2 + |x_2|}$$

DIRE SE AMMETTE LIMITE PER $x \rightarrow 0$

$$f(x_1, x_2) = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

DETERMINARE SE È DERIVABILE E SE È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\ln(x_1^2 + x_2^2) + x_2^4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

DETERMINARE SE f È CONTINUA IN 0 E SE LO È DETERMINARE SE ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI IN $(0, 0)$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

DIRE SE f È CONTINUA IN 0 E IN CASO SE AMETTE DERIVATE PARZIALI. IN TAL CASO DIRE SE f È DIFFERENZIABILE IN $(0, 0)$.
CALCOLARE LE DERIVATE DIREZIONALI

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2 \sin x_1}{x_1^2 + |x_2|}$$

VEDIAMO SE AMMETTE LIMITE PER $x \rightarrow 0$

PRENDIAMO $x_1^m = 0$ E $x_2^m = 1/m$

$$f(x_1^m, x_2^m) = \frac{0}{0 + \frac{1}{m}} = 0 \Rightarrow \text{PER } m \rightarrow +\infty \text{ HO CHE IL LIMITE FA } 0.$$

SE PRENDO $x_1^m = \frac{1}{m}$ E $x_2^m = 0$, HO:

$$f(x_1^m, x_2^m) = \frac{0}{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 0} = 0 \Rightarrow \text{ANCHE PER QUESTA SUCC. IL LIMITE FA ZERO}$$

PRENDIAMO $x_1^m = \frac{1}{m}$ $x_2^m = \frac{1}{m}$

$$\begin{aligned}
 f(x_1^m, x_2^m) &= \frac{\frac{1}{m} \cdot \sin \frac{1}{m}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{1}{m} \sin \frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}} = \\
 &= \frac{\frac{1}{m} \sin \frac{1}{m}}{\frac{1+m}{m^2}} = \\
 &= \left(\frac{1}{m} \sin \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{m^2}{1+m} = \\
 &= \sin \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{m}{1+m}\right) = 0 \quad \text{PER } m \rightarrow +\infty
 \end{aligned}$$

ORA PRENDIAMO $x_1^m = \frac{1}{m}$ E $x_2^m = \frac{1}{m^2}$

$$f(x_1^m, x_2^m) = \frac{\frac{1}{m^2} \sin \frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}} =$$

MI MUOVO SU
UNA PARABOLA
COME HO FATTO
NELL'ESEMPIO
PRECEDENTE

$$= \frac{\frac{1}{m^2} \sin \frac{1}{m}}{\frac{2}{m^2}} = 0 \quad \text{PER } m \rightarrow +\infty$$

A QUESTO PUNTO VA DIMOSTRATO CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_2 \sin x_1}{x_1^2 + |x_2|}$$

PRENDO $|f(x_1, x_2)|$ E FACCIO VEDERE CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x_1, x_2)| = 0$$

$$|f(x_1, x_2)| = \frac{|x_2|}{x_1^2 + |x_2|} \cdot |\sin x_1|$$

$$\Rightarrow \frac{|x_2|}{x_1^2 + |x_2|} \leq \frac{|x_2|}{|x_2|} = 1$$

$$\Rightarrow |f(x_1, x_2)| \leq |\ln x_1|$$

QUINDI:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x_1, x_2)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |\ln x_1| = 0$$

E QUINDI LA FUNZIONE TENDE A ZERO

LEZIONE #6 21/03/23

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, CON A APERTO

SIA $\bar{x} \in A$

SUPPONIAMO f AMMETTA DERIVATE PARZIALI IN UN

INTORNO $B_\delta(\bar{x})$ DI $\bar{x}$ E SUPPONIAMO CHE

TALI DERIVATE PARZIALI RISULTINO CONTINUE

IN $\bar{x}$

$\Rightarrow f$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$

DIMOSTRAZIONE

RICORDIAMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$

SE:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\text{MA } \nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left[f(x) - f(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2) \right] \cdot \frac{1}{|x - \bar{x}|}$$

PER $t \in \mathbb{R}$: IL PUNTO $\bar{x} + te_1 \in B_\delta(\bar{x})$ HO

$$\text{CHE } \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x} + te_1) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + te_1 + he_1) - f(\bar{x} + te_1)}{h}$$

FISSATO UN PUNTO $(x_1, x_2) \in B_g(\bar{x})$, SUPPONENDO SENZA PERDERE GENERALITÀ CHE $x_1 > \bar{x}_1$ E $x_2 > \bar{x}_2$, LE FUNZIONI $t \mapsto g(\bar{x}_1, t)$ E $t \mapsto g(t, \bar{x}_2)$ SONO DERIVABILI NEGLI INTERVALLI $(\bar{x}_2, x_2)$ E $(\bar{x}_1, x_1)$ RISPETTIVAMENTE.

RISULTA CHE $g(t, \bar{x}_2)$ È ANCHE CONTINUA IN $[\bar{x}_1, x_1)$ CHE MI DICE CHE, PER LAGRANGE

$$g(x_1, \bar{x}_2) - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1)$$

DOVE ξ_1 È UN VALORE IN $(\bar{x}_1, x_1)$

SIMILMENTE POSSO TROVARE UN VALORE ξ_2

TALE CHE

$$g(x_1, x_2) - g(x_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2)$$

DOVE $\xi_2 \in (\bar{x}_2, x_2)$

SOMMANDO LE ESPRESSIONI PRECEDENTI, HO:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2) \end{aligned}$$

SOSTITUISCO NEL LIMITE E QUINDI DOVRÒ DIMOSTRARE:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) \right] \cdot \frac{1}{|x - \bar{x}|} \right\} = 0$$

QUINDI:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left\{ \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_2 - \bar{x}_2) \right\} \cdot \frac{1}{|x - \bar{x}|} \right\} = 0$$

SE VALUTO IL MODULO HO:

$$|a| \leq \left| \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{|x - \bar{x}|} + \left| \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| \frac{|x_2 - \bar{x}_2|}{|x - \bar{x}|}$$

RICORDIAMO CHE

$$|x - \bar{x}| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2}$$

HO CHE

$$\frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{|x - \bar{x}|} \leq 1 \quad \text{E} \quad \frac{|x_2 - \bar{x}_2|}{|x - \bar{x}|} \leq 1$$

QUINDI L'ESPRESSIONE È SEMPRE

$$\leq \left| \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| + \\ + \left| \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right|$$

QUANDO $x \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \rightarrow \bar{x}_1 \\ x_2 \rightarrow \bar{x}_2 \end{cases}$

MA $\xi_1 \in (\bar{x}_1, x_1)$ E $\xi_2 \in (\bar{x}_2, x_2)$

$\Rightarrow \xi_1 \rightarrow \bar{x}_1$ E $\xi_2 \rightarrow \bar{x}_2$

QUINDI OTTENGO CHE LE DUE QUANTITÀ TENDONO A ZERO GRAZIE ALL'IPOTESI CHE LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE IN $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \xi_2) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$\Rightarrow g$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$

DEFINIZIONE

LA DERIVATA PARZIALE SECONDA RISPETTO

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) (\bar{x}) = \frac{\partial^2 g}{(\partial x_1)^2} (\bar{x}) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x} + h e_1) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x})}{h}$$

IDENTICA COSA PER x_2 :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) (\bar{x}) = \frac{\partial^2 g}{(\partial x_2)^2} (\bar{x}) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2} (\bar{x} + h e_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2} (\bar{x})}{h}$$

IN MODO ANALOGO AVREI POTUTO FARE:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) (\bar{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} (\bar{x})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_2} (\bar{x} + h e_1) - \frac{\partial g}{\partial x_2} (\bar{x})}{h}$$

E

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) (\bar{x}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} (\bar{x})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} (\bar{x} + h e_2) - \frac{\partial g}{\partial x_1} (\bar{x})}{h}$$

POSSO RAGGRUPPARE LE DERIVATE SECONDE
IN UN'UNICA MATRICE, DETTA MATRICE
HESSIANA DI g NEL SEGUENTE MODO

$$\nabla^2 g(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial g}{\partial x_1} (\bar{x}) \\ \nabla \frac{\partial g}{\partial x_2} (\bar{x}) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{(\partial x_1)^2} (\bar{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} (\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} (\bar{x}) & \frac{\partial^2 g}{(\partial x_2)^2} (\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\left[\nabla^2 g(\bar{x}) \right]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) \quad i, j \in \{1, 2\}$$

SE LA FUNZIONE g FOSSE STATA DEFINITA SU UN APERTO DI $\mathbb{R}^n$, $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, HO:

$$\nabla g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 g(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\left[\nabla^2 g(\bar{x}) \right]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{(\partial x_1)^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 g}{(\partial x_n)^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$g(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2$$

$$\nabla g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) = (1, 4\bar{x}_2)$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO PER CASA

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} + 3x_2^3$$

TEOREMA DI SCHWARTZ

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

TALE CHE f AMETTE DERIVATE PARZIALI SECONDE IN A .

SUPPONIAMO CHE LE DERIVATE PARZIALI SECONDE SIANO CONTINUE IN $\bar{x} \in A$.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$$

E QUINDI LA MATRICE HESSIANA IN $\bar{x}$ È SIMMETRICA

DIMOSTRAZIONE

FISSIAMO $(h, k): (\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) \in A$

IN PARTICOLARE SE

$|(h, k)| < \delta \Rightarrow (\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) \in B_\delta(\bar{x}) \in$

POSSO SUPPONE CHE $\bar{x} \in A$

DEFINISCO: $G(h, k) =$

$$= g(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) - g(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) \\ - g(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + k) + g(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

PONGO $F(t) = g(t, \bar{x}_2 + k) - g(t, \bar{x}_2)$
con $t \in \mathbb{R}$

OSSERVO CHE:

$$G(h, k) = F(\bar{x}_1 + h) - F(\bar{x}_1)$$

INOLTRE NOTIAMO CHE F È UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE DERIVABILE, DOVE:

$$F'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2 + k) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2)$$

GRAZIE A LAGRANGE: $\exists \xi_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h)$

TALE CHE $F(\bar{x}_1 + h) - F(\bar{x}_1) = F'(\xi_1)h$

$$\Rightarrow G(h, k) = F'(\xi_1)h =$$

$$= \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2 + k) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) \right] h$$

SE DEFINISCO POI:

$$H(t) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, t)$$

NOTO CHE È UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE DERIVABILE, E QUINDI:

$$H'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, t) \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, t)$$

INOLTRE, PER LAGRANGE, HO CHE:

$\exists \xi_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2 + \mu)$ TALE CHE

$$H(\bar{x}_2 + \mu) - H(\bar{x}_2) = H'(\xi_2) \mu$$

QUINDI:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2 + \mu) - \frac{\partial g}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2) \mu$$

$$\Rightarrow G_g(h, \mu) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2) h \cdot \mu$$

DEFINISCO POI

$$\tilde{F}(t) = g(\bar{x}_1 + h, t) - g(\bar{x}_1, t)$$

E MI ACCORGO CHE:

$$G_g(h, \mu) = \tilde{F}(\bar{x}_2 + \mu) - \tilde{F}(\bar{x}_2)$$

DOVE $\tilde{F}$ È DERIVABILE NELL'INTERVALLO

$(\bar{x}_2, \bar{x}_2 + \mu)$ E PERCIÒ, PER LAGRANGE:

$$\exists \sigma_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2 + \mu): \tilde{F}(\bar{x}_2 + \mu) - \tilde{F}(\bar{x}_2) = \tilde{F}'(\sigma_2) \mu$$

$$\text{MA } \tilde{F}'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, t)$$

$$\Rightarrow G_g(h, \mu) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, \sigma_2) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \sigma_2) \right] \mu$$

DEFINISCO

$$\tilde{H}(t) := \frac{\partial g}{\partial x_2}(t, \sigma_2) \quad t \in \mathbb{R}$$

SEMPRE PER LAGRANGE HO:

$$\exists \sigma_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h): \tilde{H}(\bar{x}_1 + h) - \tilde{H}(\bar{x}_1) = \tilde{H}'(\sigma_1) h$$

$$\Rightarrow \tilde{H}'(\sigma_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\Rightarrow G(h, u) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1, \sigma_2) h u$$

QUINDI HO TROVATO CHE $\forall h, u$ COME
SOPRA HO

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1, \sigma_2) h u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2) h u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2)$$

$$\text{DOVE } \sigma_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h)$$

$$\sigma_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2 + u)$$

$$\xi_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h)$$

$$\xi_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2 + u)$$

QUINDI PER $h, u \rightarrow 0$ HO:

$$(\sigma_1, \sigma_2), (\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

QUINDI SE FACCIO IL LIMITE PER $h, u \rightarrow 0$
HO CHE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$$

LEZIONE #7 23/03/23

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f È CONTINUA IN $(0,0)$ SE

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\left| \frac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3y}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3x}{x^2 + y^2} \right|$$

MA

$$\left| \frac{x^3y}{x^2 + y^2} \right| = |xy| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |xy| \frac{x^2}{x^2} = |xy|$$

QUANDO $(x,y) \rightarrow 0 \Rightarrow |xy| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^3y}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0$$

SIMILMENTE

$$\left| \frac{y^3x}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| \rightarrow 0 \quad \text{QUANDO } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} = 0$$

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $(0,0)$

ORA VOGLIO VERIFICARE CHE SIA DIFFERENZIABILE

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(x,y)}{|(x,y) - (0,0)|} = 0$$

OPPURE CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI E MOSTRO CHE SONO CONTINUE IN $(0,0)$, COSÌ GRAZIE AL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE, f SARÀ DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 0 - 0h}{h^2 + 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

QUANDO PRENDO $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$ HO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} \right]_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}} = \\ &= \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - y^3 x)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{3x^4 y + 3x^2 y^3 - x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^4 \bar{y} + 4\bar{x}^2 \bar{y}^3 - \bar{y}^5}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2}$$

$$\text{NOTIAMO POI CHE } f(y,x) = \frac{y^3 x - x^3 y}{x^2 + y^2} = -f(x,y)$$

$$\text{FARE } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-f(y,x)) = -\frac{\partial}{\partial y} f(y,x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = - \frac{\bar{y}^4 \bar{x} + 4 \bar{y}^2 \bar{x}^3 - \bar{x}^5}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2}$$

HO TROVATO CHE:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4 x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{SE } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{SE } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ORA DEVO MOSTRARE CHE $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$
 QUINDI:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right| \leq \left| \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} \right| + \left| \frac{4 x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \right| + \left| \frac{y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right|$$

$$\square = |y| \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{x^4}{(x^2)^2} = |y|$$

$$\Rightarrow \square \rightarrow 0 \text{ QUANDO } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\square = 4|y| \frac{x^2 y^2}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \leq 4|y| \frac{x^2 y^2}{2x^2 y^2} = 2|y|$$

$$\Rightarrow \square \rightarrow 0 \text{ QUANDO } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\square = |y| \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{y^4}{(y^2)^2} = |y|$$

$$\Rightarrow \square \rightarrow 0 \text{ QUANDO } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$$

SIMILMENTE SI PUÒ FARE LO STESSO PER $\frac{\partial g}{\partial y}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0)$$

ANDIAMO A CALCOLARE $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0), \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0),$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

LI POSSIAMO METTERE TUTTI NELLA MATRICE
 HESSIANA

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO PER CASA

CALCOLARE LE DERIVATE SECONDE DI f E VERIFICARE CHE NON SIANO CONTINUE IN $(0,0)$

ESERCIZIO PER CASA

STESSA ANALISI DI OGGI PER

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

E ANCHE PER

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^3 + y^3}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DEFINIZIONE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ SI DICE DI CLASSE $C^1(A)$ SE È DERIVABILE IN A E LE DERIVATE PARZIALI SONO CONTINUE IN A .

DIRO CHE f È DI CLASSE $C^2(A)$ SE LE DERIVATE PARZIALI SONO DERIVABILI E LE DERIVATE SECONDE SONO CONTINUE SU A .

IN GENERALE f È DI CLASSE $C^k(A)$ SE f

AMMETTE DERIVATE PARZIALI DI ORDINE $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$
E TALI DERIVATE SONO CONTINUE IN A .

OSSERVAZIONE

SE g È DI CLASSE $C^1(A)$

$\Rightarrow g$ RISULTERÀ DIFFERENZIABILE SU A E IL GRADIENTE

$$\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(x) \right)$$

È UNA FUNZIONE CONTINUA

OSSERVAZIONE

$$\nabla g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ANALIZZIAMO IL CASO GENERALE IN CUI UNA
FUNZIONE $g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

OGNUNA DI QUESTE COMPONENTI g_i , CON
 $i=1, \dots, m$ È UNA FUNZIONE $g_i: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

IN PARTICOLARE POSSIAMO CHIEDERCI SE UNA
SINGOLA COMPONENTE g_i È DIFFERENZIABILE, IN
TAL CASO:

$$\nabla g_i(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g_i}{\partial x_m}(x) \right)$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$\Rightarrow (\nabla g)_{ij}$ ELEMENTO NELLA i -ESIMA RIGA E
 j -ESIMA COLONNA $i \in \{1, \dots, m\}$

$$(\nabla g)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

DEFINIZIONE

SIA $g: \Delta \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

SI DICE DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SE OGNI COMPONENTE g_i , CON $i = 1, \dots, m$ RISULTA DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$,
 OVERO:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

OSSERVAZIONE

SE g È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, ALLORA:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

DOVE $\nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}) = \nabla g(\bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_m - \bar{x}_m \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [\nabla q(\bar{x})(x - \bar{x})]_i &= \nabla q_i(\bar{x})(x - \bar{x}) = \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial q_i}{\partial x_j}(\bar{x})(x_j - \bar{x}_j) = \\
&= \sum_{j=1}^m [\nabla q(\bar{x})]_{i,j} (x_j - \bar{x}_j)
\end{aligned}$$

ORA FACCIAMO VEDERE CHE SE q È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, ALLORA:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|q(x) - q(\bar{x}) - \nabla q(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

SE CONSIDERO UN GENERICO VETTORE v , HO:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_m^2}, \quad v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow |v| \leq \sum_{i=1}^m |v_i|$$

INOLTRE

$$|x - \bar{x}| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_m)^2}$$

$$\Rightarrow |q(x) - q(\bar{x}) - \nabla q(\bar{x})(x - \bar{x})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m |q_i(x) - q_i(\bar{x}) - \nabla q_i(\bar{x})(x - \bar{x})|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|q(x) - q(\bar{x}) - \nabla q(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sum_{i=1}^m \frac{|q_i(x) - q_i(\bar{x}) - \nabla q_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}$$

ESSENDO q DIFFERENZIABILE HO:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|q_i(x) - q_i(\bar{x}) - \nabla q_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

QUINDI

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

VICEVERSA SE SO CHE g SODISFA

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

INFATTI

$$|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})| \leq$$

$$\leq |g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|$$

$$\text{PERCHÉ SE } v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow |v_i| \leq |v|$$

E QUINDI

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}$$

TEOREMA

$g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ È DIFFERENZIABILE IN $\mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

DEFINIZIONE

UNA FUNZIONE $g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ SI DICE DI CLASSE $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ SE RISULTA DIFFERENZIABILE IN A E IL GRADIENTE (O LE DERIVATE PARZIALI) SONO CONTINUE IN A.

$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, DICIAMO CHE g È DI CLASSE $C^k(A, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow$ AMMETTE DERIVATE PARZIALI DI ORDINE k E QUESTE RISULTANO CONTINUE SU A

DEFINIZIONE

SE $g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ED $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

POSSO DEFINIRE $f \circ g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in A$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

ESEMPIO

SIA $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$g(t) = \bar{x} + tv \quad \text{DOVE } \bar{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$v \in \mathbb{R}^m, |v| = 1$$

SIA $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f \circ g(t) = f(g(t)) = f(\bar{x} + tv)$$

SUPPONIAMO ORA CHE $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$

$\Rightarrow$ LA DERIVATA DI $f \circ g$ QUAL È?

IN $t=0$, HO:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(h) - f \circ g(0)}{h} = (f \circ g)'(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

IN MODO SIMILE POTREI CALCOLARE LA DERIVATA DI $f \circ g$ IN UN PUNTO $t \neq 0$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(t+h) - f \circ g(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + (t+h)v) - f(\bar{x} + tv)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x} + tv) + hv) - f(\bar{x} + tv)}{h} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv) = \nabla f(\bar{x} + tv) \cdot v \end{aligned}$$

LA FORMULA PRECEDENTE DICE CHE $f \circ g$ È DERIVABILE IN OGNI PUNTO $t \in \mathbb{R}$, E RISULTA:

$$(f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv)$$

ESSENDO $f \circ g$ DERIVABILE IN $\mathbb{R}$ (IN PARTICOLARE $f \circ g$ SARÀ CONTINUA IN $\mathbb{R}$) POSSO SCRIVERE $\forall t > 0$:

$$f \circ g(t) - f \circ g(0) = (f \circ g)'(\xi) \cdot t \quad \text{LAGRANGE}$$

DOVE $\xi \in (0, t)$

$$\Rightarrow f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + \xi v) t$$

TEOREMA DI DERIVABILITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA

SIA $g: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ FUNZIONE DI CLASSE $C^1(A, \mathbb{R}^m)$

SIA $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONE DI CLASSE $C^1(\mathbb{R}^m)$

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE COMPOSTA $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}$ È DI CLASSE $C^1(A)$ E $\forall \bar{x} \in A$ HO CHE:

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) = \nabla f(g(\bar{x})) \nabla g(\bar{x})$$

OSSERVAZIONE

RICORDIAMO CHE ∇f È UN VETTORE

LE VARIABILI IN $A \subseteq \mathbb{R}^m$ LE DENOTIAMO CON

$$x = (x_1, \dots, x_m)$$

LE VARIABILI IN $\mathbb{R}^m$ CON $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$\underbrace{A \subseteq \mathbb{R}^m}_{\substack{\psi \\ x}} \xrightarrow{g} \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\substack{\psi \\ y}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

IL GRADIENTE DI g SARÀ UNA MATRICE:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

$$\nabla g \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

QUINDI

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) = \underbrace{\nabla f(g(\bar{x}))}_{\in \mathbb{R}^m} \underbrace{\nabla g(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}}$$

INFATTI

$$\nabla g \circ g(\bar{x}) =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(g(\bar{x})), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(g(\bar{x})) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}(\bar{x}) \right)$$

$$\Rightarrow \nabla(g \circ g)_1 = \frac{\partial g}{\partial y_1}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) \rightarrow 1^\circ \text{ RIGA}$$

$$\nabla(g \circ g)_2 = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_2}(\bar{x}) \rightarrow 2^\circ \text{ RIGA}$$

$$\Rightarrow \nabla g \circ g(\bar{x}) = (\nabla(g \circ g)_1(\bar{x}), \dots, \nabla(g \circ g)_m(\bar{x}))$$

$$\Rightarrow \nabla(g \circ g)_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$$\text{PER } i = \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow \nabla(g \circ g)_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \left[\nabla g(g(\bar{x})) \right]_j \left[\nabla g_j(\bar{x}) \right]_{j,i}$$

ED ESSENDO CHE $g \circ g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ IL SUO GRADIENTE SARÁ:

$$\nabla(g \circ g) = \left(\frac{\partial(g \circ g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(g \circ g)}{\partial x_n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (f \circ g)(\bar{x})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m [\nabla f(g(\bar{x}))]_j [\nabla g(\bar{x})]_{ji} =$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

DIMOSTRAZIONE

INIZIAMO CON IL CALCOLARE LE DERIVATE DIREZIONALI DI $f \circ g$.

FISSO UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^m$ E VADO A CALCOLARE:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(\bar{x} + tv) - (f \circ g)(\bar{x})}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(\bar{x} + tv)) - f(g(\bar{x}))}{t}$$

$$f(g(\bar{x} + tv)) = f(g(\bar{x})) + g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(\bar{x})) + g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x}) - f(g(\bar{x}))}{t}$$

$$\text{DEFINISCO } w = \frac{g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})}{s} \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{DOVE } s = |g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})|$$

$$\text{COSÌ AVRO' } |w| = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(\bar{x}) + sw) - f(g(\bar{x}))}{t}$$

POI RIPRENDENDO L'ESPRESSIONE TROVATA IN

$$\text{PRECEDENZA: } g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x}) = \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{x} + \xi v)t$$

LA RIUSO PER SCRIVERE:

$$f(q(\bar{x}) + s w) - f(q(\bar{x})) = \frac{\partial f}{\partial w}(q(\bar{x}) + \xi w) s$$

DOVE $\xi \in (0, s)$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{\partial f}{\partial w}(q(\bar{x}) + \xi w)}{t}$$

ESSENDO f DIFFERENZIABILE HO CHE

$$\frac{\partial f}{\partial w}(q(\bar{x}) + \xi w) = \nabla f(q(\bar{x}) + \xi w) w$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s \nabla f(q(\bar{x}) + \xi w) w}{t}$$

RICORDIAMO CHE $w = \frac{q(\bar{x} + t v) - q(\bar{x})}{s}$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \nabla f(q(\bar{x}) + \xi w) \cdot \frac{q(\bar{x} + t v) - q(\bar{x})}{t}$$

ESSENDO $\xi \in (0, s)$ E $s = |q(\bar{x} + t v) - q(\bar{x})|$

HO CHE QUANDO $t \rightarrow 0$, ANCHE $s \rightarrow 0$ PERCHÉ

q È CONTINUA IN $\bar{x}$, QUINDI ANCHE $\xi \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow \nabla f(q(\bar{x}) + \xi w) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \nabla f(q(\bar{x}))$$

MENTRE $\frac{q(\bar{x} + t v) - q(\bar{x})}{t} \rightarrow \frac{\partial q}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla q(\bar{x}) v$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \nabla f(q(\bar{x}) + \xi w) \cdot \frac{q(\bar{x} + t v) - q(\bar{x})}{t} &= \\ &= \nabla f(q(\bar{x})) [\nabla q(\bar{x}) v] \end{aligned}$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $v = e_i$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ g(\bar{x} + te_i) - f \circ g(\bar{x})}{t} =$$

$$= \nabla f(g(\bar{x})) [\nabla g(\bar{x}) e_i]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \nabla f(g(\bar{x})) [\nabla g(\bar{x}) e_i] =$$

$$= \nabla f(g(\bar{x})) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \nabla f(g(\bar{x}))_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$\Rightarrow \nabla(f \circ g)(\bar{x})$ È UN VETTORE LA CUI COMPONENTE i -ESIMA È DATA DA

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

ED ESSENDO $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ E $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ CONTINUE,

RISULTERÀ CHE ANCHE $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}$ È CONTINUA SU A .

$\Rightarrow$ TEOREMA DEL DIFF. TOT. $\Rightarrow f \circ g$ È DIFF.

$$\nabla(f \circ g) = \left(\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_m} \right)$$

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) = \nabla f(g(\bar{x})) \nabla g(\bar{x})$$

LEZIONE #8 24/03/23

$$g(t) = \bar{x} + tV \quad \text{DOVE } \bar{x} \in \mathbb{R}^m, \\ V \in \mathbb{R}^m, |V| = 1$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

SE CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

POSSIAMO CONSIDERARE $q \circ g(t)$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{q} \mathbb{R}$$

$$q \circ g(t) = q(g(t)) = q(\bar{x} + tV)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\bar{x} + tV) = \frac{\partial q}{\partial v}(\bar{x} + tV)$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLA
FUNZIONE COMPOSTA

$$(q \circ g)'(t) = \nabla q(g(t)) \cdot \nabla g(t)$$

DOVE

$$\nabla g(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t) = g'(t) = V$$

$$\nabla q = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_m} \right)$$

$$\Rightarrow (q \circ g)'(t) = \nabla q(g(t))V = \frac{\partial q}{\partial v}(\bar{x} + tV)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{\partial q}{\partial x_j}(g(t)) V_j$$

SUPPONIAMO CHE $q \in C^2(\mathbb{R}^m)$.

POSSO CALCOLARE LA DERIVATA SECONDA DI

$$g \circ f(t)$$

AD ESEMPIO SE CALCOLIAMO TALI DERIVATE IN $t=0$

$$\begin{aligned}(g \circ f)''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)'(h) - (g \circ f)'(0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(h)) v_j - \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(0)) v_j}{h} =\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m v_j \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(f(h)) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(0))}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m v_j \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x} + h v) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x})}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m v_j \left(\frac{\psi(\bar{x} + h v) - \psi(\bar{x})}{h} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m v_j \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial x_j}(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{j=1}^m v_j \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i \right)$$

$$\text{ESSENZIALMENTE } \frac{\partial \psi}{\partial v}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\bar{x}) v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) (\bar{x}) v_i =$$

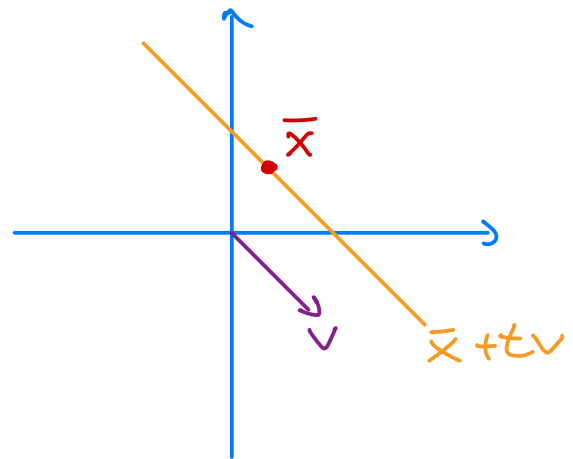
$$= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i =$$

ABBIAMO SCOPERTO CHE

$$\begin{aligned} (g \circ \gamma)''(0) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m v_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i = \\ &= v \cdot (\nabla^2 g(\bar{x}) v) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} g(\bar{x} + tv) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

SIA $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

E $\gamma(t) = \bar{x} + tv$



QUANDO CALCOLO
 $g(\bar{x} + tv)$

$$\frac{d}{dt} (g(\bar{x} + tv)) \Big|_{t=0} = \nabla g(\bar{x}) v \quad \downarrow$$

DERIVATA IN $\bar{x}$ DELLA FUNZIONE g
RISTRETTA ALLA RETTA $\bar{x} + tv$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^2 g(\bar{x} + tv) = v \cdot (\nabla^2 g(\bar{x}) v) \quad \downarrow$$

DERIVATA SECONDA DELLA FUNZIONE g
RISTRETTA ALLA RETTA $\bar{x} + tv$

UNA FUNZIONE $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CHE AMMETTE DERIVATE SECONDE E HA UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO IN $t=0$ DEVE AVERE DERIVATA PRIMA NULLA IN $t=0$ E DERIVATA SECONDA $h''(0) \leq 0$

DEFINIZIONE

SUPPONIAMO $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ CON A APERTO
 $\Rightarrow$ IL PUNTO $\bar{x} \in A$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO [MINIMO] PER f SE $\forall x \in A$ RISULTA
 $f(\bar{x}) \geq f(x)$ [$f(\bar{x}) \leq f(x)$]

SI DICE DI MASSIMO STRETTO [o MINIMO RISTRETTO] SE $\forall x \in A$, HO:
 $f(\bar{x}) > f(x)$ [$f(\bar{x}) < f(x)$]

DIRO CHE $\bar{x}$ È UN PUNTO DI MASSIMO [o MINIMO] RELATIVO SE:

$$\exists \varepsilon > 0: f(\bar{x}) \geq f(x) \text{ [} f(\bar{x}) \leq f(x) \text{]} \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$

DIRO CHE $\bar{x}$ È DI MASSIMO RELATIVO RISTRETTO [o MINIMO RELATIVO RISTRETTO] SE:

$$\exists \varepsilon > 0: f(\bar{x}) > f(x) \text{ [} f(\bar{x}) < f(x) \text{]} \forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$$

DEFINIZIONE

SE f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, DIREMO CHE $\bar{x}$ È UN PUNTO STAZIONARIO PER f SE
 $\nabla f(\bar{x}) = 0$

OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONE DI CLASSE $C^1(\mathbb{R})$ E SUPPONIAMO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ È UN PUNTO DI MASSIMO. $\Rightarrow \forall$ VETTORE $v \in \mathbb{R}^n$, $|v|=1$ HO CHE: $f(\bar{x} + tv)$ AMMETTE UN MASSIMO IN $t=0$.

ESSENDO $f(\bar{x} + tv)$ DERIVABILE IN $t=0$ HO CHE NECESSARIAMENTE LA SUA DERIVATA IN $t=0$ SI ANNULLA

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

IN PARTICOLARE SE SCELGO $v = e_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

QUINDI

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x} \text{ È UN PUNTO STAZIONARIO}$$

STESSA COSA PER $\bar{x}$ MINIMO.

SIMILMENTE SE È MASSIMO O MINIMO STRETTO.

LA DERIVATA SECONDA RISPETTO A t DI $f(\bar{x} + tv)$ DEVE ESSERE ≤ 0 IN $t=0$ SE $\bar{x}$ È UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO

$$\Rightarrow v \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) v) \leq 0 \quad \text{STIAMO ASSUMENDO CHE } f \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

MA

$$v \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

SIMILMENTE SE $\bar{x}$ PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO DEVO AVERE CHE LA DERIVATA SECONDA DI $f(\bar{x} + tv)$ IN $t=0$ DEVE ESSERE ≥ 0 .

$$\Rightarrow v \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

DEFINIZIONE

SIA M UNA MATRICE $n \times n$

DIREMO CHE M È DEFINITA POSITIVA SE

$\forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$ HO CHE:

$$v \cdot (Mv) > 0$$

↓
↳ PRODOTT
VETTORIALE
↓
PRODOTT
SCALARE

INVECE È DEFINITA NEGATIVA SE

$$v \cdot (Mv) < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

DIRÒ CHE M È SEMIDEFINITA POSITIVA SE

$\forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1: v \cdot (Mv) \geq 0$ ED ESISTE

UN $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, |\bar{v}|=1: \bar{v} \cdot (M\bar{v}) = 0$

È SEMIDEFINITA NEGATIVA SE:

$\forall v: v \cdot (Mv) \leq 0$ ED

$\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n, |\bar{v}|=1: \bar{v} \cdot (M\bar{v}) = 0$

TEOREMA

SIA $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DI CLASSE $C^2(\mathbb{R})$

SIA $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

$\Rightarrow \bar{x}$ È STAZIONARIO, CIOÈ

$\nabla f(\bar{x}) = 0$ E LA MATRICE $\nabla^2 f(\bar{x})$ DEVE
ESSERE SEMIDEFINITA NEGATIVA
O DEFINITA NEGATIVA

OSSERVAZIONE

INFATTI ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE

$$v \cdot [\nabla^2 f(\bar{x}) v] \leq 0 \quad \forall v$$

$\Rightarrow$ SE $\exists \bar{v}$ PER CUI

$$\bar{v} \cdot [\nabla^2 f(\bar{x}) \bar{v}] = 0$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x})$ È SEMIDEFINITA NEGATIVA SE
INVECE $\nexists$ UN TALE $\bar{v}$ VUOL DIRE CHE

$$v \cdot [\nabla^2 f(\bar{x}) \cdot v] < 0 \quad \forall v$$

E QUINDI $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA NEGATIVA

SIMILMENTE SE $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ È DI MINIMO RELATIVO

$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$ E $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA O
SEMIDEFINITA
POSITIVA

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

CHIARAMENTE IL PUNTO $(0, 0)$ È DI MINIMO
IN $\mathbb{R}^n$ (STRETTO) $\Rightarrow$ MINIMO ASSOLUTO PER f

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$$

$\Rightarrow$ OSSERVO SUBITO CHE $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

MA $(0, 0)$ È UN PUNTO STAZIONARIO

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{IN PARTICOLARE } \nabla^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v \cdot (\nabla^2 f(0, 0)v) = v \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} v \right] =$$

$$\text{CON } v = (v_1, v_2)$$

$$= v \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] = v \cdot \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (v_1, v_2) \cdot (2v_1, 2v_2) = 2v_1^2 + 2v_2^2$$

$$\text{RICORDIAMO CHE } |v| = 1 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2v_1^2 + 2v_2^2 = 2$$

QUINDI LA $\nabla^2 g(0,0)$ È DEFINITA POSITIVA PERCHÉ
 $\forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$, HO:

$$z = v \cdot [\nabla^2 g(0,0)v] > 0$$

ESERCIZIO PER CASA

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$$

CALCOLARE LA MATRICE HESSIANA.

IN ENTRAMBI I CASI HO CHE IN $(0,0)$ HO UN
MINIMO STRETTO

ESEMPIO

SIA $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

SUPPONIAMO CHE g SIA LIEPSICIZIANA

g È LIEPSICIZIANA SE $\exists L > 0: \forall x, y \in A$

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

DIMOSTRIAMO CHE g È CONTINUA IN TUTTO A .

g È CONTINUA IN $\bar{x}$ SE

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} |g(x) - g(\bar{x})| = 0$$

$$\text{MA } |g(x) - g(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} |g(x) - g(\bar{x})| \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} L|x - \bar{x}| = 0$$

ORA, POSSIAMO CONCLUDERE ANCHE CHE f È DIFFERENZIABILE

DOVREI CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI IN $\bar{x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h e_1) - f(\bar{x})}{h}$$

DATO CHE f È LIPSCHIZIANA

$$\begin{aligned} |f(\bar{x} + h e_1) - f(\bar{x})| &\leq L |\bar{x} + h e_1 - \bar{x}| = \\ &= L |h e_1| = L |h| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\bar{x} + h e_1) - f(\bar{x})}{h} \right| =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\bar{x} + h e_1) - f(\bar{x})|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L \cancel{|h|}}{\cancel{|h|}} = L$$

NON HO CONCLUSO
NULLA

SE PRENDO UNA SUCC. $h_m > 0$, $h_m \searrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h_m e_1) - f(\bar{x})}{h_m}$$

PER LA DISUGUAGLIANZA PRECEDENTE HO:

$$\frac{|f(\bar{x} + h_m e_1) - f(\bar{x})|}{|h_m|} \leq L$$

$$\Rightarrow \frac{f(\bar{x} + h_m e_1) - f(\bar{x})}{h_m} \in [-L, L] \quad \forall m$$

ESSENDO $[-L, L]$ COMPATTO, ESISTE UNA SOTTO SUCC. CHIAMATA m_k TALE CHE:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\bar{x} + h_{m_k} e_1) - f(\bar{x})}{h_{m_k}} \rightarrow \ell$$

IN REALTÀ NON SI RIESCE A DIMOSTRARE CHE IL LIMITE ESISTE PER TUTTE LE SUCC. $h_m \rightarrow 0$ MA SOLO PER OPPORTUNE SOTTO SUCC.

INFATTI ESISTONO FUNZIONI LIEPSICIZIANE CHE NON SONO DIFFERENZIABILI.

COME AD ESEMPIO:

$$f(x) = |x|$$

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

MOSTRIAMO CHE f È LIEPSICIZIANA
FACCIAMO VEDERE CHE $\exists L > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y$$

$\Rightarrow$ DEVO TROVARE CHE $\exists L > 0$:

$$||x| - |y|| \leq L |x - y|$$

SE $L = 1$, È VERA:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, INFATTI:

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$

E

$$|y| \leq |x - y| + |x|$$

$$\Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|$$

SE LI METTO INSIEME, HO:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

PERTANTO f È LIPSICIZIANA CON $L=1$

MA $f(x) = |x|$ NON È DIFFERENZIABILE IN $x = (0, 0)$

INFATTI SE CALCOLO LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x_1 , HO:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$\text{SE } h > 0: \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\text{SE } h < 0: \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = -1$$

$\Rightarrow$ LA DERIVATA PARZIALE NON ESISTE.

ESEMPIO

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

VERIFICHIAMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0, 0)$

VERIFICHIAMO PRIMA CHE f È CONTINUA IN $(0, 0)$

VERIFICHIAMO CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\left| \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| \leq \frac{|x_1 x_2|}{|x_1|} = \frac{|x_1|}{|x_1|} |x_2| = |x_2|$$

INOLTRE UTILIZZO LA DISUGUAGLIANZA $2ab \leq a^2 + b^2$
PER IL $|x_1 x_2|$

$$\Rightarrow |x_1 x_2| \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| \leq \frac{\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &(a-b)^2 \geq 0 \\ &a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ &a^2 + b^2 \geq 2ab \\ &\forall a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

IN ENTRAMBI I MODI HO DIMOSTRATO CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

PER FAR VEDERE SE LA FUNZIONE È
DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ PRENDO $\nabla g(0)$ E
DIMOSTRO CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|g(x) - g(0) - \nabla g(0)x|}{|x|} \rightarrow 0$$

OPPURE FACCIO LE DERIVATE E DIMOSTRO
CHE SONO CONTINUE IN $(0,0)$, POI TEOREMA
DIFFERENZIALE TOTALE $\Rightarrow g$ È DIFFERENZIABILE
IN $(0,0)$.

USO IL SECONDO METODO

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) &= \frac{x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1 x_2 \cdot x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{x_2 (x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{X_2 \sqrt{X_1^2 + X_2^2} - \frac{X_1^2 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}}{X_1^2 + X_2^2}$$

$$= \frac{\frac{X_2 (X_1^2 + X_2^2) - X_1^2 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}}{X_1^2 + X_2^2} =$$

$$= \frac{X_1^3 X_2 + X_2^3 - X_1 X_2}{(X_1^2 + X_2^2)^{3/2}} = \frac{X_2^3}{(X_1^2 + X_2^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{X_1 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right) = \frac{X_1^3}{(X_1^2 + X_2^2)^{3/2}}$$

ORA CALCOLO LE DERIVATE PARZIALI IN (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial X_1}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} =$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2}(0,0) = 0$$

VEDIAMO SE QUESTE DERIVATE SONO CONTINUE IN (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \begin{cases} \frac{X_2^3}{(X_1^2 + X_2^2)^{3/2}} & (X_1, X_2) \neq (0,0) \\ 0 & (X_1, X_2) = (0,0) \end{cases}$$

PER ESSERE CONTINUA SIGNIFICA CHE DEVO AVERE $\forall x^n \rightarrow (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

PRENDENDO $x^n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^n) = \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}} =$$

$$\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1$$

$\Rightarrow$ NON È CONTINUA

ESEMPIO

ABBIAMO FATTO VEDERE CHE

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$$

VOREMO FAR VEDERE CHE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0) - \nabla f(0) \cdot x|}{|x|} = 0$$

PER CONCLUDERE CHE f È DIFFERENZIABILE IN 0.

QUINDI DEVO FAR VEDERE CHE:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x_1 x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)} = 0$$

PROVIAMO A SCEGLIERE UNA SUCC. $x^n \rightarrow (0,0)$

TALE CHE

$$\frac{|x_1^n \cdot x_2^n|}{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2} \not\rightarrow 0$$

PROVIAMO CON

$$x_1^n = -\frac{1}{n} \quad \text{E} \quad x_2^n = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x^n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left|-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right|}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow$ HO DIMOSTRATO CHE

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x_1 x_2|}{x_1^2 + x_2^2}$ NON ESISTE PERCHÉ:

SE $x_1^n = 0$ E $x_2^n = \frac{1}{n}$, HO CHE

$$\frac{|x_1^n x_2^n|}{(x_1^n)^2 + (x_2^n)^2} = 0$$

ESEMPIO

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

FUNZIONE DI CLASSE $C^1(A)$

MOSTRARE CHE $\forall \bar{x} \in A, \exists \varepsilon > 0: f$ È LIPSICIZIANA
SULLA $B_\varepsilon(\bar{x})$

TROPPO LUNGO FACCIAMO SOLO QUALCHE
OSSERVAZIONE

SE f FOSSE STATA UNA FUNZIONE SU UN
INTERVALLO $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

RICHIEDERE CHE $g \in C^1(A)$, SIGNIFICA CHIEDERE CHE g È DERIVABILE CON DERIVATE CONTINUE SE $\bar{x} \in I$, $\exists z > 0$:

g È LIPSICIZIANA IN $(\bar{x} - z, \bar{x} + z)$

PER MOSTRARLO DEVO FAR VEDERE CHE
 $\forall x, y, x, y \in (\bar{x} - z, \bar{x} + z)$ RISULTA CHE

$$|g(x) - g(y)| \leq L |x - y|$$

$$\text{MA } g(x) - g(y) = \int_x^y g'(t) dt$$

SE SCELGO z IN MODO CHE $[\bar{x} - z, \bar{x} + z] \subseteq I$
 $\Rightarrow g$ È CONTINUA IN $[\bar{x} - z, \bar{x} + z]$

IN PARTICOLARE AMMETTE MASSIMO E MINIMO.

ANCHE $|g'|$ RISULTA CONTINUA IN $[\bar{x} - z, \bar{x} + z]$

E ANCHE $|g'|$ AMMETTE MASSIMO

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \int_x^y g'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_x^y |g'(t)| dt \leq \int_x^y L dt \end{aligned}$$

$$\text{DOVE } L := \max_{[\bar{x} - z, \bar{x} + z]} |g'|$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \int_x^y L dt = (y - x) L =$$

$$= |y - x| L \quad \text{HO SUPPOSTO } y > x$$

FACCIAMO LA STESSA COSA CON LAGRANGE

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$$

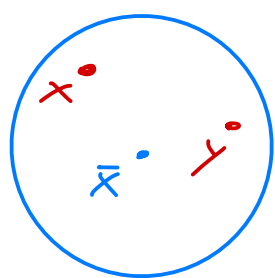
$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) \quad \text{TEOREMA DI LAGRANGE}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

$$\text{DOVE } L := \max_{[\bar{x}-2, \bar{x}+2]} |f'(t)|$$

PERÒ NOI VOLEVAMO DIMOSTRARE CIÒ IN PIÙ VARIABILI, CIOÈ $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

QUANDO PRENDO DUE PUNTI IN $B_2(\bar{x})$ CHIAMANDOLI x E y



SE RISTRINGO

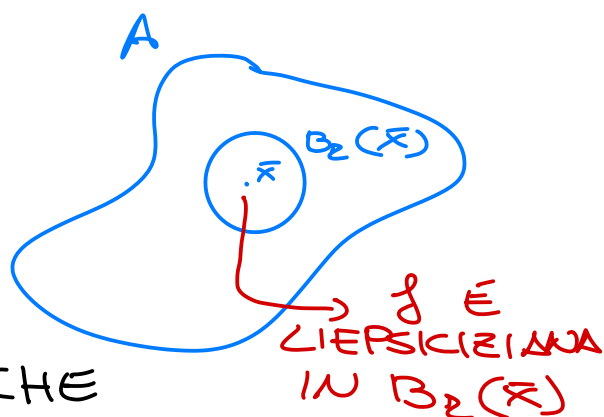
f ALLA RETTA CHE

PASSA PER x E y , MI

RIDUCO AD UNA FUNZIONE IN

UNA SOLA VARIABILE, CIOÈ:

$$z = x + tv, \quad \text{DOVE } v = \frac{x - y}{|x - y|}$$



$\Rightarrow f(x + tv)$ È UNA FUNZIONE IN UNA SOLA VARIABILE ED È TALE CHE IN $t=0$:

$$f(x + tv) = f(x)$$

SE PRENDO $t = -|x - y|$

$$\Rightarrow f(x + tv) = f(y)$$

ORA FACCIO LO STESSO RAGIONAMENTO DI PRIMA

$$|f(x) - f(y)| \leq L |0 + |x-y|| = L|x-y|$$

DOVE L È IL MAX DELLA DERIVATA FUNZIONE

$$t \mapsto f(x+tv) \text{ NELL'INTERVALLO} \\ [-|x-y|, 0]$$

$$\text{DEFINISCO } h(t) = f(x+tv)$$

$$\text{ABBIAMO VISTO CHE } h(-|x-y|) = f(y)$$

$$h(0) = f(x)$$

$$\Rightarrow |h(-|x-y|) - h(0)| \leq L |-|x-y| - 0| = \\ = L|x-y|$$

LEZIONE #9 28/03/23

TEOREMA

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONE DI CLASSE $C^2(A)$

SIA $\bar{x} \in A$

$\Rightarrow$ VALE LA SEGUENTE FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})] \cdot (x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

DOVE $R(x, \bar{x})$ SODISFA:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0 \quad \rightarrow \text{IL NUMERATORE TENDE PIÙ VELOCEMENTE A 0}$$

DIMOSTRAZIONE

$\forall v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1$ CONSIDERO LA FUNZIONE:

$f(\bar{x} + tv)$ E LA CHIAMO $g(t)$

$$\Rightarrow g(0) = f(\bar{x})$$

ADesso g RISULTA DI CLASSE C^2 SU UN INTORNO DI $t=0$ E QUINDI PER LA CLASSICA FORMULA DI TAYLOR IN UNA VARIABILE HO CHE

$$g'(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{t^2}{2} g''(\tau)$$

DOVE $\tau \in (0, t)$ SE $t > 0$

$$\Rightarrow g(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) t^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} g''(\tau) t^2 - \frac{1}{2} g''(0) t^2 \right]$$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE

$$g'(0) = \frac{d}{dt} g(\bar{x} + tv) \Big|_{t=0} = \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{x}) = \\ = \nabla g(\bar{x}) v$$

$$g''(0) = [\nabla^2 g(\bar{x}) v] v$$

$$g''(\tau) = [\nabla^2 g(\bar{x} + \tau v) v] v$$

SE SOSTITUISCO NELLA FORMULA DI TAYLOR PER g , OTTENGO:

$$g(\bar{x} + tv) = g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) v t + [\nabla^2 g(\bar{x}) v] v \frac{t^2}{2} + R$$

DOVE

$$R = \left[g''(\tau) \frac{t^2}{2} - g''(0) \frac{t^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{t^2}{2} [\nabla^2 g(\bar{x} + \tau v) v] v - \frac{t^2}{2} [\nabla^2 g(\bar{x}) v] v =$$

$$= \frac{t^2}{2} [(\nabla^2 g(\bar{x} + \tau v) - \nabla^2 g(\bar{x})) v] v$$

PRENDO COME CASO PARTICOLARE

$$v = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$$

E PRENDO $t = |x - \bar{x}|$

$$\Rightarrow \bar{x} + t v = \bar{x} + |x - \bar{x}| \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} = x$$

$$\Rightarrow g(|x - \bar{x}|) = g(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}) + \\ &\quad + \left[\nabla^2 g(\bar{x}) \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right] \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \cdot \frac{|x - \bar{x}|^2}{2} + R = \\ &= g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\nabla^2 g(\bar{x})(x - \bar{x}) \right] (x - \bar{x}) + R \end{aligned}$$

DOVE

$$R = \frac{1}{2} |x - \bar{x}|^2 \left\{ \left[\nabla^2 g\left(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}\right) - \nabla^2 g(\bar{x}) \right] \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right\} \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2} \left[\left(\nabla^2 g\left(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}\right) - \nabla^2 g(\bar{x}) \right) (x - \bar{x}) \right] (x - \bar{x})$$

IL TEOREMA È DIMOSTRATO DALLA FORMULA

$$g(x) = g(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}) + \\ + \frac{1}{2} \left[\nabla^2 g(\bar{x})(x - \bar{x}) \right] (x - \bar{x}) + R$$

A PATTO DI FAR VEDERE CHE:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$$

$$\frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\nabla^2 g\left(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}\right) - \nabla^2 g(\bar{x}) \right) \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right] \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$$

$$\text{MA } \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \leq \frac{1}{2} \left| \left(\nabla^2 f(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right) \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right| \cdot \left| \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \left(\nabla^2 f(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right) \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \nabla^2 f(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right| \left| \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \nabla^2 f(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right|$$

RICORDIAMO CHE $\tau \in (0, \tau)$
 $\Rightarrow \tau \in (0, |x - \bar{x}|)$

$\Rightarrow$ QUANDO $x \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \tau \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \rightarrow \bar{x}$$

ESSENDO $f \in C^2(A)$ HO CHE $\nabla^2 f$ È
 CONTINUO ED ESSENDO CONTINUO IN $\bar{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

TEOREMA

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONE DI CLASSE $C^2(A)$
 SUPPONIAMO $\bar{x} \in A$ SIA UN PUNTO STAZIONARIO
 E CHE $\nabla^2 f(\bar{x})$ È UNA MATRICE DEFINITA
 POSITIVA.

$\Rightarrow \bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO STRETTO

$$\Leftrightarrow B_\varepsilon(\bar{x}): \forall x \neq \bar{x}, x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow f(x) > f(\bar{x})$$

SE $\bar{x} \in A$ È STAZIONARIO E $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow \bar{x}$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO STRETTO

ESEMPIO

SI CONSIDERI TUTTI PARALLELEPEDI IN $\mathbb{R}^3$ CON SOMMA DEGLI SPIGOLI PREFISSATA. QUAL'È QUELLO CON VOLUME MAGGIORE?

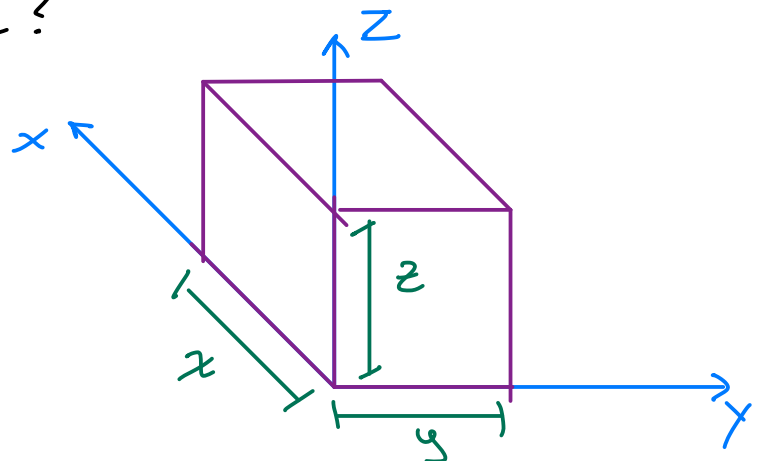
CHIAMO

$$\ell = x + y + z$$

$$\text{IL VOLUME È } x \cdot y \cdot z = V(x, y, z)$$

$$\Rightarrow z = \ell - x - y$$

$$\Rightarrow V(x, y, z) = x y z = x y (\ell - x - y) = f(x, y)$$



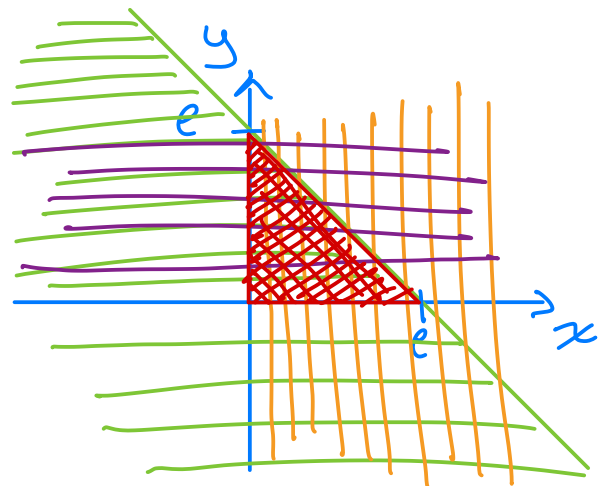
IL DOMINIO DI f È? RICHIEDO CHE $x, y > 0$

ANCHE $z > 0 \Leftrightarrow \ell - x - y > 0 \Rightarrow x + y < \ell$

SE DEFINISCO

$$A = \{x > 0\} \cap \{y > 0\} \cap \{x + y < \ell\}$$

$\hookrightarrow y < \ell - x$



INIZIO A CALCOLARE I PUNTI STAZIONARI DI f

$$f(x, y) = xy(e - x - y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(e - x - y) - xy = ey - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ex - 2xy - x^2$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in A \text{ É STAZIONARIO} \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ey - 2xy - y^2 = 0 \\ ex - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e - 2x - y = 0 \\ e - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e}{3} \\ y = \frac{e}{3} \end{cases}$$

$x > 0$
 $y > 0$
IN TUTTO
IL DOMINIO

$$\Rightarrow \text{L'UNICO PUNTO STAZIONARIO É}$$

$$\bar{x} = \frac{e}{3}, \quad \bar{y} = \frac{e}{3}$$

ORA VOGLIO TROVARE L'HESSIANA

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e - 2x - 2y$$

↓

TEOREMA DI SCHWARTZ

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = -2x$$

CALCOLO L'HESSIANA IN $\bar{x} = \bar{y} = \frac{e}{3}$

$$\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}e & -\frac{e}{3} \\ -\frac{e}{3} & -\frac{2}{3}e \end{bmatrix}$$

ORA VOGLIO CAPIRE SE È DEFINITA POSITIVA
O NEGATIVA

$$\Rightarrow [\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})v]v, \quad |v|=1, \quad v=(v_1, v_2)$$

$$\begin{aligned} [\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})v] &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e & -\frac{e}{3} \\ -\frac{e}{3} & -\frac{2}{3}e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e v_1 - \frac{1}{3}e v_2 \\ -\frac{1}{3}e v_1 - \frac{2}{3}e v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ORA FACCIO IL PRODOTTO SCALARE

$$\begin{aligned} [\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})v]v &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}e v_1 - \frac{1}{3}e v_2 \\ -\frac{1}{3}e v_1 - \frac{2}{3}e v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{2}{3}e v_1^2 - \frac{1}{3}e v_2 v_1 - \frac{1}{3}e v_1 v_2 - \frac{2}{3}e v_2^2 = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{3} e V_1^2 - \frac{2}{3} e V_1 V_2 - \frac{2}{3} e V_2 =$$

$$= -\frac{2}{3} e (V_1^2 + V_2^2 + V_1 V_2) =$$

$$\text{SO CHE } |V| = 1 \Rightarrow V_1^2 + V_2^2 = 1$$

$$= -\frac{2}{3} e (1 + V_1 V_2)$$

CONSIDERO IL $|V_1 V_2|$

$$|V_1 V_2| \leq \frac{1}{2} V_1^2 + \frac{1}{2} V_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1 + V_1 V_2 \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} e (1 + V_1 V_2) \leq -\frac{2}{3} e \cdot \frac{1}{2} < 0$$

$\Rightarrow$ QUESTA MATRICE È DEFINITA NEGATIVA E
PERCIO $(\bar{x}, \bar{y})$ È UN MASSIMO RELATIVO.

MA ESISTE UN MASSIMO ASSOLUTO?

SAPPIAMO CHE $f(x, y) = xy(e - x - y)$ È CONTINUA
SU $\bar{A}$ CHE È COMPATTA $\Rightarrow f$ AMMETTE UN MASSIMO
ASSOLUTO $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$

CONCLUDO CHE IL MASSIMO RELATIVO TROVATO
PRIMA, ESSENDO L'UNICO PUNTO DI MASSIMO
RELATIVO, DEVE COINCIDERE CON IL PUNTO DI
MASSIMO ASSOLUTO:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{e}{3} \cdot \frac{e}{3} \left(e - \frac{e}{3} - \frac{e}{3} \right)$$

ESEMPIO

È LO STESSO DI PRIMA MA FATTO DIVERSAMENTE

SIA $t_1, \dots, t_n > 0$

$$\frac{t_1 + \dots + t_n}{n} \geq (t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n)^{\frac{1}{n}}$$

L'UGUALE C'È $\Leftrightarrow t_1 = \dots = t_n$

IO SO CHE $x + y + z = l$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{l}{3} \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{l}{3}\right)^3$$

MA SE PRENDO $x = y = z = \frac{l}{3}$

$$\Rightarrow xyz = \left(\frac{l}{3}\right)^3$$

LEZIONE #10 30/03/23

TEOREMA

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DI CLASSE $C^2(A)$

SUPPONIAMO $\bar{x} \in A$ È UN PUNTO STAZIONARIO

($\nabla f(\bar{x}) = 0$). SUPPONIAMO $\nabla^2 f(\bar{x})$ SIA DEFINITA

POSITIVA $\Rightarrow \bar{x}$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO STRETTO

DIMOSTRAZIONE

$\nabla f(\bar{x}) = 0$ E QUINDI GRAZIE ALLA FORMULA DI TAYLOR AL SECONDO ORDINE POSSO SCRIVERE

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})](x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

QUINDI

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})](x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

DOVE

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} \left[\nabla^2 f(\bar{x}) \frac{(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} \right] \cdot \frac{(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

CONSIDERO

$$v = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \in |v| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x}) v] v + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

ABBIAMO SUPPOSTO CHE $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA POSITIVA, QUINDI:

$$[\nabla^2 f(\bar{x}) v] v > 0 \quad \forall |v| = 1$$

IN $\mathbb{R}^n$ I PUNTI $\{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\} = \partial B_1(0)$

È UN INSIEME CHIUSO E LIMITATO $\Rightarrow$ COMPATTO

$$\Rightarrow [\nabla^2 f(\bar{x}) v] v > 0 \quad \forall v \text{ con } |v| = 1$$

INOLTRE LA FUNZIONE $v \mapsto [\nabla^2 f(\bar{x}) v] v$ È CONTINUA IN $\partial B_1(0)$.

QUINDI AMMETTE UN PUNTO DI MINIMO.

SIA ESSO $\bar{v}$ E AVRÒ:

$$m := [\nabla^2 f(\bar{x}) \bar{v}] \bar{v} > 0$$

AVEVAMO

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x}) v] v + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} m + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

RICORDIAMO CHE

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4} m$$

QUESTO SIGNIFICA CHE

$$\exists \varepsilon > 0 : \text{SE } x \in B_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow \left| \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right| < \frac{1}{4} m$$

$$\uparrow \\ |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\text{SE } \left| \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right| < \frac{1}{4} m$$

$$\Rightarrow \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} > -\frac{1}{4} m$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \geq \frac{1}{2} m + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} >$$

$$> \frac{1}{2} m - \frac{1}{4} m = \frac{1}{4} m \quad \forall x \in B_2(\bar{x})$$

HO TROVATO

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} > 0 \quad \forall x \in B_2(\bar{x})$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) < f(x) \quad \forall x \in B_2(\bar{x})$$

$\Rightarrow x$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO STRETTO

PER ESERCIZIO FARE QUESTA DIMOSTRAZIONE CON I MASSIMI RELATIVI STRETTI

TEOREMA

K È COMPATTO IN UNO SPAZIO METRICO COMPLETO

SIA $K \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO E LIMITATO

SE f È CONTINUA IN $K \Rightarrow f$ AMMETTE $\max$ E $\min$ SU K

DIMOSTRAZIONE

DEFINIAMO $m = \inf \{ f(x) : x \in K \}$

PER DEFINIZIONE DI $\inf$, $\exists y_m \in \{f(x) : x \in K\}$

TALE CHE $y_m \rightarrow m$ QUANDO $m \rightarrow +\infty$

ESSENDO $y_m \in \{f(x) : x \in K\} \Rightarrow y_m = f(x_m)$

PER QUALUNQUE $x_m \in K$.

ESSENDO K COMPATTO POSSO TROVARE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE

$x_{m_j} \rightarrow \bar{x} \in K$ PER $j \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow f(x_{m_j}) = y_{m_j} \rightarrow m$ PER $j \rightarrow +\infty$

ESSENDO f CONTINUA $f(x_{m_j}) \rightarrow f(\bar{x})$
PER $j \rightarrow +\infty$

DA CUI DEDUO $f(\bar{x}) = m$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

$\Rightarrow \bar{x}$ È IL PUNTO DI MINIMO

TEOREMA DIMOSTRAZIONE DEFINIZIONE

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$,

SIA $\bar{x}$ DI $f \in C^2(A)$, PUNTO STAZIONARIO

ANDIAMO A STUDIARE $\nabla^2 f(\bar{x})$.

SAPPIAMO CHE $\nabla^2 f(\bar{x})$ È DEFINITA POSITIVA

MA QUESTA VERIFICA NON È FACILE.

POSSIAMO INVECE UTILIZZARE IL FATTO CHE

$\nabla^2 f(\bar{x})$ È UNA MATRICE SIMMETRICA, QUINDI È

DIAGONALIZZABILE, OUVERO ESISTE UNA MATRICE

ORTOGONALE M TALE CHE

$\nabla^2 f(\bar{x}) = M^{-1} D M$ DOVE D È DIAGONALE

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{MA } M^{-1} = M^T \Rightarrow \nabla^2 g(\bar{x}) = M^T D M$$

ORA VADO A STUDIARE LA QUANTITÀ
 $(M^T D M \cdot v) \cdot v \quad \forall v, |v| = 1$

$$\text{RICORDIAMO CHE } [\nabla^2 g(\bar{x}) v] \cdot v = \nabla^2 g(\bar{x})_{i,j} v_j v_i =$$

USO LA CONVEZIONE CHE SE L'INDICE È
 RIPETUTO 2 VOLTE, È SOTTOINTESA LA SOMMA
 SU TUTTI QUEI INDICI.

$$= (M^T D M)_{i,j} v_j v_i$$

$$\text{IN GENERALE } (AB)_{i,j} = \sum_{u=1}^n A_{iu} B_{uj} \stackrel{\text{CONVENZIONE}}{\downarrow} = A_{iu} B_{uj}$$

$$\Rightarrow (M^T D M)_{i,j} = M_{iu}^T D_{uh} M_{hj}$$

VADO A SOSTITUIRE

$$\Rightarrow (M^T D M)_{i,j} v_j v_i = M_{iu}^T D_{uh} M_{hj} v_j v_i =$$

$$= M_{ui} D_{uh} M_{hj} v_j v_i = D_{uh} (M_{hj} v_j) (M_{ui} v_i)$$

ORA DEFINISCO IL VETTORE:

$$w = M v \Rightarrow w_h = M_{hj} v_j$$

$$w_u = M_{ui} v_i$$

$$\Rightarrow D_{uh} (M_{hj} v_j) (M_{ui} v_i) = D_{uh} w_u w_h =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w \right] w = \begin{pmatrix} \lambda_1 w_1 \\ \lambda_2 w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} =$$

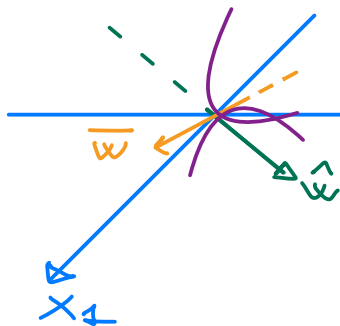
$$= \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$$

$\Rightarrow$ SE GLI AUTOVALORI λ_1 E λ_2 SONO ENTRAMBI POSITIVI $\Rightarrow \nabla^2 g(\bar{x})$ È DEFINITO POSITIVO
 SE SONO NEGATIVI $\Rightarrow \nabla^2 g(\bar{x})$ È DEFINITA NEGATIVA

SE SONO DISCORDI $\Rightarrow \nabla^2 g(\bar{x})$ NON È NE DEFINITA POSITIVA NE NEGATIVA, VISTO CHE

$$[\nabla^2 g(\bar{x}) v] v = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$$

$\Rightarrow [\nabla^2 g(\bar{x}) v] v$ ASSUME SIA VALORI POSITIVI CHE NEGATIVI $\Rightarrow$ IL PUNTO $\bar{x}$ NON È NE DI MASSIMO NE DI MINIMO RELATIVO, MA SI CHIAMA PUNTO DI SELLA



$$\nabla g(0,0) = 0$$

$$\nabla^2 g(0,0)$$

HA DUE

AUTOVALORI λ_1, λ_2

CON $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\Rightarrow \exists \bar{w} \in \hat{w}:$

$$[\nabla^2 g(0,0) \bar{w}] \bar{w} < 0$$

$$[\nabla^2 g(0,0) \hat{w}] \hat{w} > 0$$

SE UN AUTOVALORE È NULLO $\Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x})$ SARÀ SEMI DEFINITA.

RIASSUNTO: • $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ DEF. POSITIVA

• $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ DEF. NEGATIVA

• $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

• $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ SEMI DEF.

POSITIVA

• $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ SEMI DEF.

NEGATIVA

QUINDI SE CALCOLO IL DETERMINANTE DI $\nabla^2 f(\bar{x})$ AVRÒ CHE:

$$\det[\nabla^2 f(\bar{x})] = \lambda_1 \lambda_2$$

• SE IL $\det > 0 \Rightarrow$ LA MATRICE È DEF.

POSITIVA O NEGATIVA

• SE IL $\det < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

• SE IL $\det = 0 \Rightarrow$ UNO DEI DUE AUTOVALORI È 0 $\Rightarrow$ LA MATRICE È SEMI DEF.

NEL CASO IN CUI IL $\det > 0$, POSSO GUARDARE IL PRIMO ELEMENTO DI $\nabla^2 f(\bar{x})$, SE È $> 0 \Rightarrow$ È DEF. POSITIVA, SE È $< 0 \Rightarrow$ È DEF.

NEGATIVA

OSSERVAZIONE

NEL CASO IN CUI $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ OPPURE $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $m \geq 3$

SE $\bar{x}$ È UN PUNTO STAZIONARIO $\Rightarrow$ VADO A STUDIARE

$$\nabla^2 f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

SE HO CHE $\det(\nabla^2 f(\bar{x})) > 0$ E m AUTOVALORI
DI $\nabla^2 f(\bar{x})$

$$\Rightarrow \det(\nabla^2 f(\bar{x})) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m > 0$$

$\Rightarrow$ NON POSSO CONCLUDERE, IN GENERALE, CHE

LA MATRICE È DEF. POSITIVA NON SO SE SONO
TUTTI > 0

MA SE $\det < 0 \Rightarrow$ CI SONO SICURAMENTE DUE
AUTOVALORI DISCORDI $\Rightarrow \bar{x}$ È PUNTO DI SELLA

SE IL $\det = 0 \Rightarrow$ ALMENO UN AUTOVALORE È
NULLO E ANCHE QUESTO NON MI DICE NULLA

ESEMPIO

SUPPONIAMO $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ E $\nabla^2 f(\bar{x}) = A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ MATRICE SIMMETRICA}$$

POSSO ANDARE A CALCOLARE:

$$\det(\nabla^2 f(\bar{x}))$$

CHIAMATI DETERMINANTI
PRINCIPALI

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(a_{11})$$

SE A FOSSE DIAGONALE AVREI:

$$\det(\nabla^2 f(\bar{x})) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\det(a_{11}) = \lambda_1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

SE NON LO FOSSE AVREI:

$$\text{SEGNO}(\det(\nabla^2 f(\bar{x}))) = \text{SEGNO}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$$

$$\text{SEGNO}(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = \text{SEGNO}(\lambda_1 \lambda_2)$$

$$\text{SEGNO}(\det(a_{11})) = \text{SEGNO}(\lambda_1)$$

SE TUTTI QUESTI SONO > 0

$\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI SONO > 0

$\Rightarrow$ MATRICE DEF. POSITIVA

SE INVECE $\det(a_{11}) < 0$

$$\lambda_1 < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \lambda_2 < 0$$

$$\det(\nabla^2 f(\bar{x})) < 0 \Rightarrow \lambda_3 < 0$$

ESERCIZIO

$$f(x, y) = x - x^2 - y^2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

CERCO I PUNTI, SE CI SONO, DI MASSIMO E MINIMO RELATIVO

$$\nabla f(x, y) = (1 - 2x, -2y)$$

CERCO I PUNTI STAZIONARI:

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LA MATRICE È DIAGONALE}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \lambda_1 = -2 < 0 \\ \lambda_2 = -2 < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \nabla^2 f(x, y) \text{ È DEF. NEGATIVA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ SARÀ MASSIMO RELATIVO STRETTO}$$

ORA VEDIAMO SE È MASSIMO ASSOLUTO, CIOÈ:

$$f(x, y) \leq f\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad ?$$

$$\Rightarrow x - x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \quad ?$$

ABBIAMO CHE

$x - x^2 - y^2 \leq x - x^2$ È UNA PARABOLA CON
CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

$\Rightarrow$ AMMETTE MASSIMO NEL SUO

VERTICE $\Rightarrow$ IL MASSIMO È

NEL PUNTO $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x - x^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - x^2 - y^2 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO

$$f(x, y) = x(x+y)e^{y-x}$$

CERCHIAMO I MASSIMI

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (x+y)e^{y-x} + xe^{y-x} - x(x+y)e^{y-x}, \\ xe^{y-x} + x(x+y)e^{y-x} \end{pmatrix}$$

CERCO I PUNTI STAZIONARI:

$$\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+y)e^{y-x} + xe^{y-x} - x(x+y)e^{y-x} = 0 \\ xe^{y-x} + x(x+y)e^{y-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y) + x - x(x+y) = 0 \\ x + x(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+x-x(x+y)=0 \\ x(1+x+y)=0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow x=0 & \textcircled{1} \\ , 1+x+y & \textcircled{2} \end{matrix}$$

NEL CASO $\textcircled{1}$ HO CHE $y=0$

$\Rightarrow (0, 0)$ È PUNTO STAZIONARIO

NEL CASO $\textcircled{2}$ HO:

$$1+x+y=0 \Rightarrow x+y=-1$$

SOSTITUISCO NELLA PRIMA E OTTENGO

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

POI CALCOLO $\nabla^2 g(x)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{y-x} (x+y+x-x(x+y)) =$$
$$= e^{y-x} (2x+y-x^2-xy)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{y-x} (x+x^2+xy)$$

$$\nabla^2 g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{(\partial y)^2} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial^2 g}{(\partial x)^2} = -e^{y-x} (2x+y-x^2-xy) + e^{y-x} (2-2x-y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{(\partial y)^2} = e^{y-x} (x+x^2+xy) + e^{y-x} (x)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -e^{y-x} (x+x^2+xy) + e^{y-x} (1+2x+y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

CALCOLO $\nabla^2 g(x, y)$ IN $(0, 0) \in (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

$$\nabla^2 g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 g\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} e^{-2} & \frac{1}{2} e^{-2} \\ \frac{1}{2} e^{-2} & \frac{1}{2} e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\det \left[\nabla^2 f \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right] = \frac{5}{2} e^{-2} \cdot \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} \cdot \frac{1}{2} e^{-2} =$$

$$= \frac{5}{4} e^{-4} - \frac{1}{4} e^{-4} = e^{-4} > 0$$

$\Rightarrow$ LA MATRICE È DEF. POSITIVA O NEGATIVA
MA IL PRIMO ELEMENTO È $\frac{5}{2} e^{-2} > 0$

$\Rightarrow$ LA MATRICE È DEF. POSITIVA

$\Rightarrow f$ HA UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO STRETTO
IN $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$

IN $(0,0)$ HO:

$$\det [\nabla^2 f(0,0)] = 0 - 1 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ IN $(0,0)$ HO UN PUNTO DI SELLA

ESERCIZIO

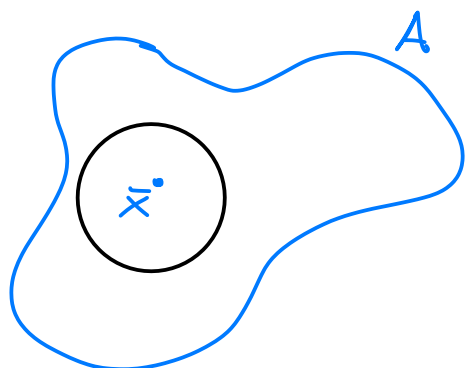
SIA $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ DI CLASSE $C^1(A)$

$\Rightarrow f$ È LOCALMENTE LIPSICIZIANA

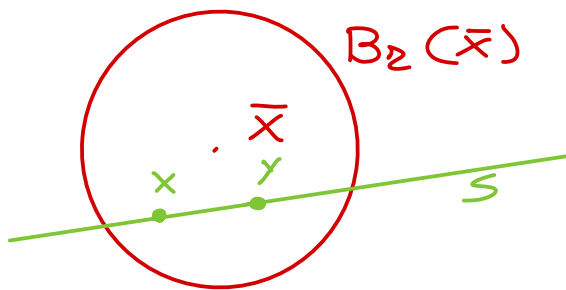
OVVERO $\forall \bar{x} \in A, \exists B_\rho(\bar{x})$:

$$\forall x, y \in B_\rho(\bar{x}) \text{ HO CHE } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

DIMOSTRARE.



PRENDO UN RAGGIO $\rho > 0$
TALE CHE $\overline{B_\rho(\bar{x})} \subseteq A$



LA RETTA S PASSANTE
PER x E y PUÒ ESSERE
SCRITTA IN FORMA
PARAMETRICA COME:

$$t \mapsto x + t \frac{y-x}{|y-x|}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \text{PUNTI DEL PIANO } z : z = x + t \frac{y-x}{|y-x|} \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$z(t) = x + t \frac{y-x}{|y-x|}$$

$$z(0) = x$$

$$z(|y-x|) = y$$

$$t \mapsto z(t), \text{ QUANDO } t \in (0, |y-x|)$$

$$\Rightarrow z(t) \text{ È UN PUNTO NEL SEGMENTO } \overline{xy}$$

$$\text{QUANDO } t < 0 \Rightarrow z(t) \text{ È A SINISTRA DI } x$$

$$\text{QUANDO } t > 0 \Rightarrow z(t) \text{ È A DESTRA DI } x$$

$$\text{SE SCRIVO } f(z(t)) = f\left(x + t \frac{y-x}{|y-x|}\right)$$

QUESTA È UNA FUNZIONE DEFINITA IN $\mathbb{R}$
A VALORI REALI

$$f \circ z(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

INOLTRE $f \circ z(t)$ È CONTINUA IN $[0, |y-x|]$ ED
È DIFFERENZIABILE IN $(0, |y-x|)$

$$(g \circ z)'(t) = \frac{\partial}{\partial t} g\left(x + t \frac{y-x}{|y-x|}\right) =$$

$$= \nabla g\left(x + t \frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{y-x}{|y-x|}$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, $\exists \xi \in (0, |y-x|)$

TALE CHE

$$(g \circ z)(|y-x|) - (g \circ z)(0) = (g \circ z)'(\xi) |y-x|$$

$$\text{CIOE } g(y) - g(x) = \nabla g\left(x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{y-x}{|y-x|} |y-x|$$

$$\Rightarrow g(y) - g(x) = \nabla g\left(x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}\right) (y-x)$$

$$\Rightarrow |g(y) - g(x)| \leq \left| \nabla g\left(x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}\right) \right| |y-x|$$

DOVE $\xi \in (0, |y-x|)$

IL PUNTO $x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}$ E AL SEGMENTO $\overline{yx}$

$$\text{QUINDI } \left| \nabla g\left(x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}\right) \right| \leq \max_{z \in \overline{B_2(x)}} |\nabla g(z)| =: L$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |g(y) - g(x)| &\leq \left| \nabla g\left(x + \xi \frac{y-x}{|y-x|}\right) \right| |y-x| \leq \\ &\leq L |y-x| \quad \forall x, y \in B_2(x) \end{aligned}$$

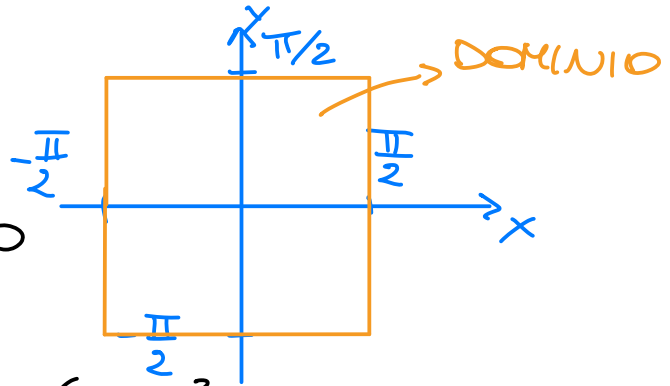
ESERCIZIO

CERCHIAMO MASSIMI E MINIMI RELATIVI E ASSOLUTI DI

$$f(x, y) = [\sin x] x (y-1)^2 \quad \text{NEL DOMINIO:}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

CERCHIAMO I MASSIMI E I
MINIMI RELATIVI NELLA
PARTE INTERNA DEL QUADRATO



$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\cos x) \cdot x \cdot (y-1)^2 + \sin x \cdot (y-1)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(\sin x) \cdot x \cdot (y-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos x) \cdot x \cdot (y-1)^2 + \sin x \cdot (y-1)^2 = 0 \\ 2(\sin x) \cdot x \cdot (y-1) = 0 \end{cases}$$

NELLA 2° EQ. HO $= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 & \textcircled{1} \\ x=0 & \textcircled{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ LA 1° EQ DIVENTA CON $\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ y=1 \end{cases}$

$\textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0=0 \end{cases}$

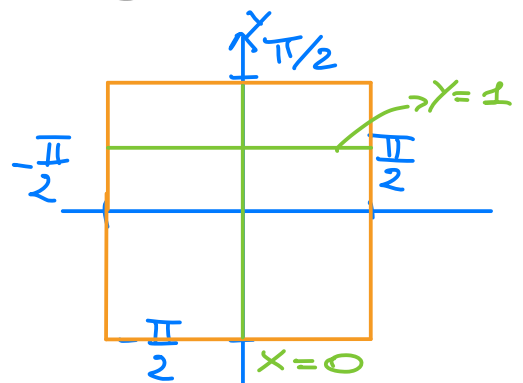
$\Rightarrow$ NEL $\textcircled{1}$ CASO HO INFINITI PUNTI STAZIONARI
DEL TIPO $(x, 1)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

NEL $\textcircled{2}$ HO $(0, y)$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

SE $x=0 \Rightarrow f(0, y) = 0$

SE $y=1 \Rightarrow f(x, 1) = 0$

$\Rightarrow$ SU QUELLA CROCE LA
FUNZIONE FA SEMPRE ZERO.



SE $\bar{x}$ È PUNTI STAZIONARI E SODDISFA AD

ESEMPIO $\nabla^2 f(\bar{x})$ DEF. POSITIVA

$\Rightarrow \bar{x}$ È MINIMO RELATIVO STRETTO

$\Rightarrow \exists B_2(\bar{x}) : \forall (x, y) \in B_2(\bar{x}), f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) < f(x, y)$

$\Rightarrow$ AVREI UN ASSURDO PERCHÉ IN UN INTORNO
DI $\bar{x}$ LA FUNZIONE È COSTANTE (I PUNTI SULLA
CROCE)

$\Rightarrow$ NON VADO NESSUNO A CALCOLARE $\nabla^2 f(\bar{x})$.

LEZIONE #11 31/03/23

DEFINIZIONE

UN RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^2$ È UN INSIEME DALLA FORMA $R = [a, b) \times [c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}$

IN $\mathbb{R}^n$ POSSIAMO COMUNQUE DEFINIRE I

RETTANGOLI COME PRODOTTO DI INTERVALLI

SEMIAPERTI $R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_m, b_m)$

DEFINIZIONE

DATO UN INSIEME $E \subseteq \mathbb{R}^2$, DEFINISCO LA

FUNZIONE CARATTERISTICA DI E COME χ_E

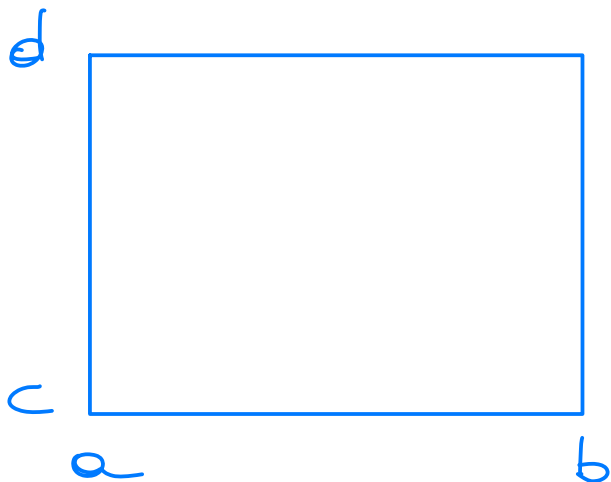
$$\chi_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases}$$

DATO UN RETTANGOLO POSSO CONSIDERARE

UNA SUA DIVISIONE IN RETTANGOLI PIÙ

PICCOLI NEL SEGUENTE MODO:

$$[a, b) \times [c, d)$$



CONSIDERO UNA

SEQUENZA DI PUNTI

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

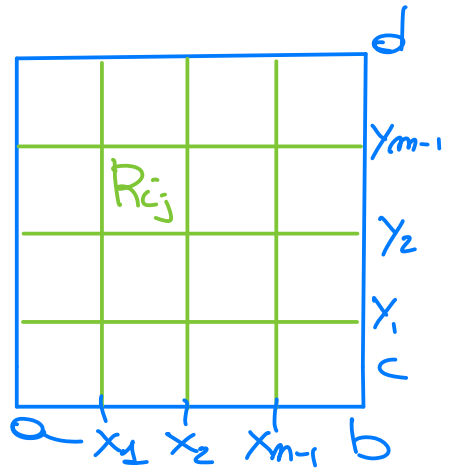
DOPODICHÉ CONSIDERO PER OGNI $i=1, \dots, m$
 $j=1, \dots, m$ IL RETTANGOLO

$$R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$$

IN TUTTO HO $m \times m$ RETTANGOLI

E

$$\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^m R_{i,j} = [a, b) \times [c, d)$$



OSSERVO CHE $R_{i,j} \cap R_{k,h} = \emptyset$ SE
 $(i,j) \neq (k,h)$

E $g: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, DICO CHE È UNA
 FUNZIONE SEMPLICE SE $\exists$ UNA SUDIVISIONE
 DI $[a, b) \times [c, d)$ IN RETTANGOLI (COME
 SOPRA) $R_{i,j}$ CON $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, m$ ED g
 È COSTANTE SU OGNI UNO DI QUESTI $R_{i,j}$
 $\Rightarrow g(x) = \lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$ QUANDO $x \in R_{i,j}$

DEFINIZIONE

SE $g: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ È SEMPLICE

$$\Rightarrow \int_{[a,b) \times [c,d)} g \, dx \, dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} m(R_{i,j})$$

DOVE $m(R_{i,j}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) =$
 $= \text{AREA DI } R_{i,j}$

E $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R} : g(x) = \lambda_{i,j} \, \forall x \in R_{i,j}$

DEFINIZIONE

SIA $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

DEFINISCO IL SUPPORTO DI f COME L'INSIEME:

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq 0\}}$$

OVVIAMENTE $\text{Supp}(f)$ È SEMPRE CHIUSO.

QUANDO $\text{Supp}(f)$ È COMPATTO $\Leftrightarrow$ È LIMITATO

$\Rightarrow$ DICO CHE f HA SUPPORTO COMPATTO O

f È UNA FUNZIONE A SUPPORTO COMPATTO.

DEFINIZIONE

SIA $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$

SUPPONIAMO f LIMITATA

DEFINISCO

$$\mathcal{F}_f^+ = \{ \phi \text{ SEMPLICI} : \phi \geq f \}$$

$$\mathcal{F}_f^- = \{ \psi \text{ SEMPLICI} : \psi \leq f \}$$

DEFINIZIONE

DICO CHE $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SE:

$$\sup_{\psi \in \mathcal{F}_f^-} \int \psi \, dx \, dy = \inf_{\phi \in \mathcal{F}_f^+} \int \phi \, dx \, dy$$

IN TAL CASO DIRÒ CHE:

$$\int_R f \, dx \, dy = \text{AL VALORE COMUNE DELL'UGUAGLIANZA PRECEDENTE}$$

$$\Rightarrow \int_R f \, dx \, dy =$$

$$= \sup_{\psi \in \mathcal{F}_f^-} \int \psi \, dx \, dy = \inf_{\phi \in \mathcal{F}_f^+} \int \phi \, dx \, dy$$

DEFINIZIONE

DEFINISCO L'INTEGRALE SUPERIORE

$$\int^* f \, dx \, dy = \inf_{\phi \in \mathcal{F}_f^+} \int \phi \, dx \, dy$$

MENTRE L'INTEGRALE INFERIORE

$$\int_* f \, dx \, dy = \sup_{\psi \in \mathcal{F}_f^-} \int \psi \, dx \, dy$$

$$\Rightarrow f \text{ È INTEGRABILE} \Leftrightarrow \int^* f \, dx \, dy = \int_* f \, dx \, dy$$

DEFINIZIONE

SE $E \subseteq [a, b) \times [c, d)$ POSSO ANCHE DEFINIRE L'INTEGRALE DI f SU E COME:

$$\int_E f \, dx \, dy = \int_R f \cdot \chi_E \, dx \, dy$$

MI ASPETTO CHE

$$\int_R f \chi_E = \underbrace{\int_{R \setminus E} f \chi_E}_{=0} + \underbrace{\int_E f \chi_E}_{= \int_E f} = \int_E f$$

OSSERVAZIONE

SIA $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA

RISULTA INTEGRABILE

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in \mathcal{F}^+ \text{ e } \psi \in \mathcal{F}^- :$

$$\int \phi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy < \varepsilon$$

IN ALTRE PAROLE SE f È INTEGRABILE HO:

$$\inf_{\phi \in \mathcal{F}^+} \int \phi \, dx \, dy = \int f \, dx \, dy$$

$$\sup_{\psi \in \mathcal{F}^-} \int \psi \, dx \, dy = \int f \, dx \, dy$$

PER DEFINIZIONE DI $\inf$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in \mathcal{F}^+ : \int \phi \, dx \, dy - \int f \, dx \, dy < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

STESSA COSA PER $\sup$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \in \mathcal{F}^- : \int f \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

SE LE SOMMO HO QUELLO CHE OSSERVATO PRIMA

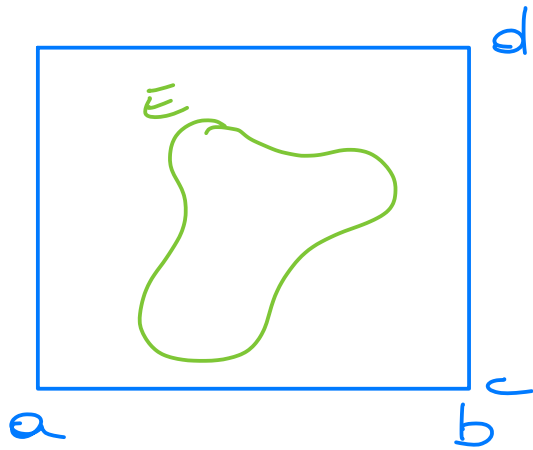
DEFINIZIONE

UN INSIEME $E \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO, SI DICE MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN SE χ_E È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

$$\Rightarrow \int \chi_E dx dy = \int_E 1 dx dy =: m(E)$$

QUESTA QUANTITÀ È CHIAMATA MISURA DI PEANO - JORDAN DELL'INSIEME E .

OSSERVAZIONE



χ_E È DEFINITA SU UN RETTANGOLO CHE CONTIENE E
 $\Rightarrow$ HA SENSO PARLARE DI INTEGRALE

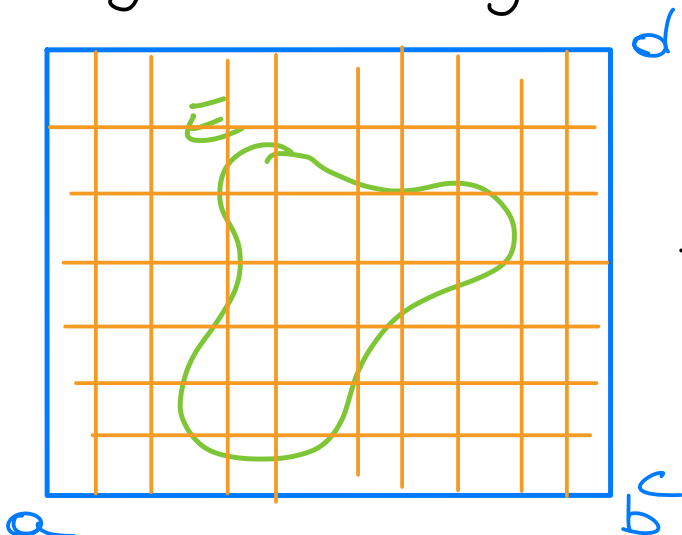
INOLTRE SO:

$$\int \chi_E dx dy = \int^* \chi_E dx dy = \int_* \chi_E dx dy$$

GRAZIE ALL'OSSERVAZIONE DI PRIMA SO:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^-:$

$$\int \phi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon$$



$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{SU } E \\ 0 & \text{FUORI} \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi$ DEVE SODDISFARE

$$\phi \geq \chi_E$$

$$\text{E } \psi \text{ DEVE } \psi \leq \chi_E$$

PRENDO $\phi = 0$ SU R_{ij} QUANDO $R_{ij} \subseteq E^c$
 $\phi = 1$ SU R_{ij} QUANDO $R_{ij} \subseteq E$
 $\phi = 1$ SE $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$

PRENDO $\psi = 0$ SU R_{ij} SE $R_{ij} \subseteq E^c$
 $\psi = 1$ SU R_{ij} SE $R_{ij} \subseteq E$
 $\psi = 0$ SU R_{ij} SE $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \int \phi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy =$$

$$= \sum \lambda_{ij} m(R_{ij}) - \sum \mu_{ij} m(R_{ij})$$

DOVE λ_{ij} = VALORE CHE ASSUME ϕ SU R_{ij}
 μ_{ij} = VALORE CHE ASSUME ψ SU R_{ij}

$\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij}$ SUI RETTANGOLI R_{ij} CHE $R_{ij} \subseteq E$
 O $R_{ij} \subseteq E^c$

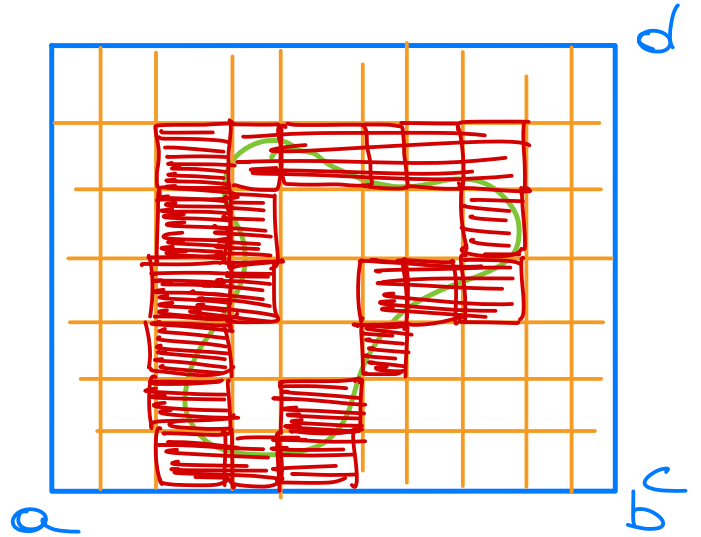
$\lambda_{ij} = 1, \mu_{ij} = 0$ SU R_{ij} CON $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \int \phi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy = \sum_{\substack{ij \\ \text{TALE CHE} \\ R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset}} m(R_{ij}) - 0 =$$

$$= \sum m(R_{ij})$$

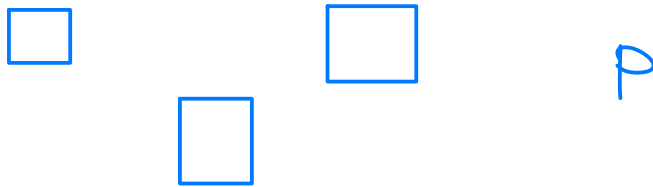
DOVE LA SOMMA E SU TUTTI I RETTANGOLI
 CHE INTERSECAVO ∂E .

$\Rightarrow$ RICHIEDERE CHE E È MISURABILE ($\Leftrightarrow \chi_E$ È INTEGRABILE) È EQUIVALENTE A RICHIEDERE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists$ UNA SUDDIVISIONE IN RETTANGOLI R_{ij} : $\sum_{R_{ij} \cap E \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon$



DEFINIZIONE

DICO CHE P È UN PLURIRETTANGOLO SE $P \subseteq \mathbb{R}^2$ È UNA UNIONE FINITA DI RETTANGOLI



OSSERVAZIONE

DALLE OSSERVAZIONI PRECEDENTI POSSO DIRE CHE $E \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO RISULTA MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ UN PLURIRETTANGOLO P : $P \supseteq E$ ED $\exists$ UN PLURIRETTANGOLO Q : $Q \subseteq E$, TALI CHE $m(P) - m(Q) < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow E$ È MISURABILE

$$\Leftrightarrow \inf \{ m(P) : P \text{ PLURIRETTANGOLO } P \supseteq E \} = \\ = \sup \{ m(Q) : Q \text{ PLURIRETTANGOLO } Q \subseteq E \}$$

$$\text{MA } m(P) = \sum m(\text{RETTANGOLO})$$

DOVE SOMMO SU TUTTI I

RETTANGOLI CHE FANNO PARTE
DEL PLURIRETTANGOLO.

DEFINIZIONE

$$m(E) =$$

$$= \inf \{ m(P) : P \text{ PLURIRETTANGOLO } P \supseteq E \} =$$

$$= \sup \{ m(Q) : Q \text{ PLURIRETTANGOLO } Q \subseteq E \}$$

COROLLARIO

UN INSIEME $E \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO, È MISURABILE

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P \text{ PLURIRETTANGOLO} : P \supseteq \partial E \text{ E } m(P) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow m(\partial E) = 0$$

OSSERVAZIONE

SE A, B SONO INSIEMI LIMITATI MISURABILI

$\Rightarrow$ ANCHE $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ SONO INSIEMI
MISURABILI

IL MOTIVO È CHE $m(\partial A) = 0, m(\partial B) = 0$

TUTTI GLI INSIEMI PRECEDENTI HANNO LA

PROPRIETÀ CHE IL LORO BORDO È SEMPRE

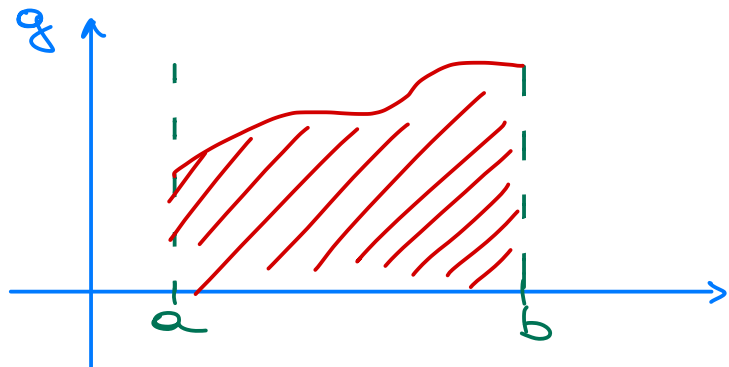
CONTENUTO IN $\partial A \cup \partial B$ E QUINDI AVRÀ

MISURA DI PEANO - JORDAN NULLA

ESEMPIO

SIA $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$

SUPPONIAMO g INTEGRABILE SECONDO RIEMANN.



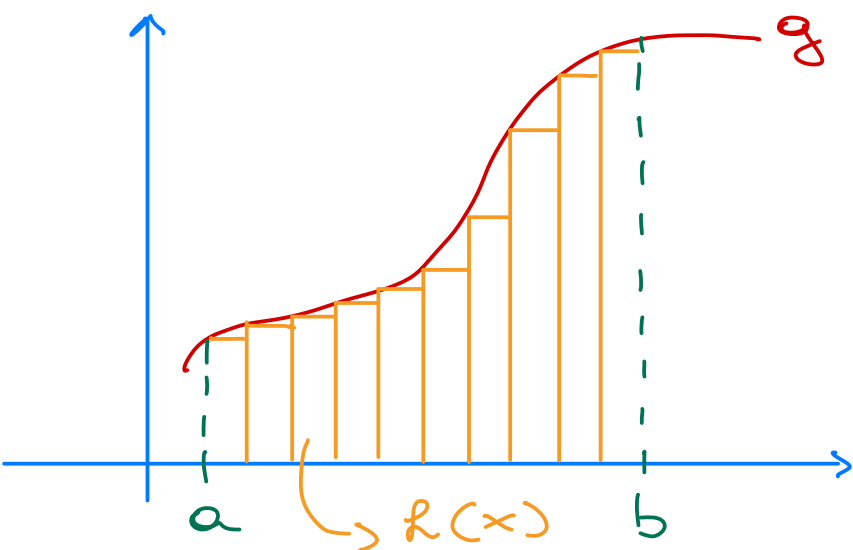
IL SOTTOGRAFICO DI g È L'UNIONE DI $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), 0 \leq y \leq g(x)\}$

DICO CHE QUESTO INSIEME RISULTA MISURABILE SECONDO P.-J.

INFATTI ESSENDO $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, POSSO TROVARE DELLE FUNZIONI SEMPLICI:

$R, u: [a, b) \rightarrow \mathbb{R} : R(x) \leq g(x) \leq u(x) \quad \forall x \in [a, b)$

$$\int_a^b u(x) dx - \int_a^b R(x) dx < \varepsilon$$



IL SOTTOGRAFICO DI R È UNA UNIONE DI RETTANGOLI

$\Rightarrow$ IL PLURIRETTANGOLO $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), y \in [0, R(x)]\}$

SODISFA $H \subseteq$ SOTTOGRAFICO DI g .

SIMILMENTE IL SOTTOGRAFICO DI u È UN PLURIRETTANGOLO $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), y \in [0, u(x)]\}$

TALE CHE $K \supseteq$ SOTTOGRAFICO DI $g \supseteq H$

$$m(K) = \int_a^b u(x) dx$$

$$m(H) = \int_a^b h(x) dx$$

NEL MOMENTO IN CUI $\int_a^b u(x) dx - \int_a^b h(x) dx < \varepsilon$

$$\Rightarrow m(K) - m(H) < \varepsilon$$

HO VERIFICATO CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists$ PLURIRETTANGOLO K ED $\exists$ PLURIRETTANGOLO H , TALE CHE

$$K \supseteq \text{SOTTOGRAFICO DI } g \supseteq H$$

$$\text{E } m(K) - m(H) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ IL SOTTOGRAFICO DI g È MISURABILE SECONDO P-J E RISULTA:

$$m(E) = \int_a^b g(x) dx$$

DOVE $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), y \in [0, g(x)]\}$

DEFINIZIONE

INSIEME DI QUESTO TIPO PRENDE IL NOME DI INSIEME NORMALE RISPETTO A γ

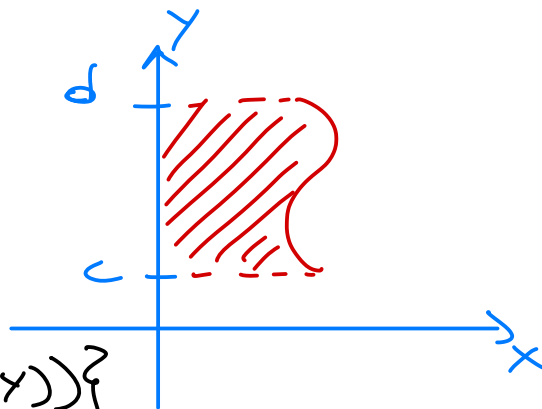
MENTRE, SE CONSIDERO

$$g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ L'INSIEME E' DEFINITO

COSI':

$$\{(x, y): x \in [c, d], y \in [0, g(x)]\}$$



QUESTO SI CHIAMA L'INSIEME NORMALE RISPETTO
A X

ESEMPIO

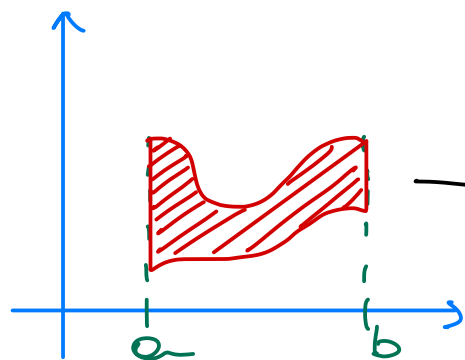
DATE $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ TALI CHE

$g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ E TALI CHE

g_1 E g_2 SONO INTEGRABILI SECONDO REIMAN.

$\Rightarrow$ POSSO CONSIDERARE L'INSIEME

$$E = \{(x, y): x \in [a, b], y \in [g_1(x), g_2(x)]\}$$



IL SOTTOGRAFICO DI g_2 A CUI

$\rightarrow$ SOTTRAGO IL SOTTOGRAFICO
DI g_1

$\Rightarrow E$ E' MISURABILE

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_a^b g_2(x) dx - \int_a^b g_1(x) dx = \\ &= \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx \end{aligned}$$

SE $g_1 < g_2$ POSSO SEMPRE DEFINIRE
L'INSIEME E , E È SEMPRE MISURABILE E:

$$m(E) = \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx$$

QUANDO g_1 E g_2 ASSUMONO VALORI NEGATIVI
L'IMPORTANTE È CHE SONO INTEGRABILI
SECONDO REIMAN.

ANCHE QUESTI SI CHIAMANO INSIEMI NORMALI
RISPETTO A L'ASSE x .

SE $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d), x \in [g_1(y), g_2(y)) \}$

DOVE $g_1, g_2 : [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ RIEMAN INTEGRABILE
CON $g_1(y) < g_2(y)$

$$\Rightarrow F \text{ È MISURABILE } m(F) = \int_c^d g_2(y) - g_1(y) dy$$

F È UN INSIEME NORMALE RISPETTO A x .

TEOREMA

SUPPONIAMO f FUNZIONE CONTINUA SU UN
RETTANGOLO CHIUSO $[a, b] \times [c, d]$

$\Rightarrow f$ È INTEGRABILE SECONDO REIMAN

TEOREMA

SE f È CONTINUA SU UN COMPATTO K

$\Rightarrow f$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU K

RIPASSO:

UNA FUNZIONE $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE UNIFORMEMENTE CONTINUA SE:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall p, q \in E \text{ con } |p - q| < \delta \\ \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

TEOREMA

SE f È CONTINUA SU $K \Rightarrow$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA.

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NON LO È.

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0: \forall m, \exists p_m, q_m \in K: |p_m - q_m| < \frac{1}{m} \\ \Rightarrow |f(p_m) - f(q_m)| \geq \varepsilon_0$$

ORA ESTRAGGO UNA SOTTOSUCC. DI p_m CHIAMATA p_{m_k} TALE CHE

$$p_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p \in K$$

CORISPONDENTEMENTE A (p_{m_k}) HO (q_{m_k}) , QUESTA PERÒ NON È DETTA CONVERGA

$\Rightarrow$ ESTRAGGO UN ULTERIORE SOTTOSUCC. DA q_{m_k} CHIAMATA $q_{m_{k_j}}$ $j \rightarrow +\infty, q \in K$.

CORISPONDENTEMENTE A QUESTA SOTTOSUCC. AVRÒ:

$$p_{m_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} p$$

ORA PERÒ HO $|p_{m_{k_j}} - q_{m_{k_j}}| \leq \frac{1}{m_{k_j}}$
QUANDO $j \rightarrow +\infty, |p_{m_{k_j}} - q_{m_{k_j}}| \rightarrow 0$

$\Rightarrow P \in \mathcal{Q}$ DEVONO COINCIDERE $\Rightarrow P=Q$

$$\Rightarrow |f(P_{m_k j}) - f(Q_{m_k j})| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

PERCHÉ $P_{m_k j}, Q_{m_k j} \rightarrow P=Q$

ASSURDO AVEVO SUPPOSTO CHE

$$|f(P_{m_k j}) - f(Q_{m_k j})| \geq \varepsilon_0 > 0$$

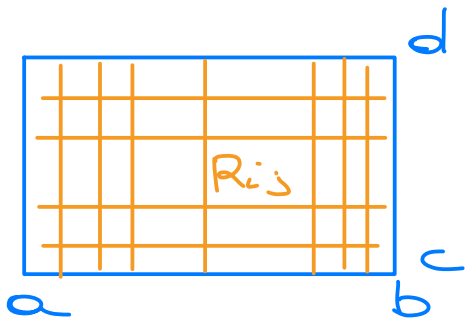
TEOREMA

SE f È CONTINUA SU $[a, b] \times [c, d]$

$\Rightarrow f$ È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

DIMOSTRAZIONE

SO SUBITO CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $[a, b] \times [c, d]$, QUINDI SE FISSO UN $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: SE $|P - Q| < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$
 $\forall P, Q \in [a, b] \times [c, d] = R$



SUDVIDO R IN RETTANGOLI R_{ij}
TALE CHE $\text{diam}(R_{ij}) < \delta$

SU OGNUNO DI QUESTI
RETTANGOLINI DEFINISCO:

$$\lambda_{ij}^+ = \max_{(x,y) \in \overline{R_{ij}}} f(x,y) \quad , \quad \lambda_{ij}^- = \min_{(x,y) \in \overline{R_{ij}}} f(x,y)$$

DATO CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA SO
CHE: $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon \quad \forall P, Q \in R_{ij}$

$$\Rightarrow \lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^- \leq \varepsilon$$

DEFINISCO ORA ϕ FUNZIONE SEMPLICE COME

$$\Phi(x) = \lambda_{i,j}^+ \text{ su } R_{i,j}$$

DEFINISCO Ψ FUNZIONE SEMPLICE $\Psi(x) = \lambda_{i,j}^-$
SE $x \in R_{i,j}$

MA PER DEFINIZIONE

$$\int \Phi \, dx \, dy = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^+ m(R_{i,j})$$

$$\int \Psi \, dx \, dy = \sum_{i,j} \lambda_{i,j}^- m(R_{i,j})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \Phi \, dx \, dy - \int \Psi \, dx \, dy &= \sum_{i,j} (\lambda_{i,j}^+ - \lambda_{i,j}^-) m(R_{i,j}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i,j} m(R_{i,j}) = \varepsilon m(R) \end{aligned}$$

$$\text{DOVE } m(R) = (b-a)(d-c)$$

QUINDI HO DIMOSTRATO CHE POSSO SEMPRE
TROVARE $\Phi \in \mathcal{F}^+$ E $\Psi \in \mathcal{F}^-$ TALI CHE:

$$\int \Phi \, dx \, dy - \int \Psi \, dx \, dy \text{ È ARBITRARIAMENTE PICCOLO}$$

$$\Rightarrow f \text{ È INTEGRABILE}$$

TEOREMA

SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA SUL RETTANGOLO
 R CHIUSO $[a, b] \times [c, d]$ E SIA $E \subseteq \mathbb{R}$
MISURABILE

$$\Rightarrow \text{LA FUNZIONE } f \cdot \chi_E \text{ È INTEGRABILE E}$$

$$\int g \cdot \chi_E \, dx \, dy = \int_E g \, dx \, dy$$

OVVERO EQUIVALENTEMENTE POSSO DEFINIRE
L'INTEGRALE DI g SU OGNI SOTTOINSIEME
MISURABILE DI $\mathbb{R}$.

LEZIONE #12 04/04/23

TEOREMA

SIA $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONE CONTINUA
SUL RETTANGOLO $R = [a, b] \times [c, d]$ E SIA
 $E \subseteq R$

$\Rightarrow f$ È INTEGRABILE SU E ($\Leftrightarrow f \cdot \chi_E$ È
INTEGRABILE SECONDO REIMAN)

DIMOSTRAZIONE

FISSIAMO $\varepsilon > 0$

SUPPONIAMO CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA
SU R

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: SE $p, q \in R$ E $|p - q| < \delta$
 $\Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$

QUINDI PRENDIAMO UNA PARTIZIONE DI R
(= SUDIVISIONE) IN RETTANGOLINI R_{ij} , $i = 1, \dots, n$
 $j = 1, \dots, m$

TALI CHE $\text{diam}(R_{ij}) < \delta$

VISTO CHE E È MISURABILE $\Rightarrow m(\partial E) = 0$

E QUINDI, A MENO DI INFITTIRE LE PARTIZIONI
DI R IN RETTANGOLINI R_{ij} PIÙ PICCOLI,
POSSIAMO SUPPONE CHE SE

$$\mathcal{R}_{\partial E} := \{R_{ij} : R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset\}$$

$\Rightarrow$ AVREMMO: $\sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} m(R_{ij}) < \varepsilon$

DEFINISCO: $M^+ := \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

$$M^- := \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

INDIVIDUO $\psi \in \mathcal{F}^-$ E $\phi \in \mathcal{F}^+$ FUNZIONI SEMPLICI
TALI CHE:

$$\phi := \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} M^+ \chi_{R_{ij}} + \sum_{R_{ij} \subseteq E} \lambda_{ij}^+ \chi_{R_{ij}}$$

$$\psi := \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} M^- \chi_{R_{ij}} + \sum_{R_{ij} \subseteq E} \lambda_{ij}^- \chi_{R_{ij}}$$

DOVE: $\lambda_{ij}^+ = \max_{q \in \overline{R_{ij}}} f(q)$

$$\lambda_{ij}^- = \min_{q \in \overline{R_{ij}}} f(q)$$

AVRÓ CHE $\psi \leq f \cdot \chi_E \leq \phi$

ORA CALCOLO

$$\int_R \phi \, dx \, dy = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} M^+ m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \subseteq E} \lambda_{ij}^+ m(R_{ij})$$

$$\int_R \psi \, dx \, dy = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} M^- m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \subseteq E} \lambda_{ij}^- m(R_{ij})$$

ORA VADO A STIMARE

$$\int_R \phi \, dx \, dy - \int_R \psi \, dx \, dy$$

QUINDI

$$\int_R \phi \, dx \, dy - \int_R \psi \, dx \, dy =$$

$$= \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_\delta} (M^+ - M^-) m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \in E} (\lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^-) m(R_{ij})$$

$$\leq (M^+ - M^-) \varepsilon + \varepsilon \sum_{R_{ij} \in E} m(R_{ij}) \leq$$

↓
PER
IPOTESI

$$\leq \varepsilon [(M^+ - M^-) + m(R)]$$

QUINDI $g \cdot x \in$ RISULTA INTEGRABILE SECONDO
REIMAN.

OSSERVAZIONE

CONSIDERIAMO UNA FUNZIONE SEMPLICE $\phi: R \rightarrow \mathbb{R}$

DOVE $R = [a, b) \times [c, d)$

QUINDI POSSO SEMPRE TROVARE UNA SUDIVISIONE
DI R IN RETTANGOLINI

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$$

$$\Rightarrow \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

ORA FISSO $x \in [x_{i-1}, x_i)$

E CHIAMO $I_i = [x_{i-1}, x_i) \quad \forall i = 1, \dots, m$

$I_j = [y_{j-1}, y_j) \quad \forall j = 1, \dots, m$

E MI CHIEDO SE POSSO INTEGRARE LA FUNZIONE $\phi(x, y)$ SOLO NELLA VARIABILE y .

CONSIDERO LA FUNZIONE $y \in [c, d) \rightarrow \phi(x, y)$

OSSERVO CHE:

$$y \mapsto \phi(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \chi_{R_{i,j}}(x, y)$$

QUESTA FUNZIONE ASSUME I VALORI $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,m}$ RISPETTIVAMENTE NEI INTERVALLI $J_1, J_2, \dots, J_m$.

INFATTI SE $y \in J$, HO CHE:

$$\phi(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \chi_{R_{i,j}}(x, y)$$

ED ESSENDO $x \in I_i$ SE $y \in J_1 \Rightarrow \phi(x, y) = \lambda_{i,1}$

SE $y \in J_2 \Rightarrow \phi(x, y) = \lambda_{i,2}$

$\vdots$

SE $y \in J_m \Rightarrow \phi(x, y) = \lambda_{i,m}$

J_3			λ_{33}	
J_2			λ_{32}	
J_1			λ_{31}	
	I_1	I_2	I_3	I_4

$\Rightarrow$ RISULTA CHE $\phi(x, y)$ È INTEGRABILE SECONDO REIMAN NELLA VARIABILE y NELL'INTERVALLO $[c, d)$

E IL SUO INTEGRALE È

$$\begin{aligned} \int_c^d \phi(x, y) dy &= \lambda_{i,1} m(J_1) + \lambda_{i,2} m(J_2) + \\ &+ \dots + \lambda_{i,m} m(J_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} m(J_j) = \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} (y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

L'INTEGRALE APPENA FATTO DIPENDE DA DOVE AVEVO
FISSATO x ($x \in I_i$)

IN PARTICOLARE

$$\int \phi dy = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \lambda_{1j} (y_j - y_{j-1}) & \text{se } x \in I_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{mj} (y_j - y_{j-1}) & \text{se } x \in I_m \end{cases}$$

PERTANTO SE VADO A VEDERE LA FUNZIONE
CHE PRENDE

$$x \in [a, b) \mapsto \int_c^d \phi(x, y) dy$$

E MI ACCORGO CHE ANCHE QUESTA È UNA FUNZIONE
SEMPLICE COSTANTE A TRATTI CHE ASSUME VALORI
PREFISSATI NEI INTERVALLI I_i , $i = 1, \dots, m$

POI CHIAMO $G(x): [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_c^d \phi(x, y) dy$$

QUINDI LA POSSO REINTEGRARE SU $[a, b)$

$$\int_a^b G(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d G(x) dy \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) m(I_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \underbrace{(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1})}_{\text{AMPIEZZA } R_{ij}} \approx$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} m(R_{ij}) = \int_R \phi(x, y) dx dy$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE SE ϕ È UNA FUNZIONE SEMPLICE

$$\Rightarrow \int_a^b \int_c^d \phi(x, y) dy dx = \int_R \phi(x, y) dx dy$$

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA CHE

$$\int_c^d \int_a^b \phi(x, y) dy dx = \int_R \phi(x, y) dx dy$$

TEOREMA DI FUBINI

SIA $f: [a, b) \times [c, d) = R \rightarrow \mathbb{R}$

SIA f INTEGRABILE SECONDO REIMAN

SUPPONIAMO CHE $\forall x \in [a, b)$ FISSATO, LA FUNZIONE $y \mapsto f(x, y)$ È INTEGRABILE SECONDO REIMAN

NELL'INTERVALLO $[c, d)$

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE $F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

DEFINITA COME

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

RISULTA INTEGRABILE SU $[a, b)$ E:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d g(x, y) dy dx =$$

$$= \int_R g(x, y) dx dy$$

DIMOSTRAZIONE

ESSENDO g INTEGRABILE POSSO TROVARE $\forall \varepsilon > 0$, DUE FUNZIONI SEMPLICI $\psi \in \mathcal{F}^-$ E $\phi \in \mathcal{F}^+$ TALI CHE:

$$\int \phi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon$$

E INOLTRE $\psi(x, y) \leq g(x, y) \leq \phi(x, y)$

ORA INTEGRO RISPETTO A y NELL'INTERVALLO $[c, d)$

$$\Rightarrow \int_c^d \psi(x, y) dy \leq \underbrace{\int_c^d g(x, y) dy}_{F(x)} \leq \int_c^d \phi(x, y) dy$$

QUINDI PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE RISULTA CHE CI SONO DUE FUNZIONI SEMPLICI:

$$\Psi(x) = \int_c^d \psi(x, y) dy$$

$$\Phi(x) = \int_c^d \phi(x, y) dy$$

CHE SODISFANO:

$$\Psi(x) \leq F(x) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in [a, b)$$

INOLTRE

$$\begin{aligned} \int_a^b \Phi(x) dx - \int_a^b \Psi(x) dx &= \\ &= \int_a^b \int_c^d \phi(x, y) dx dy - \int_a^b \int_c^d \psi(x, y) dx dy = \\ &= \int_R \phi(x, y) dx dy - \int_R \psi(x, y) dx dy < \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ È INTEGRABILE SECONDO REIMAN IN $[a, b)$

INOLTRE

$$\begin{aligned} \int_a^b \Psi(x) dx &= \\ &= \int_R \psi(x, y) dx dy \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_a^b \Phi(x) dx = \\ &= \int_R \phi(x, y) dx dy \end{aligned}$$

INOLTRE

$$\int_R \psi(x, y) dx dy \leq \int_R g(x, y) dx dy \leq \int_R \phi(x, y) dx dy$$

QUINDI

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(x) dx - \int_R g(x, y) dx dy \right| &\leq \\ &\leq \int_R \phi(x, y) dx dy - \int_R \psi(x, y) dx dy < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x) dx - \int_R g(x, y) dx dy = 0 \quad \text{DATO CHE LA DISUGUAGLIANZA È VERA } \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x) dx = \int_R g(x, y) dx dy$$

$$\stackrel{II}{=} \int_a^b \int_c^d g(x, y) dx dy$$

TEOREMA (FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILI)

SIANO $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTI

SIA $\phi: A \rightarrow B$ BIUNIVOCA TALE CHE: $\phi \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$
E $\phi^{-1} \in C^1(B, \mathbb{R}^n)$

SUPPONIAMO INOLTRE CHE IL DETERMINANTE DEL
 $\nabla \phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$

SE g È UNA FUNZIONE A SUPPORTO COMPATTO
IN B E INTEGRABILE SECONDO REIMAN $g: B \rightarrow \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ VALE:

$$\int_B g(y) dy = \int_A g(\phi(x)) |\det(\nabla \phi(x))| dx$$

DOVE $y = (y_1, \dots, y_m) \in B$

OSSERVAZIONE

$\phi: A \rightarrow B, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$

$B \subseteq \mathbb{R}^m$

QUINDI $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$

$$\nabla(\phi(x)) = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1(x) \\ \nabla\phi_2(x) \\ \vdots \\ \nabla\phi_m(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\phi_2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi_m}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial\phi_m}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$\Rightarrow$ DATO CHE È QUADRATA POSSO FARE IL DETERMINANTE

OSSERVAZIONE

OSSERVIAMO CHE NEL CASO DI $m=1$ LA FORMULA È COERENTE

INFATTI SE $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$

$B = (c, d) \subseteq \mathbb{R}$

POSSO CONSIDERARE UN APPLICAZIONE

BIUNIVOCA $\phi: A \rightarrow B$ E SUPPONGO CHE SIA DI

CLASSE C^1 E ϕ^{-1} DI CLASSE C^1

$\phi(x) = y \quad x \in (a, b)$

$y \in (c, d)$

POTREI AVERE DUE CASI: $\phi'(x) > 0$

$\phi'(x) < 0$
 $\forall x \in (a, b)$

ORA PRENDO g FUNZIONE INTEGRABILE SU (c, d)

$$\int_c^d g(y) dy = \int_a^b g(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

QUESTO RISULTATO PERÒ NON È PROPRIA
CORRETTA

$$\int_c^d g(y) dy = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} g(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

$$\text{SE } \phi'(x) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} \phi(a) = c \\ \phi(b) = d \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \phi^{-1}(c) = a \\ \phi^{-1}(d) = b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int_c^d g(y) dy = \int_a^b g(\phi(x)) \phi'(x) dx$$

$$\text{SE } \phi'(x) < 0 \Rightarrow \begin{matrix} \phi(a) = d \\ \phi(b) = c \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \phi^{-1}(c) = b \\ \phi^{-1}(d) = a \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int_c^d g(y) dy = \int_b^a g(\phi(x)) \phi'(x) dx =$$

$$= - \int_a^b g(\phi(x)) \phi'(x) dx =$$

$$= \int_a^b g(\phi(x)) |\phi'(x)| dx$$

QUINDI SIA PER $\phi' > 0$ E PER $\phi' < 0$ LA
FORMULA CORRETTA È:

$$\int_c^d g(y) dy = \int_a^b g(\phi(x)) |\phi'(x)| dx$$

INFATTI PER $m=1$ HO: $\nabla \phi' = \phi'$

$$\Rightarrow \det \nabla \phi' = \phi'$$

$$\Rightarrow |\det \nabla \phi'| = |\phi'|$$

LEZIONE #13 13/04/23

TEOREMA DEL CAMBIO DI VARIABILI V2

SIA $\Phi: A \rightarrow B$ BIUNIVOCA DI CLASSE $C^1(A, B)$
E CON INVERSA DI CLASSE $C^1(B, A)$ TALE CHE
 $|\det \nabla \Phi(x)| \neq 0 \quad \forall x \in A$

SIA $|\det \nabla \Phi(x)|$ LIMITATO SU A

SIANO A E B INSIEMI MISURABILI

$\Rightarrow$ SE $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ È INTEGRABILE SECONDO REIMAN,

RISULTA:

$$\int_B g(y) dy = \int_A g \circ \Phi(x) |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

ESEMPIO

SUPPONIAMO $E \subseteq B$ MISURABILE E VOGLIAMO

CALCOLARE LA MISURA DI PEANO-JORDAN

QUINDI VOGLIO CALCOLARE $m(E)$

$$\Rightarrow m(E) = \int_E 1 dx = \int_B \chi_E(x) dx$$

RICORDIAMO CHE $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in E \\ 0 & \text{SE } x \notin E \end{cases}$

GRAZIE AL TEOREMA PRECEDENTE POSSIAMO

RISCRIVERE

$$\int_B \chi_E(x) dx = \int_A \chi_E(\Phi(z)) |\det \nabla \Phi(z)| dz$$

DOVE

$$\chi_E(\Phi(z)) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \Phi(z) \in E \\ 0 & \text{SE } \Phi(z) \notin E \end{cases}$$

MA SE $\Phi(z) \in E$ SIGNIFICA CHE $z \in \Phi^{-1}(E)$
(QUESTO È UN SE E SOLO SE)

$$\Rightarrow \chi_E(z) = \begin{cases} 1 & \text{SE } z \in \Phi^{-1}(E) \\ 0 & \text{SE } z \notin \Phi^{-1}(E) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(E)}(z)$$

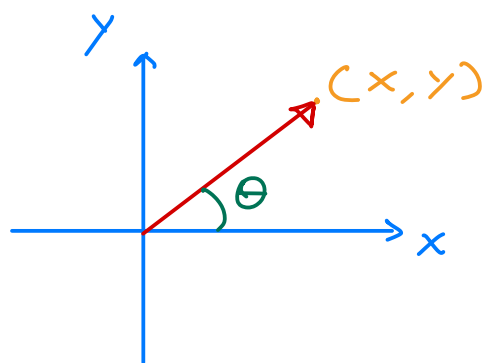
$$\Rightarrow \int_E 1 dx = \int_B \chi_E(x) dx =$$

$$= \int_A \chi_{\Phi^{-1}(E)}(z) |\det \nabla \Phi(z)| dz =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(z)| dz$$

DEFINIZIONE

ORA DEFINIREMO LE COORDINATE POLARI.



$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

IDENTIFICO (x, y) CON ρ E θ .

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

θ = ANGOLO COMPRESO TRA

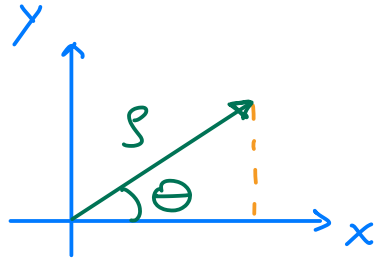
L'ASSE X POSITIVA E LA

DIREZIONE DELLA RETTA CHE

PASSA PER L'ORIGINE E IL PUNTO (x, y)

$\Rightarrow$ DATI $\rho \in [0; +\infty)$ E $\theta \in [0; 2\pi)$ HO:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$



ORA DEFINISCO LA MAPPA $\Phi(\rho, \theta) = (x, y)$

CIOE' $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

$$\Phi: [0; +\infty) \times [0; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

ESCLUDO LO ZERO PERCHE' QUANDO $\rho = 0$ HO

CHE $x = 0$ E $y = 0$, QUESTO $\forall \theta \in [0; 2\pi)$

$\Rightarrow$ LA MAPPA $\Phi: [0; +\infty) \times [0; 2\pi)$ NON

SAREBBE INIETTIVA PERCHE'

$$\Phi(0, \theta) = (0, 0) \quad \forall \theta \in [0; 2\pi)$$

$\Rightarrow$ SE ESCLUDO $\rho = 0$ LA MAPPA E' INIETTIVA

CALCOLIAMO ORA $\nabla \Phi$:

$$\nabla \Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \text{DOVE:}$$

$$\Phi_1 = \rho \cos \theta$$

$$\Phi_2 = \rho \sin \theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

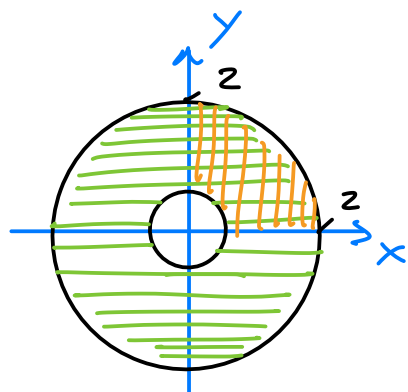
$$\Rightarrow \det \nabla \Phi(\rho, \theta) = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

$$\Rightarrow \det \nabla \Phi(\rho, \theta) = \rho > 0$$

ESEMPIO

PRENDIAMO LA REGIONE

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \in (1, 4), x > 0, y > 0\}$$



$$\equiv = \rho \in (1, 2)$$

$$\text{III} = \rho \in (1, 2)$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$\text{SE } x^2 + y^2 \in (1, 4)$$

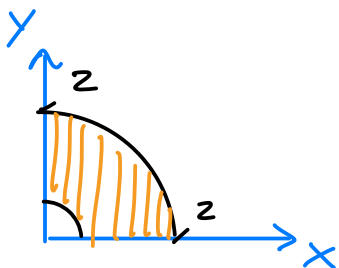
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in (1, 2)$$

$$\Rightarrow \rho \in (1, 2)$$

QUINDI III È L'INSIEME E

ORA SE CALCOLIAMO LA MISURA DI PEAANO-JORDAN, HO:

$$\int_E 1 \, dx \, dy$$



USIAMO LE COORDINATE POLARI PERCHÉ È PIÙ FACILE.

$$\text{L'INSIEME } \Phi^{-1}(E) = \left\{ (\rho, \theta) : \begin{array}{l} \rho \in (1, 2) \\ \theta \in (0; \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_E 1 \, dx \, dy =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(\rho, \theta)| \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} d\theta = \\
&= \frac{3}{2} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi
\end{aligned}$$

INFATTI AREA DEL CERCHIO DI $r=2$ È 4π

AREA DEL CERCHIO DI $r=1$ È π

$\Rightarrow$ AREA DELL'ANELLO $4\pi - \pi = 3\pi$

$\Rightarrow$ AREA DELL'ANELLO RISTRETTO AL PRIMO QUADRANTE $\frac{3}{4}\pi$

DEFINIZIONE

ORA DEFINIAMO LE COORDINATE CILINDRICHE

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ψ
 x

ψ
 y

ψ
 z

ESPRIMO x E y IN COORDINATE POLARI, CIOÈ:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{DOVE} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{LO STESSO DI PRIMA} \end{cases}$$

PER ESPRIMERE z USO z STESSO, CIOÈ

$$z = z$$

$\Rightarrow$ LE NUOVE COORDINATE SONO (ρ, θ, z)

DOVE $\rho \in (0; +\infty)$, $\theta \in [0; 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$

LA MAPPA DI CAMBIO DI VARIABILE È:

$$\Phi: (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (x, y) = (0, 0) \right\} \\ \left. \begin{array}{c} z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

$$\nabla \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Phi_1 = \rho \cos \theta \\ \Phi_2 = \rho \sin \theta \\ \Phi_3 = z \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \nabla \Phi(\rho, \theta, z) = \rho$$

ESEMPIO

PRENDIAMO E , IL SOLIDO OTTENUTO

INTERSECANDO IL CONO DI EQUAZIONE

$z^2 < x^2 + y^2$ E IL CILINDRO DI EQUAZIONE

$x^2 + y^2 < 2x$ E CALCOLIAMONE IL VOLUME,

CIOÈ $m(E)$

SE CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $x^2 + y^2 = 2x$
↓
CONICA

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$$

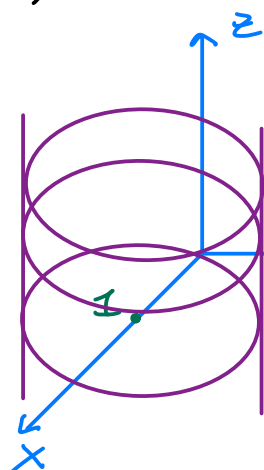
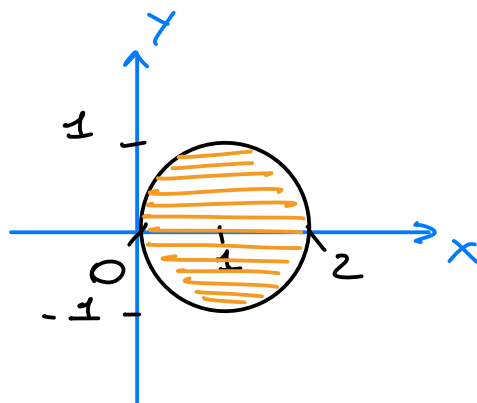
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$\Rightarrow$ DESCRIVE LA

CIRCONFERENZA DI CENTRO

$x=1, y=0$ E RAGGIO $=1$.



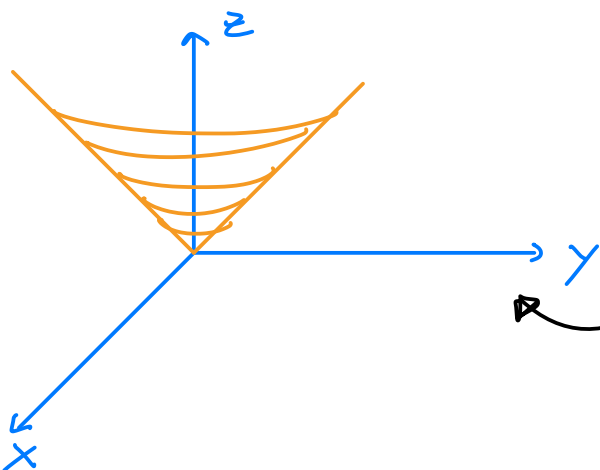
$\rightarrow$ QUESTO CILINDRO È L'INSIEME

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2x, z \in \mathbb{R}\}$$

ORA GUARDIAMO $z^2 < x^2 + y^2$

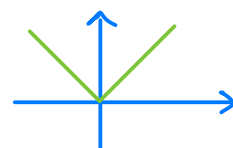
CONSIDERO LA FUNZIONE $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = g$

$\Rightarrow \{z = \sqrt{x^2 + y^2}\} =$ GRAFICO DELLA FUNZIONE
 $g(x, y), z = g(x, y)$



LA FUNZIONE $|x|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

HA COME GRAFICO



$\rightarrow$ QUINDI QUESTO

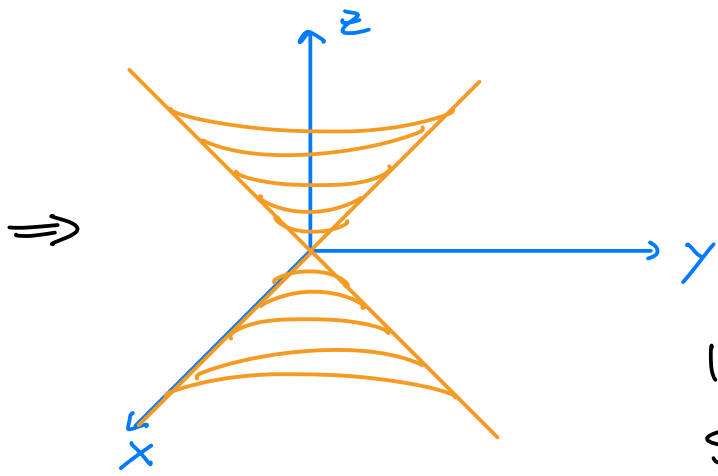
È IL CASO 3D DI $|x|$

INFATTI HO CONSIDERATO

$|g(x, y)|$

$\Rightarrow$ L'INSIEME $z^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow -\sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{x^2 + y^2}$



L'INSIEME

$$\{z^2 < x^2 + y^2\}$$

CORISPONDE A TUTTI

I PUNTI IN $\mathbb{R}^3$ CHE

STANNO SOTTO IL CONO

SUPERIORE E SOPRA

QUELLO INFERIORE

ORA CHIAMO

$$A = \{x^2 + y^2 < 2x\}$$

$$B = \{z^2 < x^2 + y^2\}$$

$$\Rightarrow m(E) = m(A \cap B)$$

IN COORDINATE CILINDRICHE SAPPIAMO CHE

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \rho^2 \\ x = \rho \cos \theta \end{cases}$$

QUINDI L'INSIEME A DIVENTA

$$\Phi^{-1}(A) = \{(\rho, \theta, z) : \rho^2 < 2\rho \cos^2 \theta\} =$$

$$= \{(\rho, \theta, z) : \rho < 2 \cos^2 \theta\} =$$

$$= \left\{(\rho, \theta, z) : \begin{aligned} &\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ &\rho < 2 \cos^2 \theta \end{aligned} \right\}$$

QUINDI
 $\cos \theta$
DEVE
ESSERE > 0

B DIVENTA

$$\Phi^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, z) : z^2 < \rho^2\} = \{(\rho, \theta, z) : |z| < \rho\} =$$

$$= \{(\rho, \theta, z) : -\rho < z < \rho\}$$

ORA POSSO FARE L'INTEGRALE

$$\int_E 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Phi^{-1}(E)} | \det \nabla \Phi(\rho, \theta, z) | \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

DOVE $\Phi^{-1}(E) = \Phi^{-1}(A) \cap \Phi^{-1}(B) =$

$$= \left\{ (\rho, \theta, z) : \rho < 2 \cos \theta, \theta \in [-\pi/2, \pi/2], \right. \\ \left. -\rho < z < \rho \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{\Phi^{-1}(E)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_{-\rho}^{\rho} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta =$$

RICORDA: NEL TEOREMA DI FUBINI L'ORDINE È
IMPORTANTE MA CI SONO DELLE IPOTESI PER
CUI NON LO È

ABBIAMO USATO QUEST'ORDINE PERCHÉ:

$$\int_{-\rho}^{\rho} = g(\rho)$$

SE AVESSI FATTO QUESTO:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\rho}^{\rho} \int_0^{2\cos\theta} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta \quad \text{NON SAREBBE GIUSTO}$$

PERCHÉ ALLA FINE AUREI UN QUALCOSA CHE DIPENDE DA ρ .

PER POTER CAMBIARE L'ORDINE DEVO CAMBIARE GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_{-\rho}^{\rho} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \left(\rho \int_{-\rho}^{\rho} 1 \, dz \right) d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} 2\rho^2 \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\rho^3 \right]_{\rho=0}^{\rho=2\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \cos^3\theta \, d\theta = \frac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta$$

$$\text{CHIAMO } s = \sin\theta \Rightarrow \cos\theta = (1 - s^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \cos^3\theta = (1 - s^2)^{3/2}$$

QUINDI

$$ds = \cos \theta \, d\theta = (1 - s^2)^{1/2} \, d\theta$$

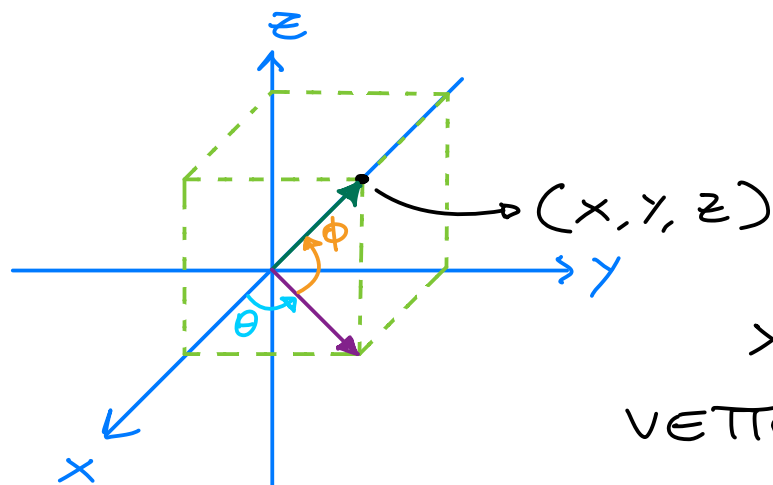
$$\text{INFINE } \theta \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow s \in [-1, 1]$$

PERCIÒ:

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta &= \frac{16}{3} \int_{-1}^1 \frac{(1 - s^2)^{3/2}}{(1 - s^2)^{1/2}} \, ds = \\ &= \frac{16}{3} \int_{-1}^1 (1 - s^2) \, ds = \frac{16}{3} \left[s - \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{16}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right\} = \frac{64}{9} \end{aligned}$$

DEFINIZIONE

ORA DEFINIAMO LE COORDINATE SFERICHE.



L'ANGOLO θ È
L'ANGOLO FORMATO
TRA L'ASSE DELLE
X POSITIVE E IL

VETTORE $(x, y, 0)$ DOVE
 $(x, y, 0)$ È LA PROIEZIONE DI
 (x, y, z) NEL PIANO (x, y) .

L'ANGOLO ϕ INVECE È QUELLO FORMATO TRA
IL VETTORE (x, y, z) E IL VETTORE $(x, y, 0)$

INFINE $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ È LA LUNGHEZZA
DEL VETTORE (x, y, z)

$$\Rightarrow \theta \in [0; 2\pi) , \phi \in (-\pi/2; \pi/2)$$

QUINDI:

$\Phi: (r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$ PER RENDERLA
INIETTIVA DEVO
ESCLUDERE L'ASSE Z

$$\Rightarrow \Phi: (0; +\infty) \times [0; 2\pi) \times (-\pi/2; \pi/2) \\ \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{ (x, y) = (0, 0), z \in \mathbb{R} \}$$

CHIAMO

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \Phi_1(r, \theta, \phi) = x = r \cos \phi \cos \theta \\ \Phi_2(r, \theta, \phi) = y = r \cos \phi \sin \theta \\ \Phi_3(r, \theta, \phi) = z = r \sin \phi \end{cases}$$

TRIGONOMETRIA

$$\Rightarrow \nabla \Phi(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \phi} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \nabla \Phi(r, \theta, \phi) =$$

$$= \sin \phi [r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + r^2 \cos^2 \theta \cos \phi \sin \phi] + r \cos \phi [r \cos^2 \phi \cos^2 \theta + r \cos^2 \phi \sin^2 \theta] =$$

$$= r^2 \sin \phi [\cos \phi \sin \phi] + r^2 \cos \phi [\cos^2 \theta] =$$

$$= r^2 \left\{ \sin^2 \phi \cos \phi + \cos \phi \cos^2 \phi \right\} =$$

$$= r^2 \cos \phi \left\{ \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right\} = r^2 \cos \phi$$

ESEMPIO

CALCOLIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO IN $\mathbb{R}^3$

OTTENUTO DALL'INTERSEZIONE DEL CONO

$$\{x^2 + y^2 < z^2\} \text{ E DALLA SFERA}$$

$$\{x^2 + y^2 + z^2 < 2z\}$$

PER CAPIRE CHE È UNA SFERA SCRIVO

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z < 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 < 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 < 1$$



$$\text{È LA } \text{dist}^2((x, y, z), (0, 0, 1)) =$$

$$= |(x, y, z) - (0, 0, 1)|^2 =$$

$$= |(x, y, z-1)|^2 < 1$$

QUESTI SONO I PUNTI INTERNI DI UNA SFERA

DI RAGGIO 1 E CENTRO IN $(0, 0, 1)$

QUINDI PER LA SFERA HO:

$$\{x^2 + y^2 + z^2 < 2z\} \Rightarrow \{z^2 < 2z \sin \phi\} \\ \Rightarrow \{z < 2 \sin \phi\}$$

E PER IL CONO HO:

$$\{x^2 + y^2 < z^2\} \Rightarrow \{z^2 \cos^2 \phi < z^2 \sin^2 \phi\}$$

z SEMPRE $> 0 \Rightarrow \{\cos^2 \phi < \sin^2 \phi\}$

DATO CHE $\phi \in (-\pi/2; \pi/2) \Rightarrow \cos \phi > 0 \quad \forall \phi$

$$\Rightarrow \{\cos \phi < |\sin \phi|\}$$

ORA CERCO I ϕ TALI CHE $\cos \phi < |\sin \phi|$

QUINDI, CERCO I $\phi \in (-\pi/2; \pi/2)$ TALI CHE:

$$\begin{cases} \sin \phi > \cos \phi \\ \sin \phi < -\cos \phi \end{cases}$$

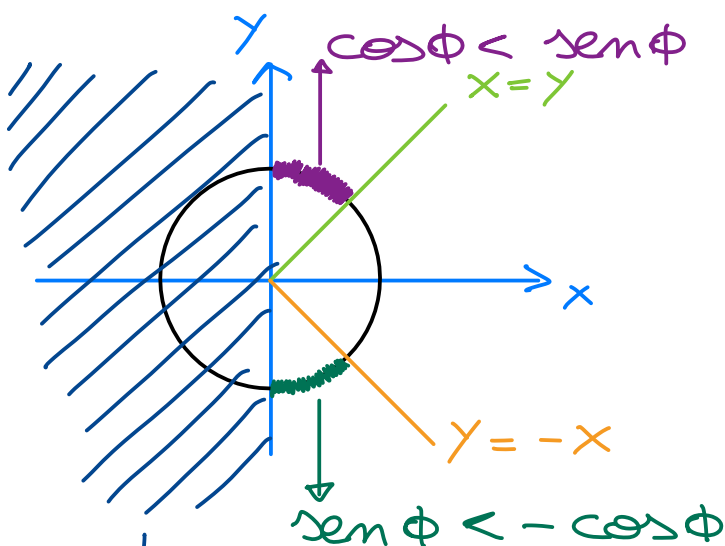
GRAZIE ALLA

TRIGONOMETRIA SO CHE:

$$\cos \phi = x \quad \text{E} \quad \sin \phi = y$$

SULLA CIRCONFERENZA

UNITARIA



ESCLUDO QUESTI

QUADRANTI PERCHÉ $\phi \in (-\pi/2; \pi/2)$

ORA DEVO CERCARE I PUNTI TALÌ CHE

$$\begin{cases} \sin \phi < -\cos \phi \\ \sin \phi > \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -x \\ y > x \end{cases}$$

QUINDI POSSO SCRIVERE

$$|\sin \phi| > \cos \phi \Leftrightarrow \phi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{CONO} = \left\{ (r, \theta, \phi) : \phi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\text{SFERA} = \left\{ (r, \theta, \phi) : r < r \sin \phi \right\}$$

QUINDI

$$\int_{E = \text{CONO} \cap \text{SFERA}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi| \, dz \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} r^2 \cos^2 \phi \, dz \, d\theta \, d\phi =$$

$$= \text{CONO} \cap \text{SFERA} = \left\{ (r, \theta, \phi) : r < r \sin \phi, \phi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

↓
HO ESCLUSO

L'ALTRO INTERVALLO PERCHÉ
QUELLO PRIMA MI DICE
CHE $\phi > 0$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \phi} r^2 \cos^2 \phi \, dz \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\phi} z^2 \cos^2\phi \, dz \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\phi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=2\sin\phi} d\phi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8}{3} \cos^2\phi \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^4\phi}{4} \right]_{\phi=\pi/4}^{\phi=\pi/2} d\theta =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \frac{3}{16} d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

DEFINIZIONE

SUPPONIAMO $E \subseteq \mathbb{R}^m$ ILLIMITATO E SIA g UNA FUNZIONE ≥ 0 SU E ED INTEGRABILE SULL'INSIEME $E \cap B_R(0) \, \forall R > 0$

$\Rightarrow$ DIRO CHE g È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SU E SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} g(x) \, dx$$

E CHIAMO:

$$\int_E g(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} g(x) dx$$

OSSERVAZIONE

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} g(x) dx$ ESISTE SEMPRE PERCHÉ
ESSENDO $g > 0$, HO CHE $R > R' > 0$

$$\Rightarrow \int_{E \cap B_R(0)} g(x) dx > \int_{E \cap B_{R'}(0)} g(x) dx$$

PUÒ ACCADERE CHE IL LIMITE SIA $+\infty$ MA
ESISTE SEMPRE PERCHÉ:

$$R \mapsto \int_{E \cap B_R(0)} g(x) dx \text{ È NON DECRESCENTE}$$

DEFINIZIONE

SUPPONIAMO $g \geq 0$ SU UN INSIEME E LIMITATO
E SUPPONIAMO $\bar{x}$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE
DI E .

SUPPONIAMO CHE g SIA INTEGRABILE SU
 $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x}) \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ SE ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} g(x) dx$$

DICO CHE g È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

SU $\mathbb{E}$ E SCRIVO:

$$\int_{\mathbb{E}} f(x) dx = \lim_{z \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{E} \setminus B_z(0)} f(x) dx$$

DEFINIZIONE

DICO CHE f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO SU $\mathbb{E}$ SE f^+ E f^- SONO INTEGRABILI IN SENSO IMPROPRIO.

DOVE f^+ È LA PARTE POSITIVA DI f

$$\text{CIOÈ } f^+ = \max\{0, f(x)\}$$

f^- È LA PARTE NEGATIVA DI f

$$\text{CIOÈ } f^- = \max\{0, -f(x)\}$$

SE f È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

DEFINISCO:

$$\int_{\mathbb{E}} f(x) dx = \int_{\mathbb{E}} f^+ dx - \int_{\mathbb{E}} f^- dx$$

ESERCIZIO PER CASA

PROVARE E DIRE SE

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \text{ È FINITO O NO}$$

CIOÈ DIRE SE $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{z \rightarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_z(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

LEZIONE #14 14/04/23

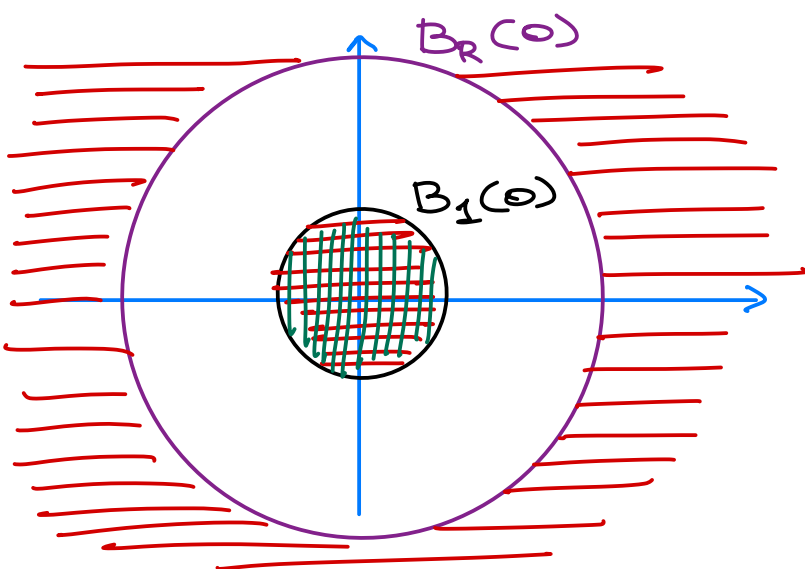
ESEMPIO

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy \quad \text{DOVE } \alpha > 0 \in \mathbb{R}$$

DIRE PER QUALI α LA FUNZIONE $g(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ RISULTA INTEGRABILE SU $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$

PER FARLO DOBBIAMO:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)) \cap B_R(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy =$$



DOBBIAMO ESCLUDERE
QUESTO $\equiv$ E
CONSIDERARE L'ANELLO
DI RAGGIO INTERNO 1
ED ESTERNO R

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \setminus B_1(0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dx dy$$

PASSO ALLE COORDINATE POLARI:

$$\rho = (x^2+y^2)^{1/2}, \quad \theta \in [0; 2\pi)$$

↓
RAPPRESENTA LA DISTANZA DEL PUNTO
DALL'ORIGINE

$$\Rightarrow B_R(0) \setminus B_1(0) = \left\{ (r, \theta) : \begin{array}{l} r \in (1, R) \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{(1, R) \times [0, 2\pi)} \frac{1}{r^{2\alpha}} r \, dr \, d\theta =$$

↓
|det DELLA MAPPA|

LO ABBIAMO FATTO PRIMA

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^R r^{1-2\alpha} \, dr \, d\theta$$

NOTARE CHE

$$\int r^{1-2\alpha} \, dr = \begin{cases} \frac{1}{2-2\alpha} r^{2-2\alpha} & \text{SE } 1-2\alpha \neq -1 \\ \log r & \text{SE } 1-2\alpha = -1 \end{cases}$$

NEL CASO $1-2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -1$

$$\int_0^{2\pi} \int_1^R r^{-1} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \log r \Big|_1^R \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \log R \, d\theta = 2\pi \log R$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\pi \log R = +\infty$$

OVVERO

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \setminus B_1(0)} \frac{1}{(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = +\infty$$

RISULTA CHE $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ NON RISULTA
INTEGRABILE QUANDO $\alpha = -1$

NEL CASO $1-2\alpha \neq -1 \Rightarrow \alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2-2\alpha} \rho^{2-2\alpha} \right]_{\rho=1}^{\rho=R} d\theta &= \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2-2\alpha} (R^{2-2\alpha} - 1^{2-2\alpha}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2-2\alpha} \int_0^{2\pi} R^{2-2\alpha} - 1 d\theta = \\ &= \frac{1}{2-2\alpha} \cdot 2\pi (R^{2-2\alpha} - 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-2\alpha} \cdot 2\pi (R^{2-2\alpha} - 1) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2\pi}{2-2\alpha} & \text{SE } 2-2\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ +\infty & \text{SE } \alpha < 1 \end{cases}$$

CONCLUDIAMO CHE $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ È
INTEGRABILE IN $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0) \iff \alpha > 1$

DEFINIZIONE

SIA $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^n$

CONSIDERIAMO $\forall m \in \mathbb{N}$ UNA FUNZIONE $f_m: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

DICIAMO CHE LA SUCC. $f_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ CONVERGE PUNTUALMENTE AD UNA FUNZIONE $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ SE $\forall x \in \mathbb{E}$ SI HA CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$

ESEMPIO

PRENDIAMO $f_n: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ DATE DA $f_n = x^n$ QUINDI

$$f_n(x) = x^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{SE } x < 1 \\ 1 & \text{SE } x = 1 \\ +\infty & \text{SE } x > 1 \end{cases}$$

LE FUNZIONI $f_n: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ NON CONVERGE PUNTUALMENTE A NESSUNA FUNZIONE $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

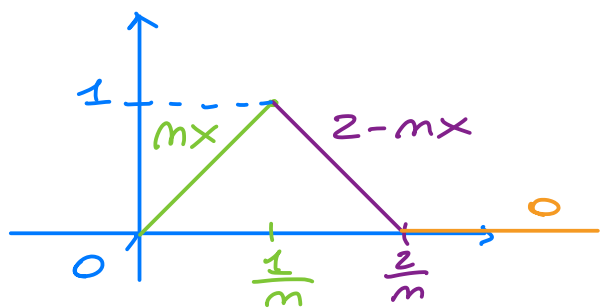
MA SE CONSIDERO L'INTERVALLO $[0; 1]$
 $\Rightarrow f_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE A $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x < 1 \\ 0 & \text{SE } x = 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

$f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ DATE DA

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{SE } x \in [0, 1/n) \\ 2-nx & \text{SE } x \in [1/n, 2/n) \\ 0 & \text{SE } x \in [2/n, 1] \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

PERCHÉ:

$$\text{SE } x=0, f_n(x)=0 \quad \forall n \Rightarrow \lim f_n = 0$$

$$\text{SE } x>0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \frac{2}{\bar{n}} < x$$

$$\Rightarrow \forall n \geq \bar{n} \text{ HO CHE } \frac{2}{n} < x$$

$$\Rightarrow f_n(x)=0 \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)=0 \quad \forall x>0$$

$\Rightarrow$ LE FUNZIONI $f_n(x) \rightarrow f(x)=0$ PUNTUALMENTE
SU $[0, 1]$

OSSERVAZIONE

$f_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ CONVERGONO PUNTUALMENTE AD

$f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{E} \text{ HO CHE:}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}: n \geq m, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

DEFINIZIONE

SIA $f_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ ED $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_n$ CONVERGONO UNIFORMEMENTE A f SU $\mathbb{E}$ SE:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq m, \forall x \in \mathbb{E}$$

OSSERVAZIONE

LA DIFFERENZA TRA L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE
E QUESTA DEFINIZIONE STA NELLA POSIZIONE DEL

" $\forall x \in \mathbb{E}$ ". NEL PRIMO CASO FA SI CHE m DIPENDA DA ε E DA x , E LO INDICHIAMO CON $m(\varepsilon, x)$. NEL SECONDO m DIPENDE SOLO DA ε E SI INDICA CON $m(\varepsilon)$.

OSSERVAZIONE

SE $f_m \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE $\Rightarrow f_m \rightarrow f$ PUNTUALMENTE
INFATTI

$\forall \varepsilon > 0, \exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m > m(\varepsilon), |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$
SE $x \in \mathbb{E}$
 $\Leftrightarrow f_m(x) \rightarrow f(x)$ SE $x \in \mathbb{E}$

OSSERVAZIONE

CONVERGENZA PUNTUALE DI $f_m \rightarrow f$ NON IMPLICA NECESSARIAMENTE CHE $f_m \rightarrow f$ CONVERGE UNIFORMEMENTE.

ESEMPIO

$$f_m(x) = \begin{cases} mx & \text{SE } 0 \leq x < 1/m \\ 2 - mx & \text{SE } 1/m \leq x < 2/m \\ 0 & \text{SE } x \geq 2/m \end{cases}$$

SAPPIAMO GIÀ CHE $f_m \rightarrow f$ PUNTUALMENTE A $f = 0$ COSTANTE.

VERIFICHIAMO CHE $f_m \not\rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

SE CONVERGESSE UNIFORMEMENTE AVREI

$\forall \varepsilon > 0, \exists m(\varepsilon): |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall m > m(\varepsilon)$

PER ESEMPIO, DOVREBBE ESISTERE CHE:

$\exists m\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{N}$, TALE CHE $\forall m > m(1/2)$,
 $|f_m(x) - f(x)| < 1/2$
 $\forall x \in [0, 1]$

TUTTAVIA SI HA CHE PER $x = 1/m$, $f_m(x) = 1$
 E QUINDI $|f_m(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1 < \frac{1}{2}$
 NO

ESEMPIO

CONSIDERIAMO LE FUNZIONI $f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 DEFINITE DA:

$$f_m(x) = \frac{m^2 + 1}{m^2} x$$

CI ACCORGIAMO SUBITO CHE $f_m(x) \rightarrow f(x) = x$
 PUNTUALMENTE SU $[0, 1]$

PER VERIFICARE QUELLA UNIFORME DEVO
 DIMOSTRARE CHE:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m(\varepsilon) > 0: |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq m(\varepsilon) \\ \forall x \in [0, 1]$$

QUINDI:

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{m^2 + 1}{m^2} x - x \right| =$$

$$= \left| x \left(\frac{m^2 + 1}{m^2} - 1 \right) \right| = \left| x \left[\frac{m^2 + 1 - m^2}{m^2} \right] \right| =$$

$$= \left| x \cdot \frac{1}{m^2} \right|$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1], |f_m(x) - f(x)| \leq |x| \cdot \frac{1}{m^2}$$

$$\leq \frac{1}{m^2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

↑
 IN QUESTO CASO $\varepsilon =$

VISTO CHE LA SUCC. $\frac{1}{m^2} \rightarrow 0$ PER $m \rightarrow +\infty$

HO CHE:

$\forall \varepsilon > 0, \exists m(\varepsilon):$ SE $m \geq m(\varepsilon)$ HO $\frac{1}{m^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in [0, 1], |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

DEFINIZIONE

DEFINIAMO LA SEGUENTE QUANTITÀ

DATA $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{E}} \{|f(x)|\}$$

ED È FACILE VERIFICARE CHE

$$\|f\|_{\infty} > 0 \quad \forall f$$

$$\|f\|_{\infty} = 0 \iff f \equiv 0$$

$$\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \quad \forall f, g$$

IN PARTICOLARE $\|f - g\|_{\infty}$ DEFINISCE UNA DISTANZA
TRA f E g .

TEOREMA

SIANO $f_m: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ E $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI

$\Rightarrow f_m \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE $\iff \|f_m - f\|_{\infty} \rightarrow 0$
PER $m \rightarrow +\infty$

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO $\|f_m - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ PER $m \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m: \|f_m - f\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall m \geq m$

RICORDIAMO LA DEFINIZIONE:

$$\|g_m(x) - g(x)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{E}} \{ |g_m(x) - g(x)| \}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{E}, |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

QUINDI $g_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

VICEVERSA SUPPONIAMO $g_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0: |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

$$\forall x \in \mathbb{E}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{E}} \{ |g_m(x) - g(x)| \} \leq \varepsilon$$

↳ L'UGUALE C'È PERCHÉ
È UN SUP E NON MAX

$$\Rightarrow \|g_m(x) - g(x)\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m: \|g_m(x) - g(x)\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

$$\Leftrightarrow \|g_m(x) - g(x)\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{PER } m \rightarrow +\infty$$

OSSERVAZIONE

SE $\mathbb{E}$ È COMPATTO E g_m E g SONO CONTINUE

$$\Rightarrow \|g_m(x) - g(x)\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{E}} |g_m(x) - g(x)|$$

TEOREMA

SUPPONIAMO $g_m: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI CONTINUE SU $\mathbb{E}$

E SUPPONIAMO $g_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{E}$

$\Rightarrow g$ È CONTINUA SU $\mathbb{E}$

DIMOSTRAZIONE

SAPPIAMO CHE $g_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

$$\Rightarrow \forall \varepsilon, \exists m: \|g_m - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \geq n$$

SIA $x \in \mathbb{E}$, LA FUNZIONE g_m È CONTINUA IN $x \in \mathbb{E}$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : |g_m(x) - g_m(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_\delta(x)$

EQUIVALENTEMENTE $\Downarrow$
($\forall y, |y-x| < \delta$)

CONSIDERO:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \\ &= |g(x) - g_m(x) + g_m(x) - g_m(y) + g_m(y) - g(y)| \\ \text{CON LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE HO:} \\ &\leq |g(x) - g_m(x)| + |g_m(x) - g_m(y)| \\ &\quad + |g_m(y) - g(y)| \end{aligned}$$

$$\leq \|g - g_m\|_\infty + |g_m(x) - g_m(y)| + \|g_m - g\|_\infty$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + |g_m(x) - g_m(y)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{SE } |x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)|$$

$\Rightarrow g$ È CONTINUA IN x

TEOREMA

SIANO $g_m: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN.

SUPPONIAMO $g_m \rightarrow g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ UNIFORMEMENTE

$\Rightarrow g$ È INTEGRABILE E SI HA ANCHE:

$$\int_{\mathbb{E}} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} g_n(x) dx$$

OSSERVAZIONE

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ È INTEGRABILE

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ INTEGRABILI TALI CHE

$h \leq f \leq g$ SU E E

$$\int_E g dx - \int_E h dx < \varepsilon$$

DIMOSTRAZIONE DELL'OSSERVAZIONE

ESSENDO $h \in g$ INTEGRABILI, HO:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \psi \leq h \leq \phi \in \exists \hat{\psi} \leq g \leq \hat{\phi}$

CON $\psi, \hat{\psi}, \phi, \hat{\phi}$ SEMPLICI TALI CHE:

$$\int_E \phi - \int_E \psi < \varepsilon \quad \in \quad \int_E \hat{\phi} - \int_E \hat{\psi} < \varepsilon$$

QUINDI SE $h \leq f \leq g \Rightarrow \psi \leq f \leq \hat{\phi}$

$$\Rightarrow \int_E \hat{\phi} - \int_E \psi = \int_E \hat{\phi} - \int_E \hat{\psi} \geq$$

$$= \int_E \hat{\phi} - \int_E g + \int_E g - \int_E h + \int_E h - \int_E \psi$$

MA

$$\int_E \hat{\phi} - \int_E g \leq \int_E \hat{\phi} - \int_E \hat{\psi} < \varepsilon \quad *$$

$$\int_E g - \int_E h < \varepsilon \quad \text{PER IPOTESI}$$

$$\int_{\mathbb{E}} R - \int_{\mathbb{E}} \psi \leq \int_{\mathbb{E}} \phi - \int_{\mathbb{E}} \psi < \varepsilon$$

* PER UN'OSSERVAZIONE GIÀ

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{E}} \hat{\phi} - \int_{\mathbb{E}} \psi < 3\varepsilon$$

FATTA:

$$\int \hat{\phi} - \int \phi < \frac{\varepsilon}{2} \in \int \phi - \int \hat{\psi} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ABBIAMO MOSTRATO CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists$ FUNZIONI SEMPLICI

$\hat{\phi} \geq \phi \geq \psi$ TALI CHE:

$$\int_{\mathbb{E}} \hat{\phi} - \int_{\mathbb{E}} \psi < 3\varepsilon \Rightarrow \text{VISTO CHE } \varepsilon \text{ È ARBITRARIO, } \phi \text{ È INTEGRABILE}$$

VICEVERSA SE ϕ È INTEGRABILE, ESISTONO

FUNZIONI INTEGRABILI R, ϕ CON $R \leq \phi \leq \phi$ E

$$\int_{\mathbb{E}} \phi \, dx - \int_{\mathbb{E}} R \, dx < \varepsilon$$

BASTA PRENDERE $R = \phi = \phi$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

ϕ_m STANNO CONVERGENDO UNIFORMEMENTE A ϕ ,

CIOÈ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m > 0: |\phi_m(x) - \phi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{E}, \forall m \geq n$$

$$\Rightarrow \phi_m(x) - \phi(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \phi_m(x) - \varepsilon < \phi(x)$$

SIMILMENTE HO CHE

$$\phi(x) - \phi_m(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \phi(x) < \phi_m(x) + \varepsilon \quad \forall m \geq n$$

ORA CHIAMO $R(x) = f_m(x) - \varepsilon$

$$Q(x) = f_m(x) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow R(x) \leq f(x) \leq Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{E}$$

DOVE HO FISSATO $m \geq n$

R È INTEGRABILE (PERCHÉ LO ERA f_m)

Q È INTEGRABILE (STESSO MOTIVO)

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{E}} Q \, dx - \int_{\mathbb{E}} R \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{E}} (f_m + \varepsilon) \, dx - \int_{\mathbb{E}} (f_m - \varepsilon) \, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{E}} f_m \, dx + \int_{\mathbb{E}} \varepsilon \, dx - \int_{\mathbb{E}} f_m \, dx + \int_{\mathbb{E}} \varepsilon \, dx =$$

$$= 2\varepsilon \int_{\mathbb{E}} dx = 2\varepsilon m(\mathbb{E})$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists R, Q$ INTEGRABILI
TALI CHE $R < f < Q$ SU $\mathbb{E}$ E

$$\int_{\mathbb{E}} Q \, dx - \int_{\mathbb{E}} R \, dx < 2\varepsilon m(\mathbb{E})$$

PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE, f È
INTEGRABILE

ORA DIMOSTRIAMO LA FORMULA

$$\int_{\mathbb{E}} f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{E}} f_m(x) \, dx$$

QUINDI VOGLIO FAR VEDERE CHE

$$\left| \int_E f(x) dx - \int_E f_n(x) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{PER } n \rightarrow +\infty$$

QUINDI

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f(x) dx - \int_E f_n(x) dx \right| = \\ & = \left| \int_E (f - f_n) dx \right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)| dx \\ & \leq \int_E \underbrace{\|f - f_n\|_\infty}_{\substack{\text{NON DIPENDE DA } x}} dx = \\ & = \|f - f_n\|_\infty \cdot m(E) \end{aligned}$$

VISTO CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE HO CHE:

$$\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$$

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE

TEOREMA

SIA $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI DI CLASSE

$C^1([a, b])$ E SUPPONIAMO CHE $f_n \rightarrow f$

UNIFORMEMENTE E CHE $f'_n \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

$\Rightarrow f$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$ E $f' = g$

DIMOSTRAZIONE

UTILIZZIAMO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL

CALCOLO INTEGRALE CHE CI DICE CHE

$$f_m(x) - f_m(a) = \int_a^x f'_m(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

IL TEOREMA PRECEDENTE CI DICE CHE g ESSENDO LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI INTEGRABILI (f'_m), È INTEGRABILE.

INOLTRE g È CONTINUA PERCHÉ LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE.

INOLTRE:

$$\int_a^x f'_m(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

D'ALTRO CANTO SO CHE $f_m(x) \rightarrow g(x)$ E $f_m(a) \rightarrow g(a)$ PERCHÉ $f_m \rightarrow g$

UNIFORMEMENTE E QUINDI ANCHE PUNTUALMENTE

PASSANDO AL LIMITE IN QUESTA FORMULA:

$$f_m(x) - f_m(a) = \int_a^x f'_m(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

OTTENGO

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g(t) dt$$

E PERCIÒ IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE DICE CHE $g' = g$

LEZIONE #15 18/04/23

RICORDA:

$$f_m \rightarrow f \text{ UNIFORME} \Leftrightarrow \|f - f_m\|_\infty \rightarrow 0 \text{ PER } m \rightarrow +\infty$$

OSSERVAZIONE

$$\text{SE } f \text{ È LIMITATA} \Rightarrow \|f - f_m\|_\infty < +\infty$$

RICORDA:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{E}} |f(x)|$$

SE $f_m \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE ED f È LIMITATA NEL

$$\text{DOMINIO } \mathbb{E} \Rightarrow \|f\|_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m\|_\infty$$

IN PARTICOLARE, ESSENDO IL LIMITE A DESTRA $< +\infty$

$$\text{ANCHE } \|f_m\|_\infty < +\infty \text{ PER } m > \bar{m} \Leftrightarrow f_m \text{ È LIMITATA} \\ \text{PER } m \geq \bar{m}$$

$$\text{DIMOSTRAZIONE CHE } \|f\|_\infty = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m\|_\infty$$

DA UNA PARTE HO CHE PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_m\|_\infty + \|f_m\|_\infty$$

QUINDI POSSO PASSARE AL $\liminf_{m \rightarrow +\infty}$ NEL MEMBRO DI DESTRA

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|f_m\|_\infty \quad (1)$$

D'ALTRA PARTE, SEMPRE PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

$$\|f_m\|_\infty \leq \|f - f_m\|_\infty + \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f_m\|_\infty - \|f - f_m\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

PASSO AL $\limsup$ AL MEMBRO DI SINISTRA.

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty} \quad (2)$$

USANDO 1 E 2 HO:

$$\|g\|_{\infty} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|g\|_{\infty} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|g\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty}$$

DEFINIZIONE

SIA $E \subseteq \mathbb{R}^n$

DEFINISCO LA CLASSE $C(E) = \{g: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ sono CONTINUE E LIMITATE}\}$

OSSERVAZIONE

SI VERIFICA SUBITO CHE $\|g\|_{\infty}$ È UNA NORMA
SULLO SPAZIO VETTORIALE SU $C(E)$

TEOREMA

LO SPAZIO $C(E)$ È COMPLETO

RICORDA:

E È COMPLETO $\Leftrightarrow$ OGNI SUCC. DI CAUCHY È
CONVERGENTE

RICORDA:

LA $\|\cdot\|_{\infty}$ INTRODUCE UNA DISTANZA TRA LE
FUNZIONI: $d(g, g) = \|g - g\|_{\infty}$

VISTO CHE $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$\Rightarrow d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

OSSERVAZIONE

SIA $g_n \in C(\mathbb{E})$ DI CAUCHY

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0: d(g_n, g_m) = \|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon$

$\forall n, m > n_\varepsilon$

g_n DI CAUCHY È CONVERGENTE SE $\exists g \in C(\mathbb{E})$

TALE CHE $g_n \rightarrow g \in C(\mathbb{E})$

$\Leftrightarrow d(g_n, g) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ PER $n \rightarrow +\infty$

DIMOSTRAZIONE

SIA g_n SUCC. DI CAUCHY

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0: \|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$

MA

$$\|g_n - g_m\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{E}} \{ |g_n(x) - g_m(x)| \} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

FISSATO $x \in \mathbb{E}$, HO CHE:

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

OVERO LA SUCC. $g_n \in \mathbb{R}$ È DI CAUCHY E QUINDI È CONVERGENTE IN $\mathbb{R}$ CHE ERA DI CAUCHY GIÀ SI

CHIAMO IL LIMITE $g(x)$ SAPEVA, MA LA CONV. È DATA DAL MODULO

$$g_n(x) \rightarrow g(x) \text{ PER } n \rightarrow +\infty$$

QUINDI $g_n \rightarrow g$ PUNTUALMENTE SU $\mathbb{E}$

TORNANDO AD:

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \|g_n - g_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

HO CHE $\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon > 0$ PER CUI $\forall x \in \mathbb{E}$ HO:

$$|f_m(x) - f_{m_\varepsilon}(x)| < \varepsilon \quad \forall m, m \geq m_\varepsilon$$

ESSENDO $m \rightarrow +\infty \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{E}$
 $\forall m \geq m_\varepsilon$

FACCIO IL SUP NEL MEMBRO DI SINISTRA:

$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{E}} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_\varepsilon$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon > 0: \|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_\varepsilon$$

CHE È LA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA UNIFORME
DI $f_m \rightarrow f$.

PER CUI $f_m \rightarrow f$ UNIFORME E f_m SONO
CONTINUE QUINDI ANCHE f È CONTINUA PERCHÉ
LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE.

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE SE $f_m(x)$ È DI CAUCHY
IN $C(\mathbb{E}) \Rightarrow f_m \rightarrow f$ CONTINUA

CI MANCA DA DIMOSTRARE CHE f È LIMITATA PER
CONCLUDERE CHE $f \in C(\mathbb{E})$, CIOÈ:

$$\|f\|_\infty \leq \|f_m - f\|_\infty + \|f_m\|_\infty \quad \forall m$$

$$\text{MA } f_m \text{ È LIMITATA} \Rightarrow \|f_m\|_\infty < +\infty$$

$$\text{E HO ANCHE CHE } \|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|f_{m_\varepsilon} - f\|_\infty + \|f_{m_\varepsilon}\|_\infty \leq \varepsilon + \|f_{m_\varepsilon}\|_\infty < +\infty$$

$$\Rightarrow f \text{ È LIMITATA}$$

$$\Rightarrow f \in C(\mathbb{E})$$

OSSERVAZIONE

GRAZIE ALL'OSSERVAZIONE PRECEDENTE AVREMO ANCHE CHE:

$$\|g\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_{\infty}$$

DEFINIZIONE

SIA $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLO LIMITATO.

DEFINIAMO LA CLASSE $C^1([a, b])$

$$C^1([a, b]) = \{ g \text{ CONTINUE SU } [a, b], \\ \text{DERIVABILI SU } (a, b) \text{ CON DERIVATA} \\ g' \in C([a, b]) \}$$

DERIVABILE IN a , SIGNIFICA CHE $\exists$ FINITO IL

$$\text{LIMITE: } \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} = g'(a)$$

DERIVABILE IN b , SIGNIFICA CHE $\exists$ FINITO IL

$$\text{LIMITE: } \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = g'(b)$$

OSSERVAZIONE

SE $g \in C^1([a, b]) \Rightarrow g \in g'$ SONO LIMITATE SU $[a, b]$

DEFINIZIONE

DEFINISCO SU $C^1([a, b])$ LA NORMA $\|\cdot\|_{C^1}$ COSÌ:

$$\|g\|_{C^1} = \|g\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} < +\infty$$

TEOREMA

LO SPAZIO $C^1([a, b])$ È COMPLETO

DIMOSTRAZIONE

VOGLIO USARE QUESTO TEOREMA:

SIA $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE E $f'_n \rightarrow g$ UNIFORME
 $\Rightarrow f' = g$

SIA $f_n \in C^1([a, b])$ SUCC. DI CAUCHY

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0: \|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty + \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0: \text{a) } \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

$$\text{b) } \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

DI CONSEGUENZA:

LA CONDIZIONE a $\Leftrightarrow f_n$ È DI CAUCHY NELLO SPAZIO $C([a, b])$

LA CONDIZIONE b $\Leftrightarrow f'_n$ È DI CAUCHY NELLO SPAZIO $C([a, b])$

PER IL TEOREMA PRECEDENTE HO CHE $f_n \rightarrow f$ IN $C([a, b])$ E $f'_n \rightarrow g$ IN $C([a, b])$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE E

$f'_n \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

$\Rightarrow$ ESSENDO f_n CONTINUE HO ANCHE CHE f È CONTINUA E PURE g È CONTINUA

INFINE IL TEOREMA DELLA LEZIONE PRECEDENTE CI DICE CHE $f' = g$

QUINDI f È DERIVABILE E LA SUA DERIVATA È g CHE È CONTINUA $\Rightarrow f \in C^1([a, b])$

DEVO CONTROLLARE CHE EFFETTIVAMENTE

$$g_m \rightarrow g \text{ IN } C^1([a, b])$$

QUINDI CONSIDERO

$$\begin{aligned}\|g_m - g\|_{C^1} &= \|g_m - g\|_{\infty} + \|g'_m - g'\|_{\infty} = \\ &= \|g_m - g\|_{\infty} + \|g'_m - g'\|_{\infty}\end{aligned}$$

E ORA IL LIMITE PER $m \rightarrow +\infty$ DI QUESTA
QUANTITÀ È 0 PERCHÉ $g_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE
E $g'_m \rightarrow g'$ UNIFORMEMENTE
 $\Rightarrow g_m \rightarrow g \text{ IN } C^1([a, b])$

DEFINIZIONE

SIANO $g_m: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ FUNZIONI DATE.

POSSIAMO CONSIDERARE $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$

DIREMO CHE $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE PUNTUALMENTE SU $\mathbb{E}$

SE $S_m := \sum_{i=1}^m g_i$ CONVERGE PUNTUALMENTE AD UNA
CERTA g SU $\mathbb{E}$. IN TAL CASO SCRIVEREMO:

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m g_i = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m$$

DIREMO CHE $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD
 g SE $S_m \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE.

DIREMO CHE $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE TOTALMENTE SU $\mathbb{E}$

SE $\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_{\infty}$ CONVERGE

$\hookrightarrow$ SERIE NUMERICHE

LEMMA

SE LA SERIE $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE TOTALMENTE

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{E}$

DIMOSTRAZIONE

$\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ CONVERGE TOTALMENTE $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_{\infty} < +\infty$

IN PARTICOLARE AVREMO CHE

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{\infty}$$

SE DEFINISCO $\sigma_n := \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{\infty} \Rightarrow \sigma_n$ AMETTE
LIMITE

$\Rightarrow \sigma_n$ È DI CAUCHY

ESSENDO DI CAUCHY HO:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon} > 0: |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ STIMIAMO $\|S_m - S_n\|_{\infty}$

DOVE

$$S_m = \sum_{i=1}^m g_i$$

$$\Rightarrow \|S_m - S_n\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=1+m}^m g_i \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=1+m}^m \|g_i\|_{\infty} =$$

$\downarrow$
SUPPONIAMO $n > m$

$$= \sum_{i=1}^m \|g_i\|_{\infty} - \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{\infty} = \sigma_m - \sigma_n < \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO OTTENUTO CHE $\|S_m - S_n\|_{\infty} < \varepsilon$

$$\forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

$\Rightarrow S_m$ È UNA SUCC. DI CAUCHY IN GENERALE NON SONO IN $C(\mathbb{E})$

ORA CONSIDERO

$$\forall x \in X \Rightarrow |S_m(x) - S_{m'}(x)| < \varepsilon \quad \forall m, m' \geq m_\varepsilon$$

$$\Rightarrow S_m \text{ È DI CAUCHY IN } \mathbb{R} \text{ E } \exists f(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(x) \quad \forall x$$

INOLTRE PASSANDO AL LIMITE PER $m \rightarrow +\infty$ IN

$$|S_m(x) - S_{m'}(x)| < \varepsilon \quad \text{HO:}$$

$$|S_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_\varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \|S_m(x) - f(x)\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m \geq m_\varepsilon$$

QUINDI S_m CONVERGE UNIFORMEMENTE AD f

$$\Rightarrow S_m(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad \forall x \in X$$

OUVERO ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

$$S_m \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i \text{ UNIFORMEMENTE} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i \text{ CONVERGE UNIFORMEMENTE}$$

COROLLARIO

SE f_m SODISFAVO $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ CONVERGE TOTALMENTE

$$\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty$$

DIMOSTRAZIONE

SIA $S_m \rightarrow f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

E

$$\|S_m\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^m \|f_i\|_\infty \quad \text{SEMPRE VERO}$$

PER LA DISUGUAGLIANZA
TRIANGOLARE

PASSANDO $m \rightarrow +\infty$ OTTENIAMO:

$$\|S_m\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty \text{ E INOLTRE}$$

$$\sum_{i=1}^3 \|g_i\|_\infty \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_\infty \quad \text{PER DEFINIZIONE}$$

$$\Rightarrow \|g\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} g_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_\infty$$

LEZIONE #16 20/04/23

LEMMA

SIAMO $g_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE E SUPPONIAMO CHE LA SERIE DEI $\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x) = g(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD $g(x)$

$\Rightarrow g$ È CONTINUA E

$$\int_a^b g(x) dx = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_a^b g_m(x) dx$$

DIMOSTRAZIONE

$S_m(x) = \sum_{i=0}^m g_i(x)$ È CONTINUA PERCHÉ È LA SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE E IL FATTO CHE $S_m(x) \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE CI DICE SUBITO CHE g È CONTINUA.

INOLTRE SO:

$$\int_a^b S_m(x) dx = \sum_{i=0}^m \int_a^b g_i(x) dx$$

MOSTRIAMO CHE $\int_a^b S_m \rightarrow \int_a^b g$

AVREMO COME CONSEGUENZA CHE:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^b S_m dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^m \int_a^b g_i dx = \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_a^b g_i dx = \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

PER FARLO VEDERE:

$$\left| \int_a^b S_m dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b S_m - f dx \right| \leq \int_a^b |S_m - f| dx$$

SUPPONIAMO CHE $|S_m - f| \leq \|S_m - f\|_\infty \rightarrow 0$
QUANDO $m \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b S_m dx - \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - S_m(x)| dx$$

$$\leq \int_a^b \|f - S_m\|_\infty dx = \|S_m - f\|_\infty (b-a)$$

↓
NON DIPENDE DA X

CHE TENDE A 0 PER $m \rightarrow +\infty$

DEFINIZIONE

LE SERIE DI POTENZE SONO LE SERIE DI FUNZIONI PER LE QUALI LA $f_m(x) = a_m x^m$

PER QUALUNQUE $a_m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ LA SERIE È: $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$

OSSERVAZIONE

VEDIAMO LA CONVERGENZA PUNTUALE PER $x=0$

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE A a_0

PER $x \neq 0$ NON È CHIARO CIÒ CHE SUCCEDDE,

DIPENDE DAI VALORI DEI a_m .

ESEMPIO

SE CONSIDERIAMO LA SERIE DI POTENZE:

$$\begin{cases} a_m = m^m \\ a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \sum_{m=1}^{+\infty} m^m x^m$$

PER $x=0$: LA SERIE CONVERGE A 1.

PER $x \neq 0$: LA SERIE $\sum_{m=1}^{+\infty} m^m x^m$ CONVERGE SOLO

SE (NON È UN SE E SOLO SE!!) $m^m x^m \rightarrow 0$

MA $m^m x^m$ NON TENDE A 0 SE $x \neq 0$

PERCHÉ $m^m x^m \rightarrow 0 \Leftrightarrow |m^m x^m| \rightarrow 0$

MA SE $x \neq 0$, $\exists m > 0: |x| > \frac{1}{m}$

$$\Rightarrow m^m |x^m| > m^m \frac{1}{m^m} = \left(\frac{m}{m}\right)^m \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ LA SERIE $\sum_{m=1}^{+\infty} m^m x^m$ NON CONVERGE PER
NESSUNA $x \neq 0$

TEOREMA

SUPPONIAMO CHE LA SERIE $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ CONVERGA

PER UN CERTO $x=y$ ($\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m < +\infty$)

$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ CONVERGE $\forall x \in (-|y|, |y|)$
($\Leftrightarrow |x| < |y|$)

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m$ CONVERGE

$\Rightarrow a_m y^m \rightarrow 0$ PER $m \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow a_m y^m$ È UNA SUCC. LIMITATA

$\Rightarrow \exists M > 0: |a_m y^m| < M \quad \forall m$

ORA PRENDIAMO $|x| < |y|$, AVREMO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \frac{x^n}{y^n}$$

HO CHE

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| a_n y^n \frac{x^n}{y^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{|a_n y^n|}^M \left| \frac{x}{y} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^n$$

IL NUMERO $\left| \frac{x}{y} \right|^n < 1 \Rightarrow$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^n$

CONVERGE

E DI CONSEGUENZA CONVERGE ANCHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO

COROLLARIO

SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n < +\infty \Rightarrow \forall z \in (-|y|, |y|)$ SI HA CHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ CONVERGE}$$

UNIFORMEMENTE

SU $(-z, z)$

DIMOSTRAZIONE

SE $z < |y|$ AVREMO CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ CONVERGE PER IL TEOREMA PRECEDENTE

MA ALLORA ESSENDO $x \in (-z, z)$ AVREMO CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n x^n\|_{\infty, (-z, z)}$ CONVERGE

DOVE

$$\|g\|_{\infty, (-z, z)} = \sup_{x \in (-z, z)} \{|g|\}$$

PERCHÉ $\|a_n x^n\|_{\infty, (-z, z)} = |a_n| z^n$

PERCHÉ $(\Leftrightarrow) \sup_{x \in (-z, z)} |a_n x^n| = \sup_{x \in (-z, z)} |a_n| |x^n| = |a_n| z^n$

$\Rightarrow$ PER IL LEMMA GIÀ DIMOSTRATO:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE TOTALMENTE SU $(-z, z)$

PERCHÉ $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n x^n\|_{\infty, (-z, z)}$ CONVERGE

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

OSSERVAZIONE

SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ NON CONVERGE PER $x=y$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ NON CONVERGE $\forall |x| > |y|$

DIMOSTRAZIONE

SE PER ASSURDO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty$

SE $|y| < |x|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n < +\infty$ ASSURDO PER IL TEOREMA PRECEDENTE

OSSERVAZIONE

ABBIAMO MOSTRATO CHE SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ CONVERGE

PER $x=y \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE $\forall x \in (-|y|, |y|)$

PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

NON CONVERGE PER $x = y'$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ NON CONVERGE $\forall x: |x| > |y'|$

DEFINIZIONE

POSSO DEFINIRE LA QUANTITÀ:

$R := \sup \{ |x| : \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m < +\infty \} = \text{RAGGIO DI CONVERGENZA DELLE SERIE}$

OSSERVAZIONE

IL RAGGIO DI CIRCONFERENZA SODISFA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

SE $|x| < R \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m < +\infty$ CONVERGE

SE $|x| > R \Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ NON CONVERGE

DIMOSTRAZIONE

METTIAMOCI NEL CASO $|x| < R$, PER DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE AVREMO CHE $\exists y$ PER CUI $|y| > |x|$ E LA SERIE $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m$ CONVERGE

PER DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA PRECEDENTE CI DICE CHE:

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ CONVERGE

SE INVECE $|x| > R$ CHIARAMENTE LA SERIE

$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ NON CONVERGE PER DEFINIZIONE DI R

ESEMPIO

1) $\sum_{m=0}^{+\infty} x^m$

$$R = \sup \{ |x| : \sum_{m=0}^{+\infty} x^m < +\infty \}$$

SE $x \in (-1, 1)$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n < +\infty \Rightarrow R \geq 1$

SE $x=1$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1$ NON CONVERGE

$\Rightarrow$ SE NON CONVERGE PER $x=1$, NON

CONVERGE PER NESSUN $|y| > 1 \Rightarrow R \leq 1$

PER L'OSSERVAZIONE PRECEDENTE

$\Rightarrow R = 1$

$$2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

POSSO SUBITO NOTARE CHE $\left| \frac{x^n}{n+1} \right| < |x^n| \quad \forall n$

QUINDI PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ CONVERGE SE $\sum_{n=0}^{+\infty} |x^n|$ CONVERGE

OTTENIAMO CHE $R \geq 1$ PERCHÉ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x^n| < +\infty \quad \forall x \in (-1, 1)$$

PER $x=1$ LA SERIE DIVENTA:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ SERIE ARMONICA DIVERGE

$\Rightarrow$ COME IN 1 CONCLUDIAMO CHE $R = 1$

$$3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

VEDIAMO SUBITO CHE $\left| \frac{x^n}{(n+1)^2} \right| < |x^n|$

$\Rightarrow$ COME PRIMA HO CHE $R \geq 1$

PER $x=1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty \quad \in \frac{\pi^2}{6}, \text{ DA ANALISI 1}$$

PRENDIAMO ORA $x > 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$ LA SERIE DIVERGE VERIFICA PER
ESERCIZIO

$$\Rightarrow R=1$$

ORA CI DOMANDIAMO COSA SUCCEDDE SE $|x|=R$

NEGLI ESEMPI PRECEDENTI ABBIAMO $R=1$

NEL 1 HO CHE QUANDO $x = \pm 1$ NON CONVERGE

NEL 2 QUANDO $x=1$ NON CONVERGE MA SE

$x=-1 \Rightarrow$ CONVERGE PER IL CRITERIO DI LEBNITZ

NEL 3 SE $x = \pm 1$, LA SERIE CONVERGE

LEZIONE #17 21/04/23

TEOREMA

SUPPONIAMO LA SERIE DI POTENZE $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$

AMMETTA RAGGIO DI CONVERGENZA $R > 0$

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE $f(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ È DERIVABILE

IN $(-r, r)$ $\forall r < R$ E

* $f'(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1}$ HO CHESO $m=0$ PERCHÉ
DERIVEREI UNA COSTANTE
CHE È 0.

DIMOSTRAZIONE

DIMOSTRIAMO CHE LA SERIE IN * CONVERGE IN
UN INTERVALLO $(-r, r)$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^{m-1} \text{ CONVERGE } \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} m a_m x^m \text{ CONVERGE}$$

PERCHÉ LA SECONDA SERIE SI OTTIENE

MOLTIPLICANDO PER x , CHE È $(-r, r)$

DIMOSTRIAMO CHE LA SECONDA SERIE $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m m x^m$

CONVERGE. VISTO CHE ABBIAMO SCELTO $r < R$

$$\Rightarrow \exists y \in (r, R) : \sum_{m=0}^{+\infty} a_m y^m < +\infty$$

$\Rightarrow$ QUESTO SIGNIFICA CHE $a_m y^m \rightarrow 0$ PER

$m \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : |a_m y^m| \leq M \quad \forall m \geq 0$$

PROVIAMO A CALCOLARE

$$\|m a_m x^m\|_{\infty, (-r, r)} = \sup_{x \in (-r, r)} \{ |a_m m x^m| \} =$$

$$= |n a_n| z^n = n |a_n| y^n \left(\frac{z}{y}\right)^n \leq$$

$$\leq n M \left(\frac{z}{y}\right)^n$$

$$\text{MI ACCORGO CHE } \sum_{n=1}^{+\infty} n M \left(\frac{z}{y}\right)^n < +\infty$$

SI VERIFICA COL CRITERIO
DELLA RADICE O DEL RAPPORTO

$\Rightarrow$ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO CONVERGE
ANCHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \|n a_n x^n\|_{\infty, (-r, r)}$

$\Rightarrow$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$ CONVERGE TOTALMENTE
NELL'INTERVALLO $(-r, r)$

ADDESSO VOGLIO FAR VEDERE CHE

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\text{DOVE } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

NOI ABBIAMO CHE

$$S(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \xrightarrow{\text{TOT}} g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x^i$$

$\Rightarrow$ CONVERGE ANCHE UNIFORMEMENTE

INOLTRE SAPPIAMO

$$S'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \xrightarrow{\text{UNIF}} \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1}$$

$$\text{SE CHIAMO } g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1}$$

PER IL TEOREMA GIÀ VISTO, CONCLUDIAMO CHE

$$g'(x) = g = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

OSSERVAZIONE

ABBIAMO FATTO VEDERE CHE SE UNA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ AMMETTE RAGGIO DI CONVERGENZA (RdC) $R > 0$
 $\Rightarrow$ SU OGNI INTERVALLO $(-z, z)$ CON $z < R$ LA FUNZIONE $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ AMMETTE DERIVATA PRIMA $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ INOLTRE $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ CONVERGE TOTALMENTE E QUINDI IL RdC DI $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ SARÁ $\geq R$ PER ESERCIZIO DIMOSTRARE CHE IL NUOVO RdC È $= R$

OSSERVAZIONE

UN IMPLICAZIONE È CHE LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ CONVERGE $\forall x \in (-R, R)$, QUINDI POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA APPENA DIMOSTRATO ALLA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = g'(x)$ E DEDUCIAMO CHE $g'(x)$ AMMETTE DERIVATA E LA $g''(x)$ È UGUALE A $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ E QUEST'ULTIMA SERIE CONVERGE TOTALMENTE SU $(-z, z)$ $\forall z < R$

COROLLARIO

SE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE SU $(-z, z)$ TOTALMENTE $\Rightarrow g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ AMMETTE DERIVATE DI OGNI ORDINE SULL'INTERVALLO $(-z, z)$

OSSERVAZIONE

SIA $k \geq 1$

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) &= \sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1) a_m x^{m-k} = \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{m!}{(m-k)!} a_m x^{m-k} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

PER $x=0$ HO $g^{(k)}(0) = \frac{k!}{0!} a_k + \underbrace{\sum_{m=k+1}^{+\infty} \frac{m!}{(m-k)!} a_m x^{m-k}}_{\text{TUTTI ZERO}}$

$$\Rightarrow g^{(k)}(0) = k! a_k$$

PERCHÉ $x=0$

INOLTRE AVEVO CHE

$$g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m! a_m}{m!} x^m$$

AL POSTO DI $m! a_m = g^{(m)}(0)$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m \quad \text{QUESTO È LO SVILUPPO DI TAYLOR DI } g \text{ IN } x=0$$

COROLLARIO

SE $g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ CONVERGE SU $(-r, r)$

$\Rightarrow$ LA SERIE DI TAYLOR DI g IN $x=0$ CONVERGE TOTALMENTE ALMENO SU $(-r, r)$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} x^m \quad \forall x \in (-r, r)$$

ESEMPIO

CONSIDERIAMO $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{(m-1)!}$

DIMOSTRARE PER
CASA CHE $R=+\infty$

CALCOLARE IL VALORE DELLA SERIE

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE e^{x^2}

$$\Rightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

TAYLOR

SI VERIFICA CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ CONVERGE

TOTALMENTE SU $(-z, z)$ $\forall z > 0$

$$\Rightarrow D e^{x^2} = 2x e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} D \left(\frac{x^{2n}}{n!} \right) =$$

↳ DERIVATA

PER IL TEOREMA PRECEDENTE

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{x^{2n-1}}{n!} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow x e^{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

TEOREMA

SIA DATA UNA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

SUPPONIAMO ESISTA IL LIMITE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

$\Rightarrow$ VALGONO LE SEGUENTI AFFERMAZIONI: SE

1) $L = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $L = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE SOLO PER $x = 0$

3) $L \in (0; +\infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ HA R.D.C. $R = 1/L$

DIMOSTRAZIONE

STUDIAMO LA CONVERGENZA DELLA SERIE PER UN CERTO

$x \in \mathbb{R}$. IL CRITERIO DELLA RADICE DICE CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ CONVERGE SE } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$$

MA, PER IPOTESI:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \rightarrow L|x|$$

$\Rightarrow$ SE $|x| < 1/L \Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE

SE INVECE $|x| > 1/L \Rightarrow$ LA SERIE NON
CONVERGE

QUESTO DIMOSTRA CHE SE $L \in (0; +\infty)$ LA
MIA DIMOSTRAZIONE È CONCLUSA.

NEI CASI $L=0$ E $L=+\infty$ SI VEDONO
IMMEDIATAMENTE.

ESEMPIO

TROVARE I RDC DELLE SERIE

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 1) x^n$$

$$2) \sum_{n=0}^{+\infty} \log(1+n) x^n$$

1)

NOTIAMO CHE PER LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$ ABBIAMO:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|2^n|} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

$$\text{SE } x=1, \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 1) = +\infty$$

NOTIAMO CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|2^n + 1|} \geq 2 \text{ SICURAMENTE}$$

$\Rightarrow$ VOGLIO FAR VEDERE CHE È PURE ≤ 2 :

$$\sqrt[n]{|2^n+1|} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_1 \cdot 2$$

PER $n \rightarrow +\infty$, $\sqrt[n]{2} \cdot 2 \rightarrow 2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|2^n+1|} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n+2^n} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|2^n+1|} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

QUANDO $|x| = \frac{1}{2}$, COSA FA LA SERIE?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n+1) \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{2^n}$$

IN QUESTO CASO DIVERGE

PER $x = -1/2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n+1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n+1}{2^n}$$

RICORDIAMO CHE $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow b_n \rightarrow 0$ PER $n \rightarrow +\infty$

MA $(-1)^n \frac{2^n+1}{2^n} \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ NON CONVERGE

2)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1+n)x^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\log(1+n)} = ?$$

$$\begin{aligned} \log(1+n) < 1+n &\Rightarrow (\log(1+n))^{1/n} < (1+n)^{1/n} = \\ &= e^{\log(1+n) \frac{1}{n}} = \\ &= e^{\frac{\log(1+n)}{n}} \\ &\rightarrow e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\log(1+n)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+n)^{1/n} = 1$$

ORA VOGLIO FAR VEDERE CHE $\bar{e} \geq 1$, COSÌ DA DIRE CHE IL LIMITE È 1.

$$\text{PER } n \geq 2 \text{ HO } \log(1+n) > 1 \Rightarrow (\log(1+n))^{1/n} > 1 \\ \forall n \geq 2$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO CONCLUSO CHE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(1+n))^{1/n} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \log(1+n) x^n \text{ CONVERGE PER } |x| < 1$$

COSA SUCCEDDE PER $x = \pm 1$

$$\text{PER } x = 1 \text{ HO: } \sum_{n=0}^{+\infty} \log(1+n) \text{ NON CONVERGE}$$

$$\text{PER } x = -1 \text{ HO: } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \log(1+n) \text{ NON CONVERGE}$$

$$\text{PERCHÉ } (-1)^n \log(1+n) \not\rightarrow 0$$

TEOREMA DIMOSTRAZIONE

SIANO $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ DUE SERIE DI POTENZE E SUPPONIAMO CHE ABBIANO R.d.C. r, R RISPETTIVAMENTE

DIMOSTRIAMO CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$ HA R.d.C. $\geq \min\{r, R\}$

SUGGERIMENTO: SE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CONVERGE $\forall x < r$

$$\text{E } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ CONVERGE } \forall x < R$$

$\Rightarrow$ FACCIAMO VEDERE CHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ CONVERGE PER } x < \min\{r, R\}$$

ESEGUIAMO:

$$\text{SE } |x| < \min\{r, R\} \Rightarrow |x| < r \text{ E } |x| < R$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ E } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ CONVERGONO}$$

SE CONSIDERO

$$\left. \begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ \hat{S}_n(x) &= \sum_{i=0}^n b_i x^i \end{aligned} \right\} \text{AMETTO LO LIMITE}$$

$$\text{DOVE } S_n(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\hat{S}_n(x) \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

$$\Rightarrow S_n(x) + \hat{S}_n(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

$$\text{CIOE' } \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) x^i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

ONVERO LA SERIE AL MEMBRO SX E' CONVERGENTE
E INOLTRE CONVERGE ALLA SOMMA DELLE DUE
SERIE.

$$\Rightarrow \text{IL RDC DI } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \bar{E} \geq \min\{r, R\}$$

PUO' ACCADERE CHE IL RDC DELLA SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ SIA } > \min\{r, R\}?$$

ESAMINIAMO ALCUNI CASI:

CASO 1

IL PRIMO È $x < R$, PRENDO $x \in (r, R)$

STUDIAMO COSA SUCCEDDE A

$$\sum_{i=0}^m (a_i + b_i) x^i = S_m(x) + \hat{S}_m(x) = \\ = \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

NON CONVERGE PERCHÉ $S_m(x)$ NON CONVERGE

MENTRE $\hat{S}_m(x)$ CONVERGE

INFATTI SE $\sum_{i=0}^m (a_i + b_i) x^i$ CONVERGESSE, VISTO CHE ANCHE $\hat{S}_m(x)$ CONVERGE

$\Rightarrow$ ANCHE $\sum_{i=0}^m (a_i + b_i) x^i - \sum_{i=0}^m b_i x^i$ CONVERGE

CHE È $= S_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ CONVERGEREBBE, ASSURDO PERCHÉ $|x| > r$

$\Rightarrow$ SE $r < R$, $\forall x \in (r, R)$ LA SERIE $\sum (a_n + b_n) x^n$ NON CONVERGE

$\Rightarrow$ IL Rdc È PROPRIO $\min \{r, R\}$

CASO 2

SE $r = R$ POSSO SEMPRE DIRE CHE IL Rdc DI $\sum (a_n + b_n) x^n$ È $r = R$?

SE PRENDO $x > R = r$, COSA SUCCEDDE A:

$$S_m(x) + \hat{S}_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

NON POSSO DIRE NULLA.

AD ESEMPIO:

SE PRENDO $b_m = -a_m$, AVREI:

$$\sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^m (-a_m) x^i = 0 \text{ CONVERGE } \forall x$$

IN QUESTO CASO AVREI CHE IL RDC DI

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (a_m + b_m) x^m \in \mathbb{R} = +\infty$$

ESEMPIO

MOSTRARE CHE DATE DUE SERIE

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \text{ E } \sum_{m=0}^{+\infty} b_m x^m$$

TALI CHE LA PRIMA HA RDC $\geq z$ E LA SECONDARIA

$\Rightarrow$ ALMENO UNA TRA LE DUE SERIE:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (a_m + b_m) x^m \text{ E } \sum_{m=0}^{+\infty} (a_m - b_m) x^m$$

HA RDC UGUALE AL $\min\{z, R\}$

RICORDIAMO CHE PRECEDENTEMENTE HO FATTO

VEDERE CHE SE $z < R \Rightarrow \sum (a_m + b_m) x^m$ HA

RDC $z = \min\{z, R\}$

SE $R < z$, STESSA COSA, SAPPIAMO GIÀ CHE

$\sum (a_m + b_m) x^m$ HA RDC $R = \min\{z, R\}$

IL CASO $z = R$ È QUELLO CHE CI INTERESSA.

DIMOSTRIAMO CHE NON PUÒ ACCADERE CHE

ENTRAMBE LE SERIE OTTENUTE ABBIANO RDC $> z$

(CHE È $= R$)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n < +\infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) x^n < +\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{PER} \\ \text{QUALUNQUE} \\ x > z = R \end{array}$$

IN QUESTO CASO ANCHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((a_n + b_n) x^n + (a_n - b_n) x^n \right) \text{ DEVE CONVERGERE}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \text{ DEVE CONVERGERE}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ CONVERGE} \Rightarrow \text{ASSURDO PERCHÉ} \\ x > z = R \text{ d.c. di } \sum a_n x^n$$

$\Rightarrow$ HO CONCLUSO CHE ALMENO UNA TRA

$$\sum (a_n + b_n) x^n \text{ E } \sum (a_n - b_n) x^n$$

$$\text{HA } R.d.c. \leq \min\{z, R\} \Rightarrow R.d.c. = \min\{z, R\}$$

ESEMPIO

CALCOLARE IL R.d.c. DELLA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+Q^{2n}} x^n$
DOVE $Q \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+Q^{2n}}}$$

DISTINGUIAMO DUE CASI

$$1) |Q| < 1$$

$$2) |Q| \geq 1$$

CASO 1:

$$\frac{1}{1+Q^{2n}} \leq 1 \quad \forall n$$

QUINDI IL $\lim$, SE ESISTE, È

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+Q^{2n}} \right)^{1/n} \leq 1$$

POI, DATO CHE $|a| < 1 \Rightarrow 1 + a^{2m} < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^{2m}} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} > \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{m}} = 1$$

$\Rightarrow$ POSSO CONCLUDERE CHE

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right) = 1 \quad \forall |a| < 1$$

$$\Rightarrow \text{RdC} = 1$$

CASO 2

$$\text{SE } |a| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+a^{2m}} \leq \frac{1}{a^{2m}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{1}{a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{a^2}$$

MA

$$\frac{1}{1+a^{2m}} \geq \frac{1}{a^{2m} + a^{2m}} = \frac{1}{2a^{2m}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} \geq \left(\frac{1}{2a^{2m}} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+2^{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ SI CONCLUDE CHE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+2^{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Rdc = 2$$

ESEMPIO

CALCOLARE IL VALORE ESATTO DELLA SERIE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$$

PER PRIMA COSA TROVO IL RDC.

LA DEVO SCRIVERE NELLA $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$

IL RDC = 1 VERIFICA PER CASA

CERCO UNA PRIMITIVA DI $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$

SE ESISTESSE, POSSO FARE LE PRIMITIVE DEGLI ADDENDI, FACCIAMOLE

$$\begin{aligned} \int (-1)^n n x^{2n-1} dx &= (-1)^n n \cdot \frac{1}{2n} x^{2n} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2} x^{2n} \end{aligned}$$

STUDIAMO LA SERIE DELLE PRIMITIVE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} x^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n$$

QUESTA È UNA SERIE GEOMETRICA

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{2} \frac{(-x^2)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \text{LA SERIE } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{2n-1} = D \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-x^2}{1+x^2} \right)$$

RIGOROSAMENTE DICO CHE

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n \quad \text{È DERIVABILE}$$

E PER IL TEOREMA FATTO IN PRECEDENZA HO:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} D((-x^2)^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$$

ESERCIZI PER CASA

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^n$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin x)^n$$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{nx}$$

LEZIONE #18 27/04/23

OSSERVAZIONE

SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, DI CLASSE $C^1([a, b])$

γ È LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DI UNA CURVA IN $\mathbb{R}^n$.

ESEMPI

SIA $P \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^n$, $|V| = 1$

$\Rightarrow$ LA FUNZIONE $\gamma(t) = P + tV$ DEFINITA $\forall t \in \mathbb{R}$

$([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ È LA RAPPRESENTAZIONE

PARAMETRICA DELLA RETTA PASSANTE PER P E CON DIREZIONE V

1) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

È LA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLA

CIRCONFERENZA DI CENTRO $(0, 0)$ E RAGGIO 1

2) $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1+t, 2-3t)$

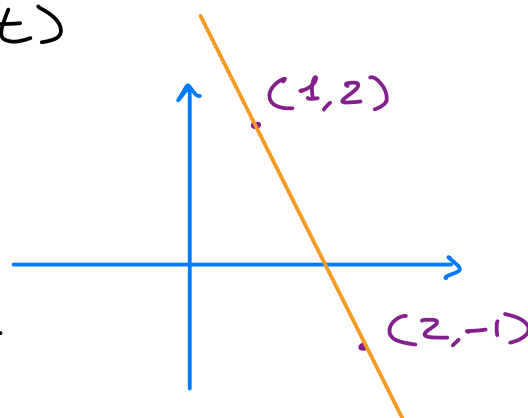
IN $t=0$ $\gamma(0) = (1, 2)$

$t=1$ $\gamma(1) = (2, -1)$

$\Rightarrow \gamma(t) = (1, 2) + (t, -3t) =$

$$= \underbrace{(1, 2)}_P + t \underbrace{(1, -3)}_V$$

$\Rightarrow \gamma(t) = P + tV$



DEFINIZIONE

LA DERIVATA DI γ SI CHIAMA VELOCITÀ DELLA CURVA.

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ AMMETTE DERIVATA PRIMA IN t_0 ,
CHIAMATA $\dot{\gamma}(t_0)$ E $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0 \Rightarrow$ AVREMO CHE LA
RETTA DI EQUAZIONE $\gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) =: \tau(t)$
RISULTA TANGENTE ALLA CURVA γ NEL PUNTO $\gamma(t_0)$
IN TAL CASO AVREMO:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - v(t - t_0)}{t - t_0} = 0 \quad \text{DOVE } v = \dot{\gamma}(t_0)$$

DEFINIZIONE

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$ E
 $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow$ LA CURVA γ SI DICE
REGOLARE.

SI DIRÀ REGOLARE A TRATTI SE ESISTONO PUNTI
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ TALE CHE γ È REGOLARE
IN $[t_{i-1}, t_i] \quad \forall i = 1, \dots, m$

ESEMPIO

SIA $g \in C^1([a, b])$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ LA CURVA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ DEFINITA DA

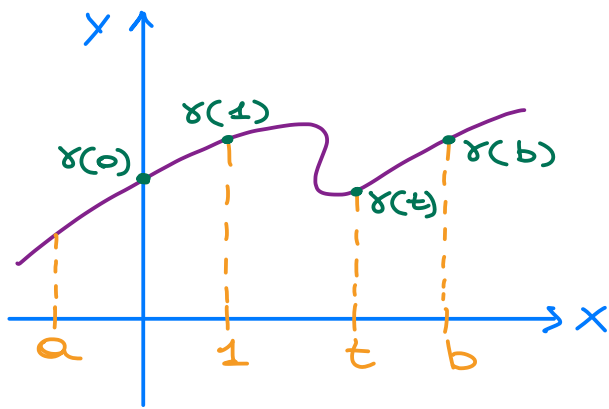
$\gamma(t) = (t, g(t))$ RISULTA REGOLARE SU $[a, b]$.

INFATTI $\dot{\gamma}(t) = (1, g'(t))$ SODISFA:

$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + g'(t)^2} > 0$ IN PARTICOLARE $\dot{\gamma}(t) \neq (0, 0)$

QUINDI γ È REGOLARE

DISEGNO L'IMMAGINE DELLA CURVA



$$\gamma(0) = (0, g(0))$$

$$\gamma(1) = (1, g(1))$$

IN GENERALE

$$\gamma(t) = (t, g(t))$$

DEFINIZIONE

SE $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow$ LA CURVA $\gamma(t) = (t, \overset{\mathbb{R}}{g(t)})$
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, SI CHIAMA RAPPRESENTAZIONE
 PARAMETRICA DEL GRAFICO DI g .

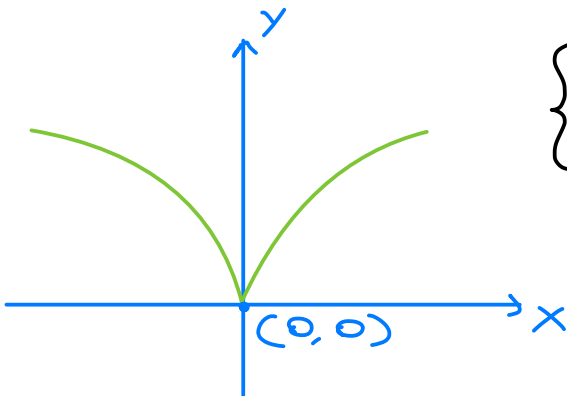
ESEMPIO

$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ DEFINITA DA $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

LA VELOCITÀ SARÀ $\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t)$

OSSERVIAMO CHE IN $t=0$ SARÀ $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$

$$\text{QUINDI: } \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases} \Rightarrow t = x^{1/3} \Rightarrow y = x^{2/3}$$



$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{2/3} \right\} \text{ È IL}$$

GRAFICO DELLA FUNZIONE $x^{2/3}$

NEL PUNTO $y=0$ E $x=0$, CHE CORRISPONDE A $t=0$,
 LA CURVA γ NON AMMETTE RETTA TANGENTE PERCHÉ
 FORMA UN ANGOLO IN $\gamma(0)$ CUSPIDE, LA DERIVATA
 DI $\dot{\gamma}$ SI ANNULLA E NON ESISTE TANGENTE.

SE $\dot{\gamma}(0) \neq (0, 0)$, γ AVREBBE AVUTO RETTA

TANGENTE $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(t-t_0) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(t)t$

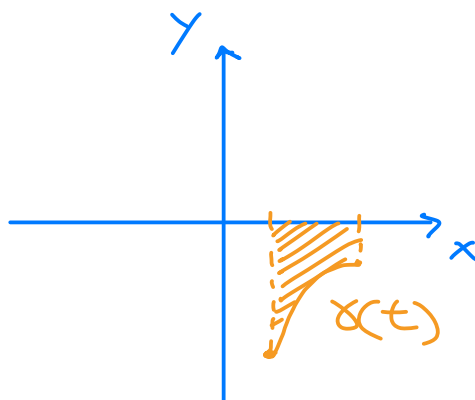
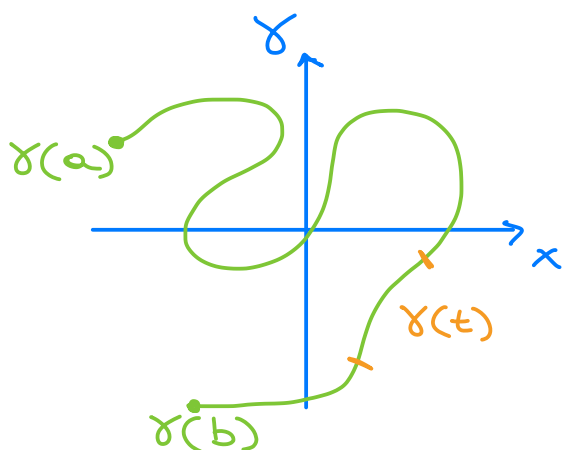
LEMMA

SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ CURVA REGOLARE

$\Rightarrow \forall t \in (a, b)$, $\exists$ UN INTORNO DI t DELLA FORMA

$(t-\delta, t+\delta): \gamma(t-\delta, t+\delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ RAPPRESENTA IL

GRAFICO DI UNA FUNZIONE $x = g(y)$ OPPURE $y = g(x)$



DIMOSTRAZIONE

LA CURVA È REGOLARE QUINDI $\forall t \in (a, b)$ ABBIAMO

$\dot{\gamma}(t) \neq 0$, IN PARTICOLARE ALMENO UNA COORDINATA

DI $\dot{\gamma}(t)$ NON SI ANNULLA, $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$

SUPPONIAMO $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0$ SE $\dot{\gamma}_1(t) > 0$, $\exists$ UN INTORNO

DI t DELLA FORMA $(t-\delta, t+\delta)$ TALE CHE:

$\dot{\gamma}_1(s) \neq 0$, $\dot{\gamma}_1(s) > 0 \quad \forall s \in (t-\delta, t+\delta)$

SE $\dot{\gamma}_1(t) < 0$

$\Rightarrow \dot{\gamma}_1(s) \neq 0$, $\dot{\gamma}_1(s) < 0 \quad \forall s \in (t-\delta, t+\delta)$

SE $\dot{\gamma}_1(t) > 0$ IN $(t-\delta, t+\delta)$:

RISULTA CHE $\gamma_1(t)$ SARÀ STRETTAMENTE

CRESCENTE.

SE $\dot{\gamma}_1(t) < 0$ IN $(t-\delta, t+\delta)$:

RISULTA CHE $\gamma_1(t)$ SARÁ STRETTAMENTE
DECRESCENTE

IN ENTRAMBI I CASI γ_1 SARÁ INVERTIBILE, DENOTIAMO
CON $t(x)$ L'INVERSA $\Leftrightarrow \gamma_1(t(x)) = x$

$$\gamma_1: (t-\delta, t+\delta) \rightarrow (\gamma_1(t-\delta), \gamma_1(t+\delta)) = \mathcal{I}$$

SE γ_1 È CRESCENTE, $\gamma_1(t) = x \Rightarrow x \in \mathcal{I}$

$$\Rightarrow \gamma_1^{-1}(x) = t, \quad \gamma_1^{-1}: \mathcal{I} \rightarrow (t-\delta, t+\delta)$$

QUINDI

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \Rightarrow \gamma(\gamma_1^{-1}(x)) =$$

$$= (\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x)), \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x)))$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \gamma(\gamma_1^{-1}(x)) = (\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x)), \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x))) \\ = (x, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x))$$

HO TROVATO CHE SULL'INTERVALLO $(t-\delta, t+\delta)$
POSSO SCRIVERE LA CURVA COME:

$$\gamma(t) = \gamma(\gamma_1^{-1}(x)) = (x, \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}(x)) \quad \forall x \in \mathcal{I}$$

PONENDO $g = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ ABBIAMO:

$\gamma(\gamma_1^{-1}(x)) = (x, g(x))$ CHE È IL GRAFICO
DELLA FUNZIONE g SU $\mathcal{I}$

SE INVECE $\dot{\gamma}_1(t) = 0$ NECESSARIAMENTE

$\dot{\gamma}_2(t) \neq 0$ QUINDI COME PRIMA POSSO TROVARE
UN INTERVALLO $(t-\delta, t+\delta)$ IN CUI γ_2 È

INVERTIBILE:

$$\gamma_2: (t-s, t+s) \rightarrow (\gamma_2(t-s), \gamma_2(t+s)) = J$$

ORA CHIAMO $Y \in J$.

$\gamma_2^{-1}: J \rightarrow (t-s, t+s)$ È L'INVERSA DI γ_2

$$\forall s \in (t-s, t+s), Y = \gamma_2(s) \Rightarrow \gamma_2^{-1}(Y) = s$$

$$\forall s \in (t-s, t+s), \gamma(s) = \gamma(\gamma_2^{-1}(Y)) =$$

$$= (\gamma_1(\gamma_2^{-1}(Y)), \gamma_2(\gamma_2^{-1}(Y)))$$

$$\Rightarrow \gamma(s) = \gamma(\gamma_2^{-1}(Y)) = (\varphi(Y), Y) \text{ DOVE HO}$$

$$\text{POSTO } \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1} =: \varphi$$

QUINDI $\gamma(s)$ È IL GRAFICO DI φ SU J

DEFINIZIONE

DUE CURVE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ E

$$\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

SI DICONO EQUIVALENTI SE $\exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$

$p \in C^1([a, b])$ E SUGGETTIVA TALE CHE

$$\gamma(t) = \sigma(p(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

DEFINIZIONE

DATA UNA CURVA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ CHIAMO

SOSTEGNO DELLA CURVA L'INSIEME $\mu := \gamma([a, b])$

OSSERVAZIONE

DUE CURVE γ E σ EQUIVALENTI HANNO STESSO

$$\text{SOSTEGNO: } \gamma([a, b]) = \sigma([c, d])$$

PERÒ POTREBBERO PERCORERE IL SOSTEGNO CON
VERSO OPPOSTO

AD ESEMPIO SE $P: [a, b] \rightarrow [c, d]$ È CRESCENTE

$$\Rightarrow P(a) = c \text{ E } P(b) = d$$

$$\Rightarrow \text{AVREMO CHE } \gamma(a) = \sigma(P(a)) = \sigma(c)$$

QUINDI γ E σ HANNO LO STESSO PUNTO DI PARTENZA ED HANNO ANCHE STESSO PUNTO DI ARRIVO PERCHÉ $\gamma(b) = \sigma(P(b)) = \sigma(d)$

VICEVERSA SE $P: [a, b] \rightarrow [c, d]$ È

DECRESCENTE SI AVRÀ $P(a) = d$ E $P(b) = c$ E

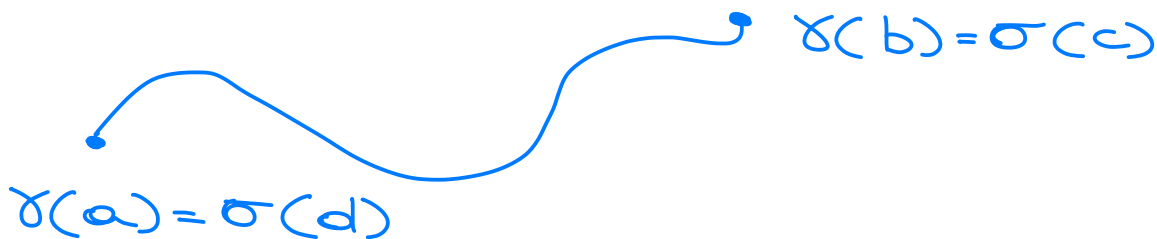
QUINDI IL PUNTO DI PARTENZA DELLA CURVA γ È

$$\gamma(a) = \sigma(P(a)) = \sigma(d) \text{ COINCIDE CON IL}$$

PUNTO DI ARRIVO DI σ . MENTRE IL PUNTO FINALE

DI γ SAREBBE $\gamma(b) = \sigma(P(b)) = \sigma(c)$ COINCIDE

CON IL PUNTO DI PARTENZA DI σ



DEFINIZIONE

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ È REGOLARE

$$\Rightarrow \forall t \in [a, b] \text{ DEFINIAMO } \tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

CHE PRENDE IL NOME DI VERSORE TANGENTE ALLA CURVA γ NEL PUNTO $\gamma(t)$

TEOREMA

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ E $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ SONO CURVE REGOLARI ED EQUIVALENTI

$\Rightarrow \forall t \in (a, b)$ RISULTA $\tau_\gamma(t) = \tau_\sigma(P(t))$

SE HANNO STESSO VERSO, MENTRE

$\tau_\gamma(t) = -\tau_\sigma(P(t))$ SE HANNO VERSO OPPOSTO

DIMOSTRAZIONE

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \sigma(P(t)) = \dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)$$

SE γ E σ HANNO STESSO VERSO

$$\Rightarrow \dot{P}(t) > 0$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)| = \dot{P}(t) |\dot{\sigma}(P(t))|$$

$$\Rightarrow \tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)}{|\dot{\sigma}(P(t))| \dot{P}(t)} = \frac{\dot{\sigma}(P(t))}{|\dot{\sigma}(P(t))|} = \tau_\sigma(P(t))$$

SE INVECE HANNO VERSO OPPOSTO

$$\Rightarrow \dot{P}(t) < 0$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)| = -\dot{P}(t) |\dot{\sigma}(P(t))|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_\gamma(t) &= \frac{\dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)}{-|\dot{\sigma}(P(t))| \dot{P}(t)} = - \frac{\dot{\sigma}(P(t))}{|\dot{\sigma}(P(t))|} = \\ &= -\tau_\sigma(P(t)) \end{aligned}$$

LEZIONE #19 28/04/23

DEFINIZIONE

SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ UNA CURVA REGOLARE
 $\Rightarrow$ DEFINIAMO LA LUNGHEZZA DELLA CURVA γ IL
NUMERO $L(\gamma)$ COSÌ DEFINITO:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

OSSERVAZIONE

PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO
INTEGRALE SI HA SEMPRE CHE:

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt$$

QUINDI SE VOGLIAMO CALCOLARE LA DISTANZA TRA
I DUE PUNTI $\gamma(b)$ E $\gamma(a)$, BASTA CALCOLARE

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma)$$

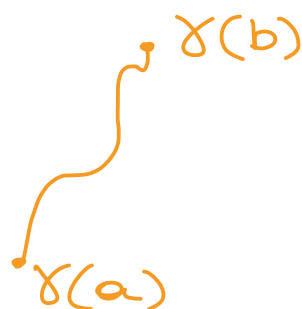
DIMOSTRIAMOLO IN MODO RIGOROSO.

VOGLIO DIMOSTRARE CHE:

$$\left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

SAPPIAMO CHE:

$$\int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \in \mathbb{R}^n \quad \text{PERCHÉ LO È } \dot{\gamma}$$



CASO 1

$$\text{SE } \int_a^b \ddot{\gamma}(t) dt = 0 = \gamma(b) - \gamma(a)$$

↑ PER IL TEO. FONDAMENTALE
DEL CALCOLO INTEGRALE

⇒ LA DISUGUAGLIANZA

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\ddot{\gamma}(t)| dt \quad \text{È SODISFATTA}$$

PERCHÉ IL TERMINE
A SINISTRA È ZERO
E QUELLO A DESTRA È
SEMPRE ≥ 0

CASO 2

$$\text{SUPPONIAMO } \gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \ddot{\gamma}(t) dt \neq 0$$

PRENDIAMO UN VETTORE $v \in \mathbb{R}^n$ ARBITRARIO,

AVREMMO CHE:

$$\left(\int_a^b \ddot{\gamma}(t) dt \right) v = \int_a^b \ddot{\gamma}(t) v dt \leq$$
$$\leq \int_a^b |\ddot{\gamma}(t)| |v| dt =$$

$$= \int_a^b |\ddot{\gamma}(t)| dt |v| = L(\gamma) |v|$$

$$\text{ORA SCELGO } v = \int_a^b \ddot{\gamma}(t) dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right|^2 \leq L(\gamma) \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

ORA POSSO DIVIDERE I MEMBRI PER:

$$\left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \neq 0$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq L(\gamma)$$

ESEMPIO

PRENDO $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ VISTO IERI

CALCOLIAMO LA LUNGHEZZA

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

ESEMPIO

CONSIDERIAMO $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $P \neq Q$

VOGLIO γ CHE PARAMETRIZZA IL SEGMENTO $\overline{PQ}$

$z(t) = P + (Q - P)t$ È LA RETTA IN FORMA
PARAMETRICA PASSANTE PER P E Q

RICORDIAMO CHE $t \in \mathbb{R}$

PER $t=0 \Rightarrow z(0)=P$

$t=1 \Rightarrow z(1)=Q$

QUINDI RESTRINGO z A $[0, 1]$

$\Rightarrow z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ SARÀ UNA PARAMETRIZZAZIONE
DEL SEGMENTO $\overline{PQ}$

$\Rightarrow \gamma(t) = P + (Q - P)t, t \in [0, 1]$

ORA CALCOLIAMO $L(\gamma)$

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$$\dot{\gamma}(t) = Q - P \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |Q - P|$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = |Q - P|$$

ESEMPIO

SIA $g \in C^1([a, b])$ FUNZIONE $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

E CONSIDERIAMO IL GRAFICO DI g

DEFINISCO

$$\gamma(t) = (t, g(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

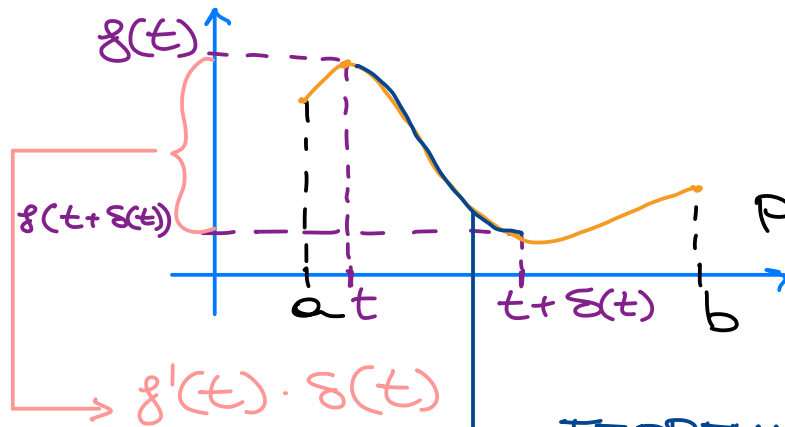
CALCOLIAMO $L(\gamma)$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, g'(t))$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + |g'(t)|^2}$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |g'(t)|^2} dt = \text{MI ESPRIME LA LUNGHEZZA DEL GRAFICO.}$$



CONSIDERIAMO UN PICCOLO SPOSTAMENTO $\delta(t)$

TEOREMA DI PITAGORA POSSO APPROSSIMARE

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta^2(t) + (g'(t)\delta(t))^2} &= \\ &= \delta(t) \sqrt{1 + g'(t)^2} \end{aligned}$$

ESEMPIO

PUO' ACCADERE CHE LE CURVE SIANO ESPRESSE IN COORDINATE POLARI, AD ESEMPIO POSSO AVERE:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (r(t), \theta(t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) \\ r(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

PER CALCOLARE $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cos \theta(t) - r(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t), \\ \dot{r}(t) \sin \theta(t) + r(t) \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\ddot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{\gamma}^2(t) \cos^2 \theta(t) + \dot{\gamma}^2(t) \sin^2 \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + -2 \cdot 2 \dot{\gamma}(t) \dot{\gamma}(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) + \dot{\gamma}^2(t) \sin^2 \theta(t) + \dot{\gamma}^2(t) \cos^2 \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + 2 \dot{\gamma}(t) \dot{\gamma}(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \dot{\theta}(t)}$$

$$\Rightarrow |\ddot{\gamma}(t)|^2 = \dot{\gamma}^2(t) + \dot{\gamma}^2(t) \dot{\theta}^2(t)$$

$$\Rightarrow |\ddot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{\gamma}^2(t) + \dot{\gamma}^2(t) \dot{\theta}^2(t)}$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}^2(t) + \dot{\gamma}^2(t) \dot{\theta}^2(t)} dt$$

TEOREMA

SIANO γ E σ CURVE EQUIVALENTI, CIOÈ:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ E } \sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$\exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ SUGGETTIVA E DI CLASSE

$C^1([a, b])$ TALE CHE $\gamma(t) = \sigma(p(t))$ E $\dot{p}(t) \neq 0 \forall t$

$$\Rightarrow L(\gamma) = L(\sigma)$$

DIMOSTRAZIONE

1° CASO

$$\dot{p}(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t))| \dot{p}(t)$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt =$$

$$= \int_a^b |\dot{\sigma}(p(t))| \dot{p}(t) dt =$$

ORA CAMBIO VARIABILE $s = P(t)$

$$= \int_c^d |\dot{\sigma}(s)| ds = L(\sigma) \text{ PER DEFINIZIONE}$$

2° CASO

$$\dot{P}(t) < 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)$$

$$\Rightarrow |\ddot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(P(t)) \dot{P}(t)| = -\dot{P}(t) |\dot{\sigma}(P(t))|$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b |\ddot{\gamma}(t)| dt = - \int_a^b |\dot{\sigma}(P(t))| \dot{P}(t) dt =$$

PONGO $s = P(t)$

$$\Rightarrow P(t): [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$P(a) = d$$

$$P(b) = c$$

$$= - \int_d^c |\dot{\sigma}(s)| ds = \int_c^d |\dot{\sigma}(s)| ds = L(\sigma)$$

DEFINIZIONE

LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA REGOLARE A TRATTI
SI DEFINISCE NELLO STESSO MODO:

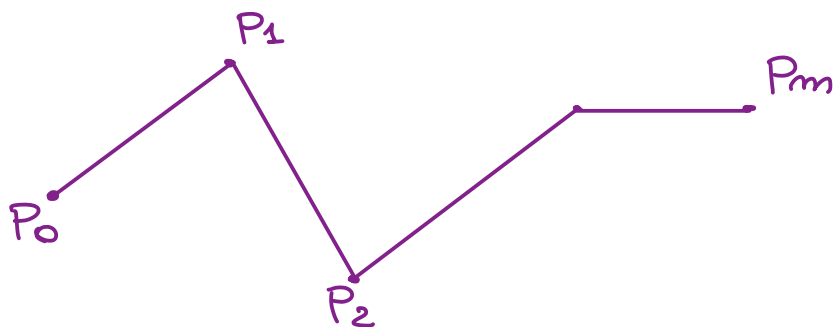
$$\int_a^b |\ddot{\gamma}(t)| dt$$

OSSERVAZIONE

SIA $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$
DOVE $t_0 = a$ E $t_m = b$

CONSIDERIAMO LA CURVA γ DEFINITA COME
SEGUE:

SIANO DATI I PUNTI $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n$

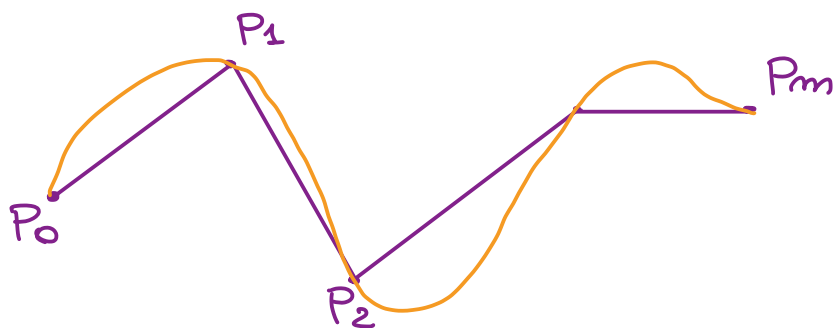


$$\gamma(t) = P_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (P_{i+1} - P_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$\forall i = 0, 1, \dots, m-1$

QUANDO $t = t_i$, $\gamma(t_i) = P_i$
 $t = t_{i+1}$, $\gamma(t_{i+1}) = P_{i+1}$

VOGLIO DIMOSTRARE IL SEGUENTE FATTO:



SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ È UNA CURVA REGOLARE
E σ UNA PARTIZIONE $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ DI UNA
SPEZZATA CHE HA I PUNTI SULLA CURVA γ
 $\Rightarrow L(\gamma) = \sup_{\sigma} L(\sigma)$

DOVE L'ESTREMO SUPERIORE È CALCOLATO SU
TUTTE LE SPEZZATE COE SOPRA

LEMMA

SIA $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ UNA FUNZIONE CONTINUA
ASSEGNA TA

SIA $\tau \in (a, b)$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b v(t) dt \right| \geq$$

$$\geq \int_a^b |v(t)| dt - 2 \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt$$

DIMOSTRAZIONE

DA UNA PARTE ABBIAMO CHE

$$v(\tau)(b-a) = \int_a^b v(\tau) d\tau =$$

$$= \int_a^b v(t) dt - \int_a^b (v(t) - v(\tau)) dt$$

$$\Rightarrow |v(\tau)|(b-a) \leq \left| \int_a^b v(t) dt \right| + \left| \int_a^b (v(t) - v(\tau)) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_a^b v(t) dt \right| + \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt$$

INOLTRE MI SCRIVO CHE

$$|v(\tau)| \geq |v(t)| - |v(t) - v(\tau)|$$

INTEGRO SU $(a, b) \in H^0$:

$$|v(\tau)|(b-a) \geq \int_a^b |v(t)| dt - \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt$$

METTENDOLE INSIEME HO:

$$\left| \int_a^b v(t) dt \right| + \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt \geq$$

$$\geq \int_a^b |v(t)| dt - \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b v(t) dt \right| \geq \int_a^b |v(t)| dt - 2 \int_a^b |v(t) - v(\tau)| dt$$

TEOREMA

SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ UNA CURVA REGOLARE E SIA
 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$
SIA $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ LA SPEZZATA CHE UNISCE I
PUNTI $P_i = \gamma(t_i)$, COME DEFINITA PRIMA

$$\Rightarrow 1) L(\gamma) \geq L(\sigma)$$

2) $L(\gamma) = \sup_{\sigma} L(\sigma)$ DOVE L'ESTREMO
SUPERIORE È CALCOLATO
SU TUTTE LE SPEZZATE
COME L'ENUNCIATO

DIMOSTRAZIONE

1)

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt \geq$$

$$\geq \sum_{i=0}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

2)

SAPPIAMO CHE $L(\gamma) \geq L(\sigma)$ PER OGNI SPEZZATA

$$\Rightarrow L(\gamma) \geq \sup_{\sigma} L(\sigma)$$

SAPPIAMO CHE $\dot{\gamma}$ È CONTINUA SU $[a, b]$

$\Rightarrow$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA E QUINDI:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: SE $s, t \in [a, b]$

SODDISFANO $|t - s| < \delta \Rightarrow |\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(s)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ FISSATO $\varepsilon > 0$ SCELGO UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$:

$$t_{i+1} - t_i < \delta \quad \forall i = 0, 1, \dots, m-1$$

SCRIVIAMO COS'È $|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

SE $\tau \in (t_i, t_{i+1})$ PER IL LEMMA PRECEDENTE

SO CHE:

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\gamma}(t) dt \right| \geq$$

$$\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(\tau)| dt$$

ESSENDO ORA $t, \tau \in [t_i, t_{i+1}] \Rightarrow |t - \tau| < \delta$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(\tau)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ SOSTITUISCO NELLA DISUGUAGLIANZA PRECEDENTE:

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon dt$$

$$\Rightarrow |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \geq$$

$$\geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}(t)| dt - 2\varepsilon(t_{i+1} - t_i)$$

SOMMO I TERMINI PRECEDENTI $\left(\sum_{i=0}^{m-1} \right)$

$$\Rightarrow L(\sigma) = \sum_{i=0}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \geq$$

$$\geq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow L(\sigma) \geq L(\gamma) - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \sup_{\sigma} L(\sigma) \geq L(\gamma) - 2\varepsilon(b-a)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ ARBITRARIO, QUINDI:

$$\sup_{\sigma} L(\sigma) \geq L(\gamma)$$

$$\Rightarrow \sup_{\sigma} L(\sigma) = L(\gamma)$$

LEZIONE #20 02/05/23

OSSERVAZIONE

SIA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ CURVA REGOLARE

$$\dot{\gamma}(t) \neq 0 \Leftrightarrow |\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

VOGLIO DEFINIRE s SU UN INTERVALLO DELLA FORMA

$$[0, L(\gamma)]$$

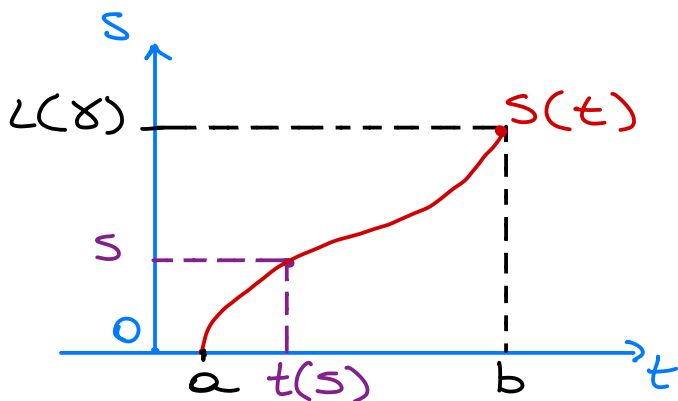
$$s(t) := \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \quad t \in [a, b]$$

$\Rightarrow s(t)$ È PROPRIO LA LUNGHEZZA DI γ SULL'INTERVALLO $[a, t]$, INFATTI:

$$\left. \begin{array}{l} s(a) = 0 \\ s(b) = L(\gamma) \end{array} \right\} \text{ con } s \in [0, L(\gamma)]$$

INOLTRE s È DERIVABILE E $\frac{d}{dt} s(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$

QUINDI s HA DERIVATA $|\dot{\gamma}|$ CHE È CONTINUA, QUINDI $s \in C^1([a, b])$ E $|\dot{\gamma}(t)| > 0 \Rightarrow s$ È CRESCENTE



INOLTRE s È INVERTIBILE
E $t(s)$ È L'INVERSA

$$\frac{d}{ds} t(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} > 0$$

$$t: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$$

$$t \in C^1([0, L(\gamma)])$$

$$t(0) = a \quad t(L(\gamma)) = b$$

ORA DEFINISCO UNA NUOVA CURVA

$$\sigma(s) : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(s) = \gamma(t(s))$$

LE CURVE γ E σ SONO EQUIVALENTI PERCHÉ

$\exists t: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ CHE È INIETTIVA E

SURRETTIVA DI CLASSE $C^1([0, L(\gamma)])$: $\sigma(s) = \gamma(t(s))$

IN PARTICOLARE σ E γ HANNO STESSO SUPPORTO

(SONO PARAMETRIZZAZIONI DELLA STESSA CURVA E

LA PARAMETRIZZANO CON LO STESSO VERSO $\dot{t}(s) > 0$)

SE CALCOLO $\frac{d}{ds} \sigma(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \dot{t}(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{|\dot{\gamma}(t(s))|}$

E IN PARTICOLARE $|\dot{\sigma}(s)| = \frac{|\dot{\gamma}(t(s))|}{|\dot{\gamma}(t(s))|} = 1$

LA VELOCITÀ DELLA σ È UNITARIA

DEFINIZIONE

LA CURVA σ SI CHIAMA PARAMETRIZZAZIONE PER

LUNGHEZZA D'ARCO DELLA γ . LA QUANTITÀ s SI

CHIAMA PARAMETRO D'ARCO DI γ O ASCISSA

CURVILINEA

OSSERVAZIONE

SE VOGLIO CALCOLARE $L(\sigma)$ SCRIVIAMO

$$L(\sigma) = \int_0^{L(\gamma)} |\dot{\sigma}(s)| ds = \int_0^{L(\gamma)} 1 ds = L(\gamma)$$

DEFINIZIONE

SI DEFINISCE INTEGRALE CURVILINEO DI $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ SULLA CURVA γ :

$$\int_{\gamma} g ds = \int_a^b g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $g=1$

$$\int_{\gamma} g ds = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma)$$

MA ANCHE SE CAMBIASSI VARIABILE:

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{L(\gamma)} 1 ds = L(\gamma)$$

ESEMPIO

SI CALCOLI $\int_{\gamma} g ds$ DOVE $g(x,y) = \sqrt{1+3x^2+y}$ E
 $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t, t^2)$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (1, 2t) \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} g ds = \int_0^1 g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+3t^2+t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2} dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2} dt = \int_0^1 1+4t^2 dt =$$

$$= t + \frac{4}{3} t^3 \Big|_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

ESEMPIO

$$\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (g(t), \theta(t)) \text{ con } g(t) = \sin t$$

$$\theta(t) = t$$

CALCOLARE LA LUNGHEZZA (INTEGRALE

CURVILINEO CON $\delta=1$)

$$\int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt$$

CAMBIO COORDINATE E PASSO A X E Y:

$$\begin{cases} X = \cos \theta(t) & g(t) = \cos t \sin t \\ Y = \sin \theta(t) & g(t) = \sin^2 t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = -\sin^2 t + \cos^2 t \\ \dot{Y} = 2 \sin t \cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (-\sin^2 t + \cos^2 t, 2 \sin t \cos t)$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| =$$

$$= \sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t - 2 \sin^2 t \cos^2 t + 4 \sin^2 t \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{\sin^4 t + \cos^4 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t} =$$

$$= \sin^2 t \cos^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

ESEMPIO

CALCOLARE L'INTEGRALE CURVILINEO DI

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{SULLA CURVA}$$

$$\gamma(\theta) : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(\theta) = (\theta, \theta) \quad \text{IN COORDINATE POLARI} \quad \rho(\theta) = \theta \\ \theta = \theta$$

PASSIAMO ALLE COORDINATE CARTESIANE:

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) = \theta \cos \theta \\ y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) = \theta \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(\theta) = (\dot{x}(\theta), \dot{y}(\theta)) = \\ = (\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta)$$

$$\text{INOLTRE} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho(\theta) = \theta$$

$$\text{OPPURE: } \begin{cases} x(\theta) = \theta \cos \theta \\ y(\theta) = \theta \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(\theta) + y^2(\theta) = \theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta = \theta^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2(\theta) + y^2(\theta)} = \theta$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\theta \sqrt{1 + \theta^2} \{ \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta - 2\theta \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \theta^2 \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta \} \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \theta \sqrt{1 + \theta^2} \, d\theta = \frac{1}{3} (1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3} (1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}$$

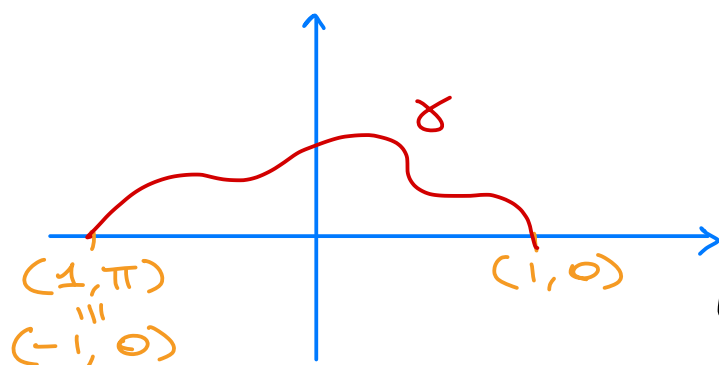
ESERCIZIO

SIA $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ UNA CURVA DELLA FORMA

$\gamma(t) = (\rho(t), t)$ IN COORDINATE POLARI TALE CHE:

$$\gamma(0) = (1, 0) \text{ E } \gamma(\pi) = (1, \pi)$$

$\Rightarrow$ CHIEDO CHE $\rho(0) = 1$ E $\rho(\pi) = 1$



CALCOLARE IL

MINIMO VALORE CHE

PUÒ ASSUMERE

L'INTEGRALE CURVILINEO

$$\text{DI } f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ SULLA CURVA } \gamma.$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt$$

$\gamma(t) = (\rho(t), t)$ POLARI

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos t \\ y(t) = \rho(t) \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\rho}(t) \cos t - \rho(t) \sin t \\ \dot{y}(t) = \dot{\rho}(t) \sin t + \rho(t) \cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{t} \left\{ \dot{g}^2(t) \cos^2 t + g^2(t) \sin^2 t + \right. \\ \left. - 2\dot{g}(t)g(t)\cos t \sin t + \right. \\ \left. + \dot{g}^2(t) \sin^2 t + g^2(t) \cos^2 t + \right. \\ \left. + 2\dot{g}(t)g(t)\cos t \sin t \right\} =$$

$$= \sqrt{\dot{g}^2(t) + g^2(t)}$$

$$\Rightarrow g(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g^2(t) \cos^2 t + g^2(t) \sin^2 t}} = \frac{1}{g(t)}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \frac{1}{g(t)} \sqrt{\dot{g}^2(t) + g^2(t)} dt = \text{E L'INTEGRALE CURVILINEO}$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{\dot{g}^2(t)}{g^2(t)} + 1} dt > \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

QUALSIASI SIA $g(t)$ L'INTEGRALE CURVILINEO VIENE $\geq \pi$

$$\text{SE } \dot{g}(t) \equiv 0 \Rightarrow \int_\gamma g(\gamma(t)) dt = \pi$$

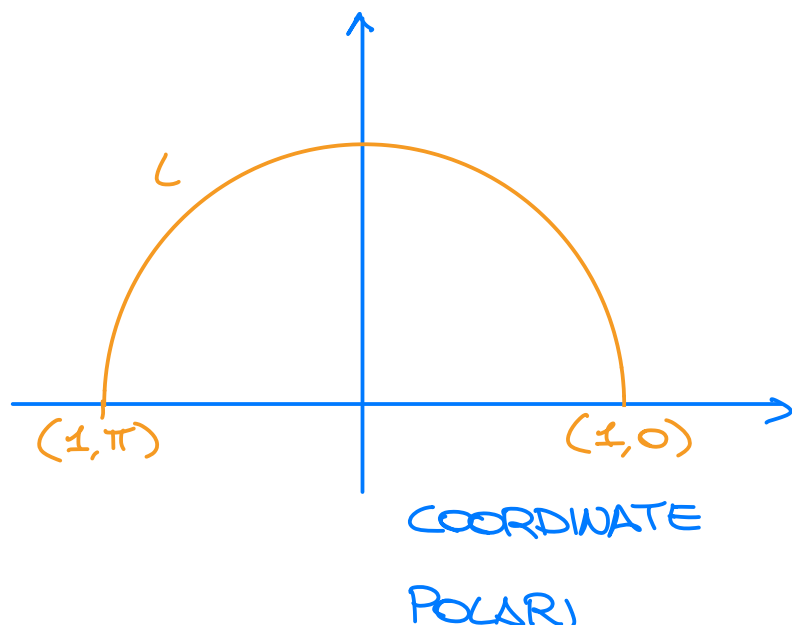
AVEVAMO CHIESTO CHE $\gamma(0) = (1, 0)$ } COORDINATE
 $\gamma(\pi) = (1, \pi)$ } POLARI
 $\gamma(t) = (g(t), t) \quad \forall t$

NECESSARIAMENTE $g(t) = 1$

$$\Rightarrow g(0) = 1 \Rightarrow \gamma(0) = (1, 0) \text{ E } g(\pi) = 1 \Rightarrow \gamma(\pi) = (1, \pi)$$

QUINDI $\gamma(t) = (1, t)$ SODISFA CHE

$$\int_{\gamma} g \, ds = \pi \text{ CHE È IL MINIMO}$$



$\gamma(t) = (1, t)$ COORDINATE
POLARI

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{pmatrix}$$

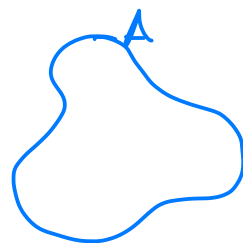
DEFINIZIONE

UNA SUPERFICIE È UNA FUNZIONE $\phi: K \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ CHE HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $K \equiv \bar{A}$ E A SIA LIMITATO E CONNESSO
- $\phi \in C^1(K)$ SIGNIFICA CHE $\phi \in C^0(K)$ E $\nabla \phi \in C^0(A)$

UNA SUPERFICIE SI DICE REGOLARE

SE ϕ RISTRETTA ALL'APERTO A



$(\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3)$ RISULTA INIETTIVA E SODISFA

LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0 \text{ IN } A \quad \text{PRODOTTO VETTORIALE}$$

TRA LE DERIVATE

IL PRODOTTO VETTORIALE TRA $a \in b \in \mathbb{R}^3$ È:

$$a \wedge b = (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

PER RICORDARLO POSSIAMO FARE:

$$a \wedge b = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ:

SIANO $a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$* a \wedge b = -b \wedge a$$

$$* a \wedge a = 0$$

$$* (\lambda a) \wedge a = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$* (a \wedge b) \cdot c = (b \wedge c) \cdot a = (c \wedge a) \cdot b$$

$$* (a \wedge b) \cdot a = (a \wedge a) \cdot b = 0$$

$$* (a \wedge b) \cdot b = 0$$

} NORMALE: $a \wedge b$
È PERPENDICOLARE
SIA AD a CHE b

SE $a \wedge b = 0 \Rightarrow a$ E b SONO PARALLELI, CIOÈ

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : b = \lambda a$$

LEZIONE #21 04/05/23

OSSERVAZIONE

SE $g(x, y) \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy \geq 0$$

$$\text{E SE } \bar{R} > R \Rightarrow \int_{B_{\bar{R}}(0) \cap D} g(x, y) dx dy \geq \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy$$

IN PARTICOLARE SI VEDE CHE

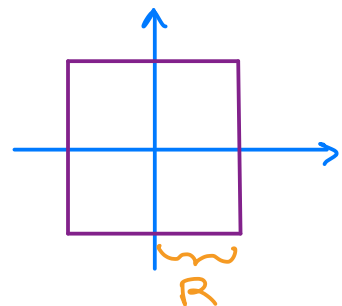
$$\int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy \nearrow \text{ È CRESCENTE IN } R$$

MA LA MIA DOMANDA È, VISTO CHE ESISTE SEMPRE IL:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy = L, \text{ QUESTO LIMITE È } < +\infty?$$

INVECE DI INTEGRARE SULLE PALLE INTEGRARE SU QUADRATI $Q_R = [-R, R] \times [-R, R]$

$$\Rightarrow \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy$$



ANCHE IN QUESTO CASO SE $\bar{R} > R$

$$\Rightarrow \int_{Q_{\bar{R}} \cap D} g(x, y) dx dy \geq \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy$$

RAGIONANDO COME PRIMA:

$$\exists \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy = \hat{L}$$

TEOREMA

$$L = \hat{L}$$

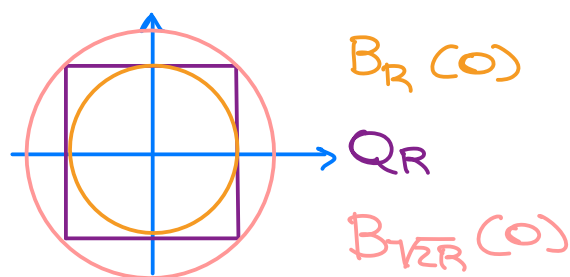
$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy = \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy$$

DIMOSTRAZIONE

$$B_R(0) \subseteq Q_R$$

$$\Rightarrow \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy \leq$$

$$\leq \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy$$



MA DICO ANCHE CHE $Q_R \subseteq B_{\sqrt{2}R}(0)$

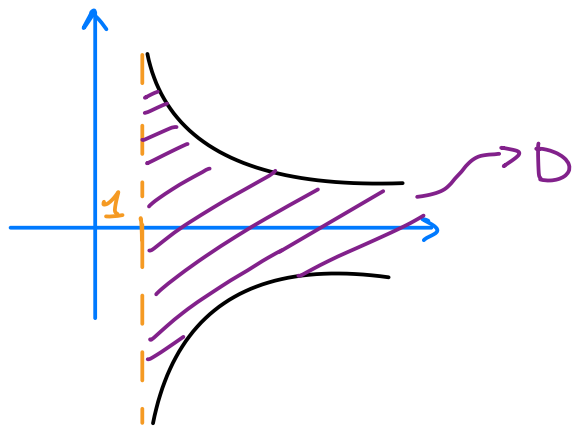
$$\Rightarrow \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy \leq \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}(0) \cap D} g(x, y) dx dy$$

MA:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \cap D} g(x, y) dx dy &= L \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_{\sqrt{2}R}(0) \cap D} g(x, y) dx dy &= L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R \cap D} g(x, y) dx dy = L$$

ESERCIZIO

$$\text{SIA } D = \left\{ x \geq 1, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



DETERMINARE SE $g(x,y)$ È
INTEGRABILE IN SENSO
IMPROPRIO SU D .

ESEMPI DI $g(x,y)$:

$$g(x,y) = 1, \quad g(x,y) = \frac{1}{x}$$

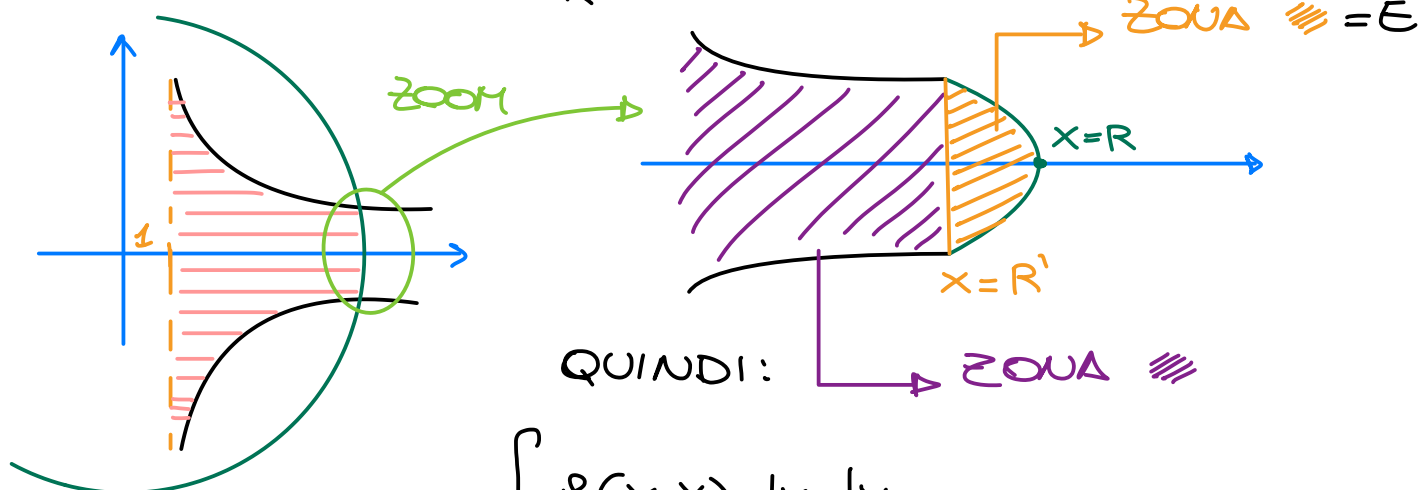
RICORDIAMO CHE $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ È INTEGRABILE IN SENSO
IMPROPRIO SE:

$$\int_{B_R(0) \cap D} g(x,y) \, dx \, dy \rightarrow L < +\infty \quad \text{QUANDO } R \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ IN TAL CASO PONGO

$$L = \int_D g(x,y) \, dx \, dy$$

ORA DISEGNAMO $B_R(0) \cap D$

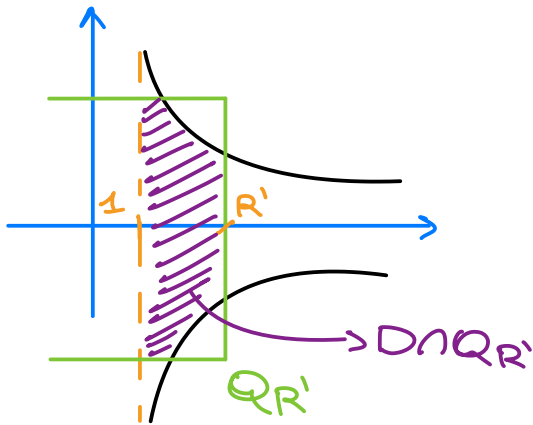


QUINDI: $\rightarrow$ ZONA //

$$\int_{B_R(0) \cap D} g(x,y) \, dx \, dy =$$

$$= \underbrace{\int_1^{R'} \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} g(x,y) dx dy}_{\text{ZONA } \text{///}} + \underbrace{\iint_E g(x,y) dx dy}_{\text{ZONA } \text{///}}$$

VOGLIO UTILIZZARE L'OSSERVAZIONE E IL TEOREMA PRECEDENTE PER DIRE CHE IL $\lim$ DELLA ZONA $\text{///} \rightarrow 0$



ADESSO HO CHE SE g È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO HO CHE:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D \cap Q_{R'}} g(x,y) dx dy &= \\ &= \int_D g(x,y) dx dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \cap D} g(x,y) dx dy \end{aligned}$$

QUINDI HO COME CONSEGUENZA

$$\underbrace{\int_{D \cap B_R(0)} g(x,y) dx dy - \int_{D \cap Q_{R'}} g(x,y) dx dy}_{=} \rightarrow 0$$

$$\overset{''}{\int_E g(x,y) dx dy}$$

ESERCIZIO

$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+|y|}}$ CI CHIEDIAMO SE È INTEGRABILE
IN SENSO IMPROPRIO SU D

$$D = \left\{ x \geq 1, -\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_{D \cap \mathbb{Q}_R} g(x,y) dx dy = \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} dy dx$$

PER FAR VEDERE CHE g È INTEGRABILE IN SENSO
IMPROPRIO È SUFFICIENTE MOSTRARE CHE:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D \cap \mathbb{Q}_R} g(x,y) dx dy < +\infty$$

HO CHE:

$$\frac{1}{\sqrt{x+|y|}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \geq 1, \forall y \in \left[-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} dy dx &\leq \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x}} dy dx = \\ &= \int_1^R \frac{2}{x\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^R x^{-3/2} dx = \\ &= 2 \cdot (-2 \cdot x^{-1/2}) \Big|_1^R = \\ &= -4(R^{-1/2} - 1) = \\ &= 4(1 - R^{1/2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} dy dx \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} 4(1-R^{-1/2}) = 4$$

$\Rightarrow$ QUESTO È SUFFICIENTE PER DIRE CHE g È INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

OSSERVAZIONE

RICORDIAMO CHE ABBIAMO DEFINITO CHE DUE CURVE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ E $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ SONO EQUIVALENTI SE $\exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $p \in C^1([a, b])$ SUGGETTIVA: $\gamma(t) = \sigma(p(t)) \quad \forall t \in [a, b]$

LA DOMANDA È: DEVO SUPPORRE CHE $p'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ SE VOGLIO GARANTIRE CHE γ E σ SIANO REGOLARI?

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$ E REGOLARE $\Leftrightarrow |\dot{\gamma}(t)| \neq 0$

SE σ È EQUIVALENTE A γ SO CHE $\forall t \in [a, b]$ $\gamma(t) = \sigma(p(t))$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)$$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t))| |\dot{p}(t)| \neq 0$$

$\hookrightarrow$ PERCHÉ γ È
REGOLARE

CONCLUDO CHE $\dot{p}(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$

NON DEVO RICHIEDERLO, È UNA CONSEGUENZA.

LEMMA

SE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ È DI CLASSE $C^1([a, b])$
E REGOLARE, E $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ È EQUIVALENTE
A γ

$\Rightarrow$ 1. $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

2. SE σ È DI CLASSE $C^1([a, b])$

$\Rightarrow$ È REGOLARE

DIMOSTRAZIONE

1.

GIÀ DIMOSTRATO NELL'OSSERVAZIONE PRECEDENTE

2.

AVEVAMO DETTO CHE

$$|\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(\rho(t))| |\dot{\rho}(t)| \neq 0$$

$$\Rightarrow |\dot{\sigma}(\rho(t))| \neq 0$$

$\Rightarrow \sigma$ È REGOLARE

RIPASSO

ABBIAMO DEFINITO LE SUPERFICI COME $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$
DOVE $U \subseteq \mathbb{R}^2$ E $U = \bar{A}$ DOVE A È APERTO, CONNESSO
E LIMITATO, E ABBIAMO RICHIESTO CHE
 $\Phi \in C^1(A) \cap C(U)$.

Φ È REGOLARE SE Φ È INIETTIVA SU A E

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \neq 0 \quad \text{IN } A$$

ESEMPIO

$$\Phi(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y)$$

$$x \in [0, 2\pi], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

SE $\begin{cases} x = \theta \\ y = \phi \\ \rho = 1 \end{cases}$ MI ACCORGO CHE LE COORDINATE DI $\Phi(x, y)$ SONO LE COORDINATE CARTESIANE DI UN PUNTO LE CUI COORDINATE SFERICHE SONO: ρ, θ, ϕ .

$\Rightarrow$ LA SUPERFICIE Φ PARAMETRIZZA TUTTA LA SFERA DI RAGGIO 1 CENTRATA SULL' ORIGINE

IN PARTICOLARE IL SUPPORTO DI Φ È

$$= \Phi([0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]) = \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$$

È REGOLARE?

L'INIETTIVITÀ DI Φ È ABBASTANZA EVIDENTE SU

$(0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ A PATTO CHE LA

PARAMETRIZZAZIONE DATA DA Φ È QUELLA DATA

DALLE COORDINATE SFERICHE CONTROLLA PER

CASA

$$\text{CALCOLIAMO } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = (-\sin x \cos y, \cos x \cos y, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-\cos x \sin y, -\sin x \sin y, \cos y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \det \begin{bmatrix} -\sin x \cos y & \cos x \cos y & 0 \\ -\cos x \sin y & -\sin x \sin y & \cos y \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} =$$

$$= (\cos x \cos^2 y, \sin x \cos^2 y \cos y \sin y)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \sqrt{\cos^4 y + \cos^2 y \sin^2 y} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 y (\cos^2 y + \sin^2 y)} = \cos y \neq 0$$

PER $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

DEFINIZIONE

DEFINIAMO L'AREA DI UNA SUPERFICIE

SI A $\Phi: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow A(\Phi) = \int_A \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| dx dy$$

ESEMPIO

PRENDIAMO LA SFERA DELL'ESEMPIO PRECEDENTE:

$$\Phi(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y) \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$y \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\Rightarrow A(\Phi) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| dy dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y dy dx = \int_0^{2\pi} \left(\sin y \right)_{-\pi/2}^{\pi/2} dx =$$

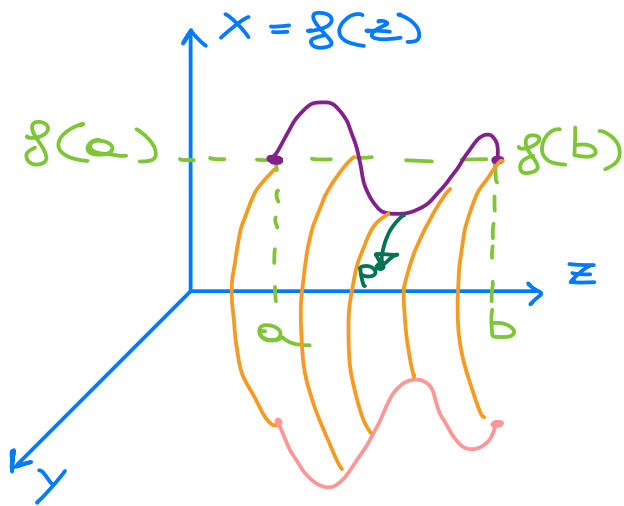
$$= \int_0^{2\pi} 2 dx = 4\pi$$

ESEMPIO

$$z \mapsto f(z) \quad z \in [a, b]$$

NEL PIANO xz DISEGNO IL GRAFICO DI f

$$x = f(z) \text{ E SUPPONIAMO } f > 0$$



RUOTO QUESTO GRAFICO
INTORNO A z , E AVRÒ
QUESTA SUPERFICIE.

ADESSO VOGLIO TROVARE
UNA $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ CHE

PARAMETRIZZA QUESTA SUPERFICIE.

QUALI SONO LE COORDINATE CILINDRICHE DI UN
PUNTO P .

$$P = (x, y, z) \quad x = f(z) \cos \theta$$

$$y = f(z) \sin \theta$$

$$z = z$$

IN COORDINATE CILINDRICHE $\rho = f(z)$

CALCOLIAMO $A(\Phi)$, $z \in [a, b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_a^b \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right| dz d\theta$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = (f'(z) \cos \theta, f'(z) \sin \theta, 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-f(z) \sin \theta, f(z) \cos \theta, 0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-f(z) \cos \theta, -f(z) \sin \theta, f'(z) f(z))$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right| = \sqrt{g^2(z) \cos^2 \theta + g^2(z) \sin^2 \theta + g'(z)^2 g^2(z)}$$

$$= g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz d\theta =$$

$$= 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz$$

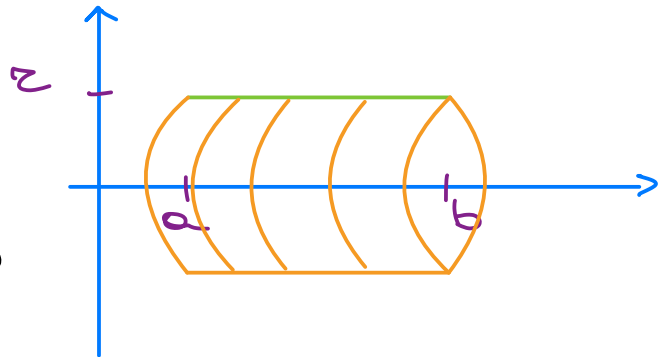
ESEMPIO

SIA COME PRIMA

$$\text{SE } g(a) = z > 0$$

$$g(b) = z > 0$$

$$g(z) = z \quad \forall z \in (a, b)$$



$$\Rightarrow A(\Phi) = 2\pi \int_a^b z \sqrt{1} dz = 2\pi z(b-a)$$

SE SUPPONGO $g(a) = z$

$$g(b) = z$$

$$\text{MA } g(z) = ? \quad z \in (a, b)$$

PROBLEMA: TROVARE TRA TUTTE LE SUPERFICI DI ROTAZIONE INTORNO ALL'ASSE z DEL GRAFICO g LA SUPERFICIE CHE MINIMIZZA L'AREA

$\Leftrightarrow$ TROVARE Φ TALE CHE SE Φ' È UN'ALTRA SUPERFICIE DI ROTAZIONE COME SOPRA

$$\Rightarrow A(\Phi) \leq A(\Phi')$$

MA

$$A(\Phi) = 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz$$

EQUIVALE A TROVARE g PER CUI:

$$2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz \leq 2\pi \int_a^b g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} dz$$

MA NON È DETTO ESISTA.

SE a E b SONO VICINI

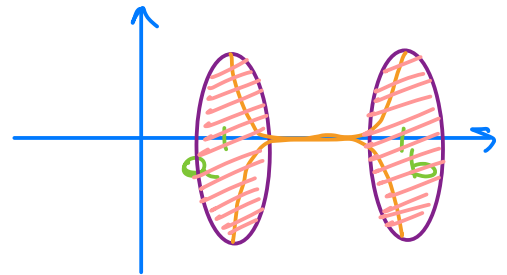
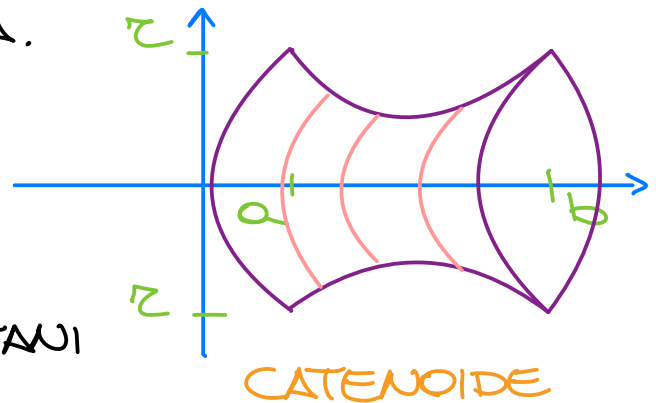
ESISTERÀ SEMPRE UN

CATENOIDE, SE SONO LONTANI

IL CATENOIDE VA SUBITO A ZERO.

$\Rightarrow$ L'AREA DI ROTAZIONE

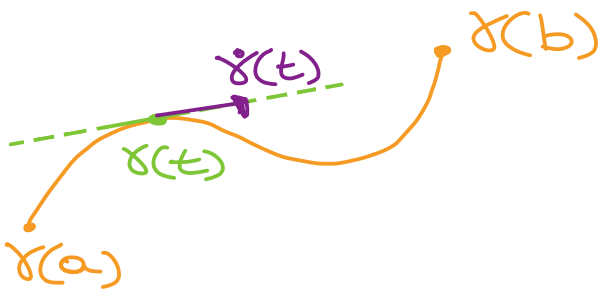
DIVENTA PROPRIO DUE CERCHI



LEZIONE #22 05/05/23

OSSERVAZIONE

COSÌ COME LE CURVE ABBIAMO CHE $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ REGOLARE HA LA PROPRIETÀ CHE $\dot{\gamma}(t)$ È TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO $\gamma(t)$ E QUINDI POSSIAMO DIRE CHE LA RETTA DI EQUAZIONE PARAMETRICA $\gamma(t) + \dot{\gamma}(t)s$, SE $\mathbb{R}$ È LA RETTA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO $\gamma(t)$

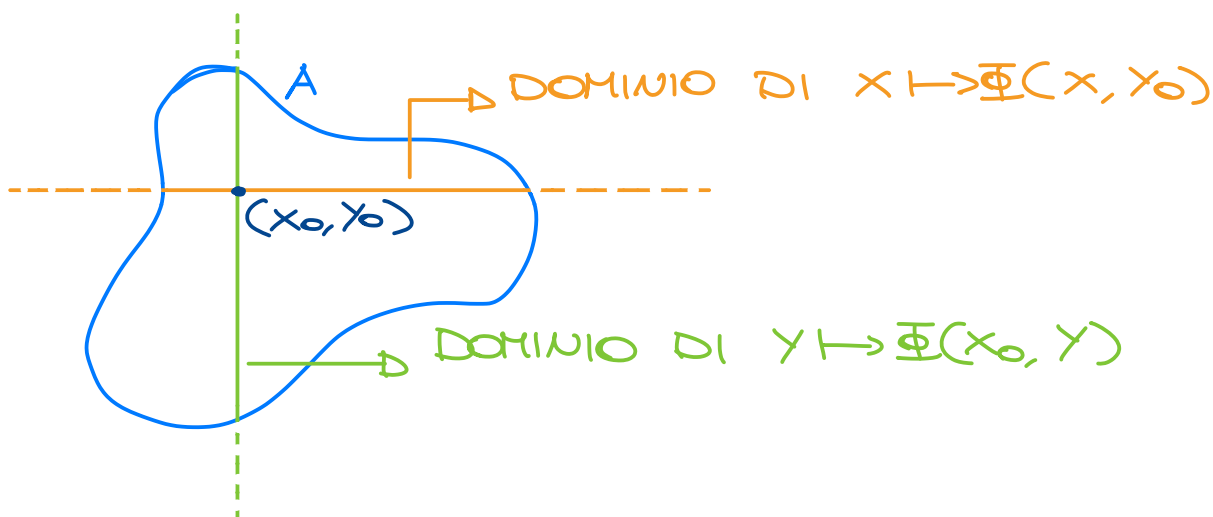


$$z(s) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)s$$

È LA RETTA TANGENTE
ALLA CURVA NEL PUNTO $\gamma(t)$

PER LE SUPERFICI POSSO FARE UN DISCORSO SIMILE.

SUPPONIAMO $\Phi: K = \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ SIA UNA SUPERFICIE REGOLARE. FISSIAMO UN PUNTO $(x_0, y_0) \in A$ E CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $y \mapsto \Phi(x_0, y)$ E $x \mapsto \Phi(x, y_0)$



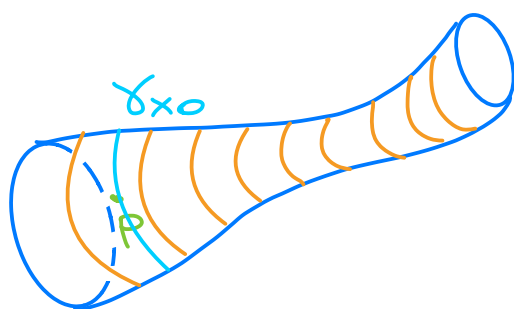
SE V È UN INTORNO DI y_0 TALE CHE

$$V = (y_0 - R, y_0 + R) \text{ E } \underbrace{\{x_0\} \times V}_{\downarrow \text{SEGMENTO}} \subseteq A$$

$\Rightarrow$ POSSO DEFINIRE LA CURVA γ_{x_0} COME

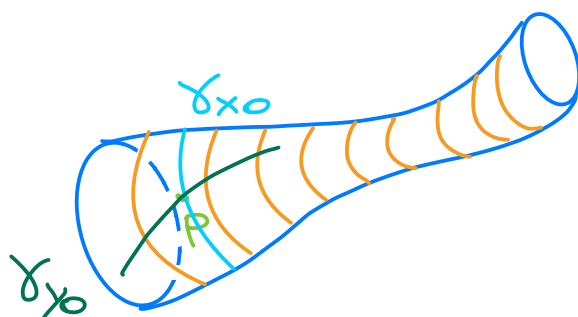
$\gamma_{x_0}(y) \rightarrow \Phi(x_0, y) \quad \forall y \in V$ ESSENDO $(x_0, y) \in A$
RISULTERÀ CHE IL PUNTO $\gamma_{x_0}(y)$ È SUPPORTO
DI Φ (CIOÈ STA SULLA SUPERFICIE)

$$P = (x_0, y_0)$$



SIMILMENTE POSSO DEFINIRE $\gamma_{y_0}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ CHE È
LA CURVA DEFINITA SU UN INTORNO $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) = U$
TALE CHE IL SEGMENTO $U \times \{y_0\} \subseteq A$ È TALE
CHE $\gamma_{y_0}(x) = \Phi(x, y_0) \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

$$P = (x_0, y_0)$$



SE ADESSO VADO A CALCOLARE $\dot{\gamma}_{x_0}(y_0)$ SARÀ UN
VETTORE TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO

$$\gamma_{x_0}(y_0) = \Phi(x_0, y_0) = P$$

QUINDI RISULTERÁ CHE $\dot{\gamma}_{x_0}(y_0)$ È TANGENTE ALLA SUPERFICIE NEL PUNTO P.

SIMILMENTE AVRÒ $\dot{\gamma}_{y_0}(x_0)$ È TANGENTE ALLA SUPERFICIE NEL PUNTO P.

RICORDIAMO CHE $\gamma_{y_0}(x) = \Phi(x, y_0)$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}_{y_0}(x_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\text{ANALOGALMENTE } \dot{\gamma}_{x_0}(y_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

IN PARTICOLARE HO TROVATO CHE I VETTORI

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ E } \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ SONO TANGENTI ALLA SUPERFICIE NEL PUNTO } P = \Phi(x_0, y_0)$$

ESSENDO LA SUPERFICIE Φ REGOLARE HO CHE

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

IMPLICA CHE $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)$ E $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ NON SONO PARALLELI TRA LORO.

$\Rightarrow$ POSSO DEFINIRE IL PIANO CONTENENTE P E LE DIREZIONI INDIVIDUATE DAI DUE VETTORI:

$$P + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

RETTA DI EQUAZIONE

PARAMETRICA

PIANO

$$= \Phi(x_0, y_0) + \nabla \Phi(x_0, y_0) [(x - x_0, y - y_0)]$$

RISULTA TANGENTE ALLA SUPERFICIE NEL PUNTO $\Phi(x_0, y_0)$

HO ANCHE CHE $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ È

ORTOGONALE A $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)$ E $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$ È ORTOGONALE AL PIANO DETERMINATO DA QUESTE DUE DIREZIONI $\Rightarrow$ ORTOGONALE AL PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE NEL PUNTO $\Phi(x_0, y_0)$

QUINDI:

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ È IL VETTORE
ORTOGONALE ALLA
SUPERFICIE NEL PUNTO
 $\Phi(x_0, y_0)$

OSSERVAZIONE

SE HO UNA CURVA NEL PIANO TIPICAMENTE È ESPRESSA IN FORMA PARAMETRICA $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ PARAMETRIZZA IL SOSTEGNO DI UNA CURVA.

ALTERNATIVAMENTE POTREI DEFINIRE UNA CURVA COME LUOGO DEGLI ZERI DI UNA CERTA FUNZIONE $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ SOSTEGNO DELLA CURVA: $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$

ESEMPIO

CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1 CENTRATA NELL' ORIGINE $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$

$$\Rightarrow \{(x,y): x^2+y^2=1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2-1=0\}$$

SE CHIAMO $g(x,y) = x^2+y^2-1$

$$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: g(x,y)=0\}$$

ESEMPIO

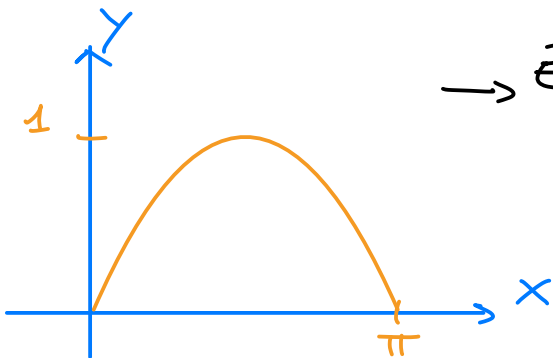
$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$$

$$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: g(x,y)=0\}$$

$x^2 + 4y^2 = 4$ È UN ELISSE

OSSERVAZIONE

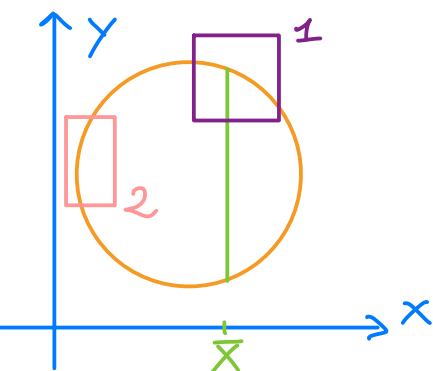
ORA MI DOMANDO SE ALCUNE CURVE IN $\mathbb{R}^2$ SI POSSONO ESPRIMERE COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE



→ È IL GRAFICO DI $\sin(x)$ SU $[0, \pi]$

QUANDO POSSO ESPRIMERE UNA CURVA COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE?

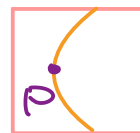
ESEMPIO



QUESTA NON È UNA FUNZIONE, MA LOCALMENTE È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE.

NEL QUADRATO 1 POSSO ESPRIMERE

LA CURVA COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE. MA SE PRENDO IL QUADRATO 2, INTORNO AL PUNTO P LA CURVA NON È GRAFICO DI FUNZIONE $x \mapsto g(x)$.



PERÒ POTREI SCRIVERE LA CURVA COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE $y \mapsto g(y)$

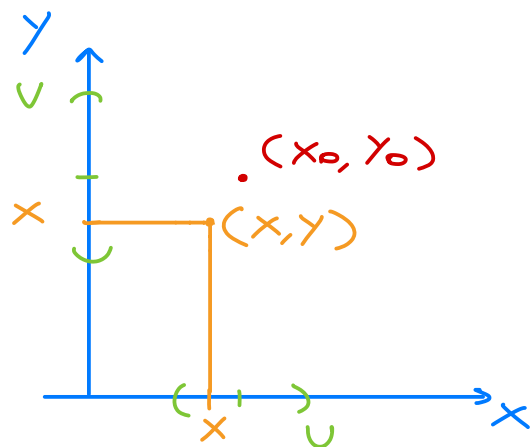
TEOREMA DEL DINI (DELLE FUNZIONI IMPLICITE)

SIA $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DI CLASSE $C^1(A)$ E SIA $(x_0, y_0) \in A$

SIA $F(x_0, y_0) = 0$ E $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ UN INTORNO U DI x_0 ED $\exists$ UN INTORNO V DI y_0 TALE CHE

$\forall x \in U, \exists! y \in V: F(x, y) = 0$



INOLTRE LA FUNZIONE

$g: U \rightarrow V, y = g(x)$ SODISFA

DI ESSERE DI CLASSE $C^1(U)$

E VALE LA SEGUENTE

FORMULA:

$$g'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO PER IPOTESI CHE $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

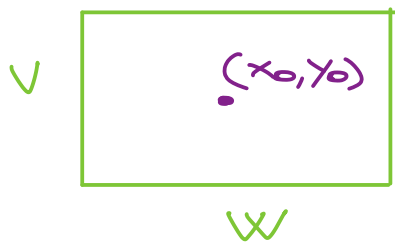
E SUPPONIAMO CHE $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$

ESSENDO $\frac{\partial F}{\partial y}$ CONTINUA, CI SARÁ UN INTORNO DI (x_0, y_0) IN CUI $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$

SCELGO QUESTO INTORNO NELLA FORMA $W \times V$ DOVE $W = [x_0 - \kappa, x_0 + \kappa]$ E $V = [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$

$\Rightarrow \forall x, y \in W \times V$ HO CHE $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$

SE FISSO x IN W E GUARDO $y \mapsto F(x, y)$ QUESTA FUNZIONE RISULTA CRESCENTE PERCHÉ LA DERIVATA È > 0



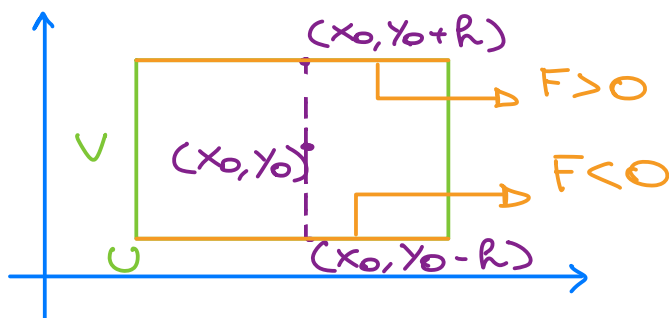
IN PARTICOLARE SARÁ CRESCENTE LA FUNZIONE $y \mapsto F(x_0, y)$

SO ANCHE CHE $F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow F(x_0, y_0 - \rho) < 0$ MENTRE $F(x_0, y_0 + \rho) > 0$

MA F È CONTINUA

$\Rightarrow \exists$ UN INTORNO U DI x_0 CON $U \subseteq W$:

$F(x_0, y_0 - \rho) < 0$
 $F(x_0, y_0 + \rho) > 0$
 $\forall x \in U$



ADESSO HO CHE $\forall x \in U$ LA FUNZIONE $y \mapsto F(x, y)$ È CRESCENTE STRETTAMENTE IN $[y_0 - \rho, y_0 + \rho]$ E

NEGATIVA IN $y_0 - \rho$ E POSITIVA IN $y_0 + \rho$

$\Rightarrow \exists ! g(x) := y \in (y_0 - \rho, y_0 + \rho) : F(x, y) = F(x, g(x)) = 0$

COSÌ ABBIAMO DIMOSTRATO LA PRIMA PARTE DEL

TEOREMA.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE $g \in C^1(U)$ E VALE LA FORMULA:

$$g'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

PER FARLO DEFINISCO $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ DATA DA

$$G(t) = F(x' + t(x - x'), g(x') + t(g(x) - g(x')))$$

DOVE x E x' SONO PUNTI FISSATI IN U

$$\Rightarrow \text{RISULTA } G(0) = F(x', g(x')) = 0 \text{ GIÀ DIMOSTRATO}$$

$$G(1) = F(x, g(x)) = 0 \text{ GIÀ DIMOSTRATO}$$

ADESSO FACCIO

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x' + t(x - x'), g(x') + t(g(x) - g(x')))(x - x') \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial y}(x' + t(x - x'), g(x') + t(g(x) - g(x')))(g(x) - g(x')) \end{aligned}$$

PER IL TEOREMA DI ROLLE

$$\Rightarrow \exists \tau \in (0, 1): G'(\tau) = 0$$

QUINDI CHIAMANDO $\xi = x' + \tau(x - x')$

$$\eta = g(x') + \tau(g(x) - g(x'))$$

HO CHE:

$$\begin{aligned} 0 = G'(\tau) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)(x - x') + \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)(g(x) - g(x')) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) - g(x') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)}(x - x')$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(x')| = \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) \right|}{\left| \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) \right|} |x - x'| \leq$$

$$\begin{array}{l} \text{max} \in \text{min} \\ \text{ESISTONO} \\ \text{PERCHE } W \times V \end{array} \leq \frac{\max_{W \times V} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) \right|}{\min_{W \times V} \left| \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) \right|} |x - x'|$$

È UN RETTANGOLO COMPATTO

$$\Rightarrow |g(x) - g(x')| \leq L(x - x')$$

$$\Rightarrow g \text{ È LIPSCIZIANA} \Rightarrow \text{È CONTINUA}$$

SE $x \neq x'$ POSSO SCRIVERE

$$\frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \frac{- \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)}$$

FACCIO TENDERE $x' \rightarrow x$ E OTTIENGO

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{- \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta)} = \\ &= \frac{- \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \end{aligned}$$

$$\text{VISTO CHE } \xi = x' + \tau(x - x') \rightarrow x$$

$$\eta = g(x') + \tau(g(x) - g(x')) \rightarrow g(x)$$

OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO $F: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ DI CLASSE $C^1(A)$ E
SUPPONIAMO $\{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$ È IL LUOGO DEI
PUNTI CHE DETERMINANO UNA CERTA CURVA E

SUPPONIAMO $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$

$\Rightarrow F(x_0, y_0) = 0$, $(x_0, y_0) \in A$, E SUPPONIAMO

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ IL TEOREMA PRECEDENTE IMPLICA CHE IN UN
INTORNO U DI x_0 IL LUOGO DEI PUNTI

$\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ COINCIDE CON IL GRAFICO
DI UNA FUNZIONE $g: U \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow F(x, g(x)) = 0$

$\forall x \in U$ E VICEVERSA SE x, y SONO TALI CHE
 $F(x, y) = 0$, $x \in U \Rightarrow y = g(x)$

IN PARTICOLARE LA CURVA $\gamma(t): U \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\gamma(t) = (t, g(t))$ È UNA PARAMETRIZZAZIONE
LOCALE DEL SOSTEGNO DI $\{F(x, y) = 0\}$

$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (1, g'(t))$ TANGENTE A $\{F(x, y) = 0\}$

SUPPONIAMO ANCHE CHE

$$g'(t) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(t, g(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, g(t))}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(t, g(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, g(t))} \right) \text{ È TANGENTE A } \{F(x, y) = 0\}$$

QUINDI

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

SE ORA FACCIAMO

$$\nabla F(x_0, y_0) \cdot \gamma'(x_0) =$$

$$= \nabla F(x_0, y_0) \cdot \left(1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(t, \gamma(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, \gamma(t))} \right) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

$\Rightarrow$ DEDUCO CHE $\nabla F(x_0, y_0)$ È ORTOGONALE
AL VETTORE TANGENTE ALLA CURVA

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0)$ È ORTOGONALE ALLA CURVA
NEL PUNTO (x_0, y_0)



OSSERVAZIONE

IL TEOREMA PRECEDENTE VALE ANCHE PER
FUNZIONI $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

QUINDI IL TEOREMA AFFERMEREBBE:

SE $(x_0, y_0, z_0) \in A: F(x_0, y_0, z_0) = 0$ E

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ INTORNI U_1, U_2, U_3 DI x_0, y_0, z_0

RISPETTIVAMENTE TALE CHE

$\exists \gamma: U_1 \times U_2 \rightarrow U_3, \gamma(x, y) \in U_3 \quad \forall x, y \in U_1 \times U_2$

$$E \quad F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall x, y \in U_1 \times U_2$$

INOLTRE $g \in C^1(U_1 \times U_2)$ E

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

QUINDI IL LUOGO DEI PUNTI $\{F(x, y, z) = 0\}$ SI PUÒ ESPRIMERE COME SOSTEGNO DI UNA SUPERFICIE CHE È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $g: U_1 \times U_2 \rightarrow U_3$ INTORNO AL PUNTO (x_0, y_0, z_0)

QUESTA SUPERFICIE È

$$\Phi(x, y): U_1 \times U_2 \rightarrow U_1 \times U_2 \times U_3$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

ANCHE IN QUESTO CASO

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

RISULTA ESSERE ORTOGONALE AI VETTORI

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) = (1, 0, g(x_0, y_0))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0) = (0, 1, g(x_0, y_0))$$

MA SO ANCHE:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))} = \\ &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))} = \\ &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(1, 0, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}\right) = 0$$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(0, 1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}\right) = 0$$

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ RISULTA ESSERE ORTOGONALE
AL PIANO DETERMINATO DALLE DIREZIONI

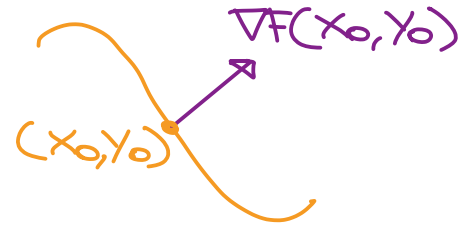
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0) \in \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ È ORTOGONALE AL PIANO
TANGENTE ALLA SUPERFICIE IN (x_0, y_0, z_0)

$\Rightarrow$ ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE STESSA
IN (x_0, y_0, z_0)

INFATTI SE HO $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ E STUDIO IL
LUOGO DEI PUNTI $\{F(x, y) = 0\}$

$\nabla F(x_0, y_0)$ È PERPENDICOLARE
ALLA CURVA



SE $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \{F(x, y, z) = 0\}$ DETERMINANO
UNA SUPERFICIE E SE $(x_0, y_0, z_0) \in$ ALLA
SUPERFICIE, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ È ORTOGONALE
ALLA SUPERFICIE STESSA

OSSERVAZIONE



$g: A \rightarrow \mathbb{R}$, g DI CLASSE $C^1(A)$ E
 $\gamma: [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ REGOLARE.

CALCOLARE $\max$ E $\min$ DI g
SULLA CURVA $\gamma([a, b])$

SE $\gamma(t) \in A$ È UN PUNTO SULLA CURVA TALE
CHE g È MASSIMO O MINIMO SU $\gamma(t)$

$\Rightarrow g(\gamma(s))$, $s \in (a, b)$ QUESTA FUNZIONE
AMMETTE MASSIMO O MINIMO PER $s=t$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} g(\gamma(s)) = 0 \quad \text{IN } s=t$$

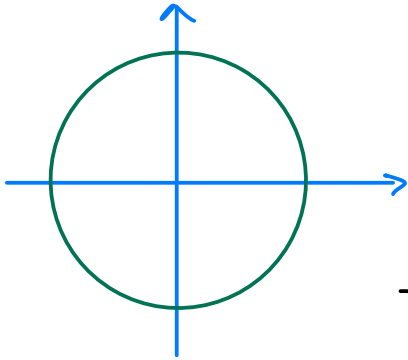
$$\Rightarrow \nabla g(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0 \quad \text{IN } s=t$$

CIOÈ $\nabla g(\gamma(t))$ È ORTOGONALE A $\dot{\gamma}(t)$

ESEMPIO

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

STUDIAMO MASSIMI O MINIMI DI $g(x, y) = x^2 - y$
VINCOLATI AL SOSTEGNO DI γ



$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, -1)$$

$$\Rightarrow \nabla g(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) =$$

$$= (2\cos t, -1) \cdot (-\sin t, \cos t) =$$

$$= -2\cos t \sin t - \cos t = -\cos t (2\sin t + 1)$$

QUINDI STUDIAMO I PUNTI t IN CUI

$$-\cos t (2\sin t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos t = 0 \quad \text{E} \quad 2\sin t + 1 = 0$$

$\Downarrow$

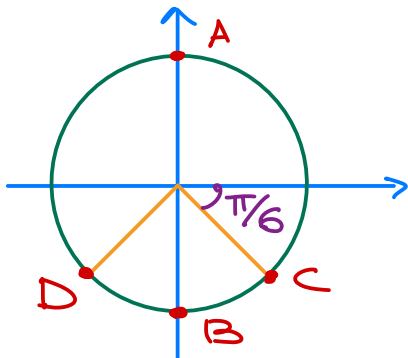
$$t = \pm \frac{\pi}{2}$$

$\Downarrow$

$$\sin t = -\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$t = -\frac{\pi}{6} \quad \text{E} \quad t = \frac{7\pi}{6}$$



$$\text{QUINDI } \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) = A$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1) = B$$

$$t = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \gamma\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = C$$

$$t = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow \gamma\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = D$$

QUINDI

$$f(A) = f(0, 1) = -1$$

$$f(B) = f(0, -1) = 1$$

$$f(C) = 5/4$$

$$f(D) = 5/4$$

PERCIÒ

$f(A)$ È min ASSOLUTO

$f(B)$ NON SI SA

$f(C) = f(D)$ SONO max ASSOLUTI

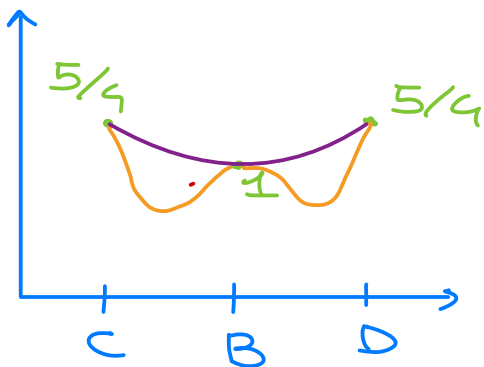
PER B HO TRE POSSIBILI SOLUZIONI:

1) max RELATIVO

2) min RELATIVO

3) NESSUNO DEI DUE (PUNTO DI SELLA)

POSSIAMO DIMOSTRARE CHE B È min RELATIVO



CASO min RELATIVO

CASO max RELATIVO

$\Rightarrow$ AUREI ALTRI 2 PUNTI

IN CUI SI ANNULLA

LEZIONE #23 09/05/23

OSSERVAZIONE

ABBIAMO $F: A \rightarrow \mathbb{R}$

SUPPONIAMO DI AVERE UNA CURVA:

$$\{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}$$

$$\text{SE } (x_0, y_0) \in C : \frac{dF}{dx}(x_0, y_0) \neq 0$$

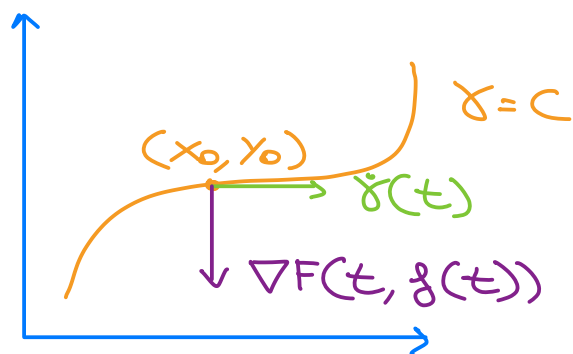
$\Rightarrow$ POSSO ESPRIMERE L'INSIEME C COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE $y = g(x)$ SU UN OPPORTUNO INTORNO DI x_0

SE TALE INTORNO È $U \Rightarrow$ LA CURVA $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, g(t))$ HA SOSTEGNO L'INSIEME DENTRO L'INTORNO $U \times V$ DOVE $V \ni y_0$ È UN INTORNO DI y_0

ABBIAMO ASSUNTO CHE

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \right)$$



ABBIAMO OSSERVATO CHE:

$$\begin{aligned} \nabla F(t, g(t)) &= \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, g(t)), \frac{\partial F}{\partial y}(t, g(t)) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) \cdot \nabla F(t, g(t)) = 0$$

$\Rightarrow \nabla F(t, g(t))$ È ORTOGONALE ALLA CURVA γ NEL

PUNTO $(t, g(t)) = \gamma(t)$

SE STUDIO $\{F(x, y, z) = 0\} = C \Rightarrow$ PER IL TEOREMA DEL DINI SAPPIAMO CHE SE

$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow$ POSSO TROVARE UN INTORNO U DI (x_0, y_0) , $U \subseteq \mathbb{R}^2$ E UNA FUNZIONE $g: U \rightarrow V$ CON V INTORNO DI z_0 TALE CHE $C \cap (U \times V)$ È GRAFICO DELLA g OVERO POSSO DEFINIRE $\phi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$ COME $\phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$
IL SOSTEGNO DI ϕ COINCIDE CON IL LUOGO $C \cap (U \times V)$

IL TEOREMA DEL DINI CI DICE CHE

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(1, 0, \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))} \right)$$

$$\text{INOLTRE } \nabla F(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\nabla F(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow \nabla F(x, y, g(x, y))$ È ORTOGONALE AI VETTORI

$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ E $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ CHE SONO TANGENTI ALLA SUPERFICIE

$\Rightarrow \nabla F(x, y, g(x, y))$ È ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE ϕ

ESEMPIO METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

PRENDIAMO UNA SUPERFICIE DI TIPO GRAFICO

$\Phi(u, v) = (u, v, q(u, v, q(u, v)))$ DOVE q È UNA FUNZIONE DI CLASSE $C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

VOGLIAMO TROVARE I max E I min DI UNA FUNZIONE $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ VINCOLATI ALLA SUPERFICIE Φ

$$g(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 + x_2^2 + x_3^2$$

SE AD ESEMPIO $(x_1, x_2, q(x_1, x_2))$ SIA max o min RELATIVO SULLA SUPERFICIE

$\Rightarrow g \circ \Phi(u, v) = g(u, v, q(u, v))$ AMETTE max o min RELATIVO NEL PUNTO $u = x_1, v = x_2$

$\Rightarrow$ IL PUNTO $(u, v) = (x_1, x_2)$ È UN PUNTO STAZIONARIO DI $g \circ \Phi$

$\Rightarrow$ CALCOLO $\nabla(g \circ \Phi)(u, v) =$

$$= \nabla g(\Phi(u, v)) \cdot \nabla \Phi(u, v) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\Phi(u, v)), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\Phi(u, v)), \frac{\partial g}{\partial x_3}(\Phi(u, v)) \right).$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

QUESTO PRODOTTO DEVE ESSERE = 0

SE $(u, v) = (x_1, x_2)$ È STAZIONARIO

$$\Rightarrow \nabla(g \circ \Phi)(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial u}(x_1, x_2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial v}(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla g(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$$

$$\nabla g(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$$

IN UN PUNTO STAZIONARIO DI g SULLA SUPERFICIE Φ RISULTA CHE $\nabla g(\Phi(x_1, x_2))$ È ORTOGONALE AI VETTORI TANGENTI ALLA SUPERFICIE

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(x_1, x_2) \in \frac{\partial \Phi}{\partial v}(x_1, x_2)$$

RICORDIAMO CHE $g(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 + x_2^2 + x_3^2$

$$\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

$$\Rightarrow \nabla g(x_1, x_2, x_3) = (-2, 2x_2, 2x_3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial g}{\partial v}(u, v))$$

$\Rightarrow$ ESPLICITO LE CONDIZIONI DI ORTOGONALITÀ.

LA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ

$(x_1, x_2, g(x_1, x_2))$ SIA max o min RELATIVO

DI $\mathcal{L}$ SUL VINCOLO Φ È CHE:

$$(-2, 2x_2, 2x_3) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(x_1, x_2)\right) = 0$$

$$(-2, 2x_2, 2x_3) \cdot \left(0, 1, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(x_1, x_2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + 2x_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(x_1, x_2) = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

SE AD ESEMPIO $\mathcal{L}(\omega, v) = 3\omega + v$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}(\omega, v) = 3$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\omega, v) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

HO ANCHE IL VINCOLO

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \mathcal{L}(x_1, x_2))$$

$$\Rightarrow x_3 = \mathcal{L}(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = x_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{POSSO TROVARE} \\ x_1, x_2, x_3$$

SUPPONIAMO ORA IL VINCOLO DATO DALLA

SUPERFICIE $\Phi(\omega, v) = (\omega, v, \mathcal{L}(\omega, v))$

SIA SOSTITUITO DA UNA SUPERFICIE IN FORMA

IMPLICITA: LA SUPERFICIE SU CUI CALCOLARE
max e min RELATIVI È IL LUOGO DI ZERI DI
UNA CERTA FUNZIONE $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

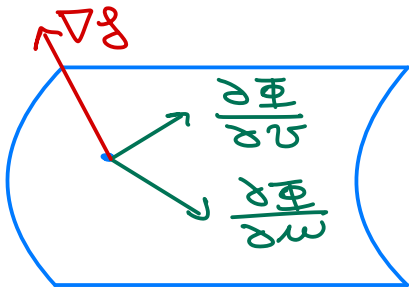
$$C = \{ (x_1, x_2, x_3) : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$$

SE AVESSI A DISPOSIZIONE UNA PARAMETRIZZAZIONE
 Φ DI $C \Rightarrow$ AVREI MESSO A SISTEMA LE
EQUAZIONI

$$\begin{cases} \nabla g(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 \\ \nabla g(\Phi(x_1, x_2)) \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla g$ È ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE C .

DAL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE ∇F
È ORTOGONALE A C NEL VINCOLO.



$\Rightarrow$ DEDUCO CHE ∇g È
PARALLELO A ∇F NEI PUNTI
STAZIONARI

$\Rightarrow$ NEI PUNTI STAZIONARI $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \cap C$
HO CHE $\nabla g(x_1, x_2, x_3)$ È PARALLELO AL
 $\nabla F(x_1, x_2, x_3)$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla F(x_1, x_2, x_3)$$

SE CERCO I PUNTI STAZIONARI DI g NEL
VINCOLO $C = \{ F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$ POSSO STUDIARE

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \\ F(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 4 \text{ EQUAZIONI} \\ 4 \text{ INCOGNITE} \end{array}$$

SE RIESCO A RISOLVERLO, LE SOLUZIONI (x_1, x_2, x_3) SONO I PUNTI STAZIONARI DI g NEL VINCOLO C .

QUESTO È IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

OSSERVAZIONE

LE PRIME 3 EQUAZIONI CI DICONO CHE I PUNTI STAZIONARI COME SOPRA SONO ANCHE PUNTI STAZIONARI DELLA FUNZIONE $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) - \lambda F(x_1, x_2, x_3)$$

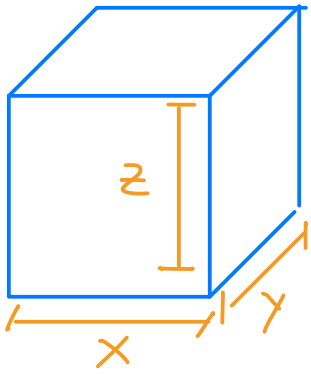
ANCHE PER I VINCOLI DELLA FUNZIONE

$C = \{F(x, y) = 0\}$, SE (x_0, y_0) È STAZIONARIO DI g SU C

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ F(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE UNA SCATOLA TRA



TUTTE LE SCATOLE SENZA
SUPERFICIE SUPERIORE DI
DIMENSIONE x, y, z .

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

CERCO QUELLA CHE HA L'AREA DELLA SUPERFICIE
FISSATO = 12 MINIMIZZA IL VOLUME

$$\text{VOLUME} = V = g(x, y, z) = xyz$$

$$\text{AREA} = A = xy + 2xz + 2zy = 12$$

POSSO ESPRIMERLO COME LUOGO DI ZERI DELLA
FUNZIONE $F(x, y, z) = xy + 2xz + 2zy - 12$

IL METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE MI
DICE CHE I PUNTI STAZIONARI DELLA g SUL
VINCOLO SODISFONO

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} \Rightarrow yz = \lambda(y + 2z) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} \Rightarrow xz = \lambda(x + 2z) \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_3} \Rightarrow xy = \lambda(2x + 2y) \\ xy + 2xz + 2zy = 12 \end{cases}$$

RISOLVENDO HO $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$ UNICA POSSIBILITÀ
QUESTO È UN $\begin{cases} x, y, z > 0 \end{cases}$ DATO $x, y, z > 0$
max DIMOSTRARE

LEZIONE #24 12/05/23

DEFINIZIONE

SIA $w: I \rightarrow \mathbb{R}$

SIA $w'(t) = g(t)$

QUESTA È UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE

PERCHÉ L'INCOGNITA È LA FUNZIONE w .

PER TROVARE w BASTA TROVARE UNA PRIMITIVA DI g .

$$F(t) = \int_0^t g(s) ds$$

⇒ LA FUNZIONE $w(t) = F(t) + c$ SODISFA

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $\forall c \in \mathbb{R}$

A VOLTE È RICHiesto CHE $w(t_0) = w_0$ PER UN CERTO $t_0 \in I$ E $w_0 \in \mathbb{R}$ (PROBLEMA DI

⇒ BASTA RISOLVERE $\begin{cases} w' = g \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$ CAUCHY)

$$\Rightarrow \begin{cases} w(t) = F(t) + c \\ F(t_0) + c = w_0 \end{cases} \Rightarrow c = w_0 - F(t_0)$$

⇒ LA SOLUZIONE DEL SISTEMA È

$$w(t) = F(t) + w_0 - F(t_0)$$

OSSERVAZIONE

POTREBBE SUCCEDERE DI AVERE A CHE FARE

CON $w'(t) = g(t, w(t))$

PER ESEMPIO $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

IN GENERALE NON LA SAPPIAMO RISOLVERE.

POTREMO ANCHE AVERE

$$w^{(k)}(t) = f(t, w(t), w'(t), \dots, w^{(k-1)}(t))$$

f IN QUESTO CASO PUÒ ESSERE $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

ESEMPIO

SIA $f(t, w(t)) = a(t)w(t)$ DOVE $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

OPPURE $f(t, w(t)) = a(t)f(w(t))$ DOVE

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

OVVIAMENTE LA 1° È UN CASO DELLA 2°

DEFINIZIONE

EQUAZIONI DEL TIPO $w'(t) = a(t)f(w(t))$

PRENDONO IL NOME DI EQUAZIONI A VARIABILI

SEPARABILI

PER RISOLVERLA SE $f \neq 0$, DIVIDO PER $f(w(t))$

E OTTENGO:

$$\frac{w'(t)}{f(w(t))} = a(t)$$

MI ACCORGO CHE SE LA FUNZIONE $1/f(x)$

AMMETTE PRIMITIVA $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(t)} dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} G(w(t)) &= G'(w(t)) w'(t) = \\ &= \frac{w'(t)}{f(w(t))} \end{aligned}$$

$\Rightarrow G(w(t))$ È LA PRIMITIVA DI $\frac{w'(t)}{f(w(t))}$

E QUINDI PER RISOLVERE L'EQUAZIONE
CALCOLO UNA PRIMITIVA DI $q(t)$ E LA CHIAMO:

$$A(t) = \int_{t_0}^t q(s) ds$$

$\Rightarrow$ DALL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE HO:

$$G(w(t)) = A(t) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

SE DERIVO L'EQUAZIONE APPENA TROVATA

VEDO CHE $w(t)$ SODISFA $\frac{w'(t)}{g(w(t))} = q(t)$

SE G È INVERTIBILE $\Rightarrow w(t) = G^{-1}(A(t) + c)$

ESEMPIO

STUDIAMO IL MOTO DI UN CORPO CHE CADE DA UNA
CERTA ALTEZZA.

$x(t)$ RAPPRESENTA L'ALTEZZA DI TALE CORPO
LE LEGGI DELLA FISICA MI DICONO CHE

$$x'(t) = \sqrt{2gx(t)}$$

SE AD ESEMPIO IL CORPO PARTE DA UNA
ALTEZZA AL TEMPO 0 DI 10 m

$$\Rightarrow x(0) = 10 \text{ m}$$

QUAL'È LA POSIZIONE DEL CORPO PER UN
TEMPO $t > 0$.

DOBBIAMO PERCIÒ RISOLVERE IL SISTEMA:

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2gx(t)} \\ x(0) = 10 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x'(t) = \underbrace{\sqrt{2g}}_{q''(t)} \cdot \underbrace{\sqrt{x(t)}}_{g''(x(t))}$$

$$\Rightarrow \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = \sqrt{2g}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = \int \sqrt{2g} = \sqrt{2g} t + c$$

PER CALCOLARE $\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}$ CERCO UNA

PRIMITIVA DI $\frac{1}{\sqrt{y}}$ $dy \rightarrow 2\sqrt{y}$

$\Rightarrow$ UNA PRIMITIVA DI $\frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}$ È $2\sqrt{x(t)}$

$$\Rightarrow \int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}} = \int \sqrt{2g} \quad \text{SI TRADUCE IN} \\ 2\sqrt{x(t)} = \sqrt{2g} t + c$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{(\sqrt{2g} t + c)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{(\sqrt{2g} t + c)^2}{4} \\ x(0) = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(0) = \frac{c^2}{4} = 10 \Rightarrow c = \pm \sqrt{40} \rightarrow \text{PRENDO}$$

SOLO IL +

PER LA QUESTIONE
DEL VERSO DELLA
VELOCITÀ

DEFINIZIONE

$$w'(t) = a(t)w(t) + b(t) \quad a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

PRENDONO IL NOME DI EQUAZIONI LINEARI

$$\text{SE } b(t) \equiv 0 \Rightarrow w'(t) = a(t) w(t)$$

QUESTA LA SAPPIAMO GIÀ RISOLVERE

$$\Rightarrow A(t) = \int a(t)$$

$$G(x) = \log x$$

$$\Rightarrow \log(w(t)) = \int \frac{w'(t)}{w(t)}$$

$$\Rightarrow \log(w(t)) = A(t) + c$$

$$\Rightarrow e^{\log(w(t))} = e^{A(t)+c}$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{A(t)} \underbrace{e^c}_{\text{RIMANE COSTANTE}} = e^{A(t)} \alpha$$

$\hookrightarrow$ RIMANE COSTANTE

$$= \alpha \in \mathbb{R}$$

QUESTA È UNA SOLUZIONE DI $w'(t) = a(t) w(t)$

SE $b(t) \neq 0$ POSSO CERCARE UNA SOLUZIONE DI

$w'(t) = a(t) w(t) + b(t)$ NELLA FORMA

$w(t) = \alpha e^{A(t)} c(t)$ CON $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DA TROVARE

$$\begin{aligned} \Rightarrow w'(t) &= \alpha e^{A(t)} a(t) c(t) + \alpha e^{A(t)} c'(t) = \\ &= a(t) w(t) + \alpha e^{A(t)} c'(t) \end{aligned}$$

AFFINCHÉ $w(t) = \alpha e^{A(t)} c(t)$ RISOLVA

L'EQUAZIONE $w'(t) = a(t) w(t) + b(t)$ DEVE

SUCCEDERE CHE

$$\alpha e^{A(t)} c'(t) = b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = \alpha^{-1} b(t) e^{-A(t)}$$

INTEGRO

$$c(t) = \alpha^{-1} \int b(t) e^{-A(t)}$$

$$\Rightarrow w(t) = \alpha e^{A(t)} \left\{ \alpha^{-1} \int b(t) e^{-A(t)} + c \right\}$$

ESEMPIO

$$w'(t) = \frac{3 w(t)}{t} + (t^2 + 1)$$

$$w'(t) = a(t) w(t) + b(t) \text{ HO CHE}$$

$$a(t) = \frac{3}{t}$$

$$b(t) = t^2 + 1$$

$$A(t) = 3 \log t$$

$$\Rightarrow e^{-A(t)} = e^{-3 \log t} = t^{-3} = \frac{1}{t^3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int b(t) e^{-A(t)} &= \int \frac{t^2 + 1}{t^3} = \int \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} = \\ &= \log t - \frac{1}{2t^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w(t) = \alpha e^{3 \log t} \left[\alpha^{-1} \left(\log t - \frac{1}{2t^2} \right) + c \right] =$$

$$= 2t^3 \left[2^{-1} \log t - 2^{-1} \frac{1}{2t^2} + c \right] =$$

$$= t^3 \log t - \frac{t}{2} + 2ct^3$$

SE AVESSIMO AVUTO $w(t_0) = w_0$

BASTA FARE IL SISTEMA $\begin{cases} w'(t) = a(t)w(t) + b(t) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$

DEFINIZIONE

IL SISTEMA PRECEDENTE PRENDE IL NOME DI PROBLEMA DI CAUCHY

ESEMPIO

ANALIZZIAMO DELLE EQUAZIONI A COEFFICIENTI COST.

$$w'' + 2a w' + b w = g(t)$$

CERCO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE OMOGENEA

OVVERO PONENDO $g(t) = 0$

$$\Rightarrow w'' + 2a w' + b w = 0$$

LE CERCO NELLA FORMA $w = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow w'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

+

$$2a w' = 2a \lambda e^{\lambda t}$$

+

$$b w = b e^{\lambda t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow w'' = \lambda^2 e^{\lambda t} \\ + \\ 2a w' = 2a \lambda e^{\lambda t} \\ + \\ b w = b e^{\lambda t} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

QUINDI PER TROVARE λ RISOLVO L'EQUAZIONE DI 2° GRADO.

PRIMA DI PARLARE DEI λ OSSERVO DELLE COSE.

SIANO λ_1 E λ_2 SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE PRECEDENTE.

$\Rightarrow e^{\lambda_1 t}$ E $e^{\lambda_2 t}$ SONO SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

$\Rightarrow$ MI ACCORCO CHE UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $e^{\lambda_1 t}$ E $e^{\lambda_2 t}$, CIOÈ $w = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$ È ANCORA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

VERIFICA PER ESERCIZIO

IN PARTICOLARE TROVO CHE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI FORMA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLO SPAZIO DELLE FUNZIONI $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ESEMPIO

$$w'' + w' - 2w = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 2$$

SE CERCO SOLUZIONI NELLA FORMA $e^{\lambda t}$ MI RIDUCO A STUDIARE L'EQUAZIONE

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow w(t) = e^t$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

OMOGENEA

$$w(t) = e^{-2t} \text{ ANCHE LO È}$$

PER QUELLO OSSERVATO PRECEDENTEMENTE HO CHE:

$$w(t) = \alpha e^t + \beta e^{-2t} \text{ È SOLUZIONE DELLA} \\ \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE} \\ \text{OMOGENEA}$$

ESEMPIO

$$w'' + w = 0$$

SE CERCO SOLUZIONI NELLA FORMA $e^{\lambda t}$ MI
RIDUCO A STUDIARE $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = i \\ \lambda_2 = -i \end{cases} \Rightarrow \lambda_1^2 = -1 \text{ E } \lambda_2^2 = -1 \text{ SONO} \\ \text{SOLUZIONI DI } \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{it} \text{ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE} \\ \text{DIFFERENZIALE}$$

$$w(t) = e^{-it} \text{ È SOLUZIONE}$$

MA C'È UN PROBLEMA.

IO CERCavo SOLUZIONI REALI E QUESTE NON
LO SONO.

$$\text{PERÒ } e^{it} = \cos t + i \sin t \\ e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

IN GENERALE

$$\alpha e^{i\theta} = \alpha \cos \theta + i \alpha \sin \theta$$

$$\Rightarrow w(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it} \quad \bar{\text{E}} \text{ SOLUZIONE} \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{SE PONGO } \alpha = \beta = 1/2$$

$$\Rightarrow w(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow w(t) = \cos t \text{ SODISFA L'EQUAZIONE} \\ \text{DIFFERENZIALE } w'' + w = 0$$

$$\text{SE FACCI } e^{it} - e^{-it} \quad \bar{\text{E}} \text{ SOLUZIONE MA} \\ \text{QUESTO } \bar{\text{E}} \quad e^{it} - e^{-it} = 2i \sin t$$

$$\Rightarrow w(t) = 2i \sin t \text{ SODISFA L'EQUAZIONE} \\ \text{DIFFERENZIALE OMOGENEA}$$

$$\text{MA } 2i \bar{\text{E}} \text{ UNA COSTANTE } \Rightarrow \sin t \text{ SODISFA} \\ \text{L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA}$$

$$\text{SE } w_1(t) \text{ E } w_2(t) \text{ SONO SOLUZIONI}$$

$$\text{DELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA}$$

$$\Rightarrow \text{ANCHE } \alpha w_1 + \beta w_2 \quad \bar{\text{E}} \text{ SOLUZIONE } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\text{SE } e^{it} \bar{\text{E}} \text{ SOLUZIONE E } e^{-it} \text{ ANCHE}$$

$$\text{CON } \alpha = \frac{1}{2i} \quad \text{E } \beta = -\frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \alpha e^{it} + \beta e^{-it} = \sin t \quad \text{ED } \bar{\text{E}} \text{ SOLUZIONE}$$

LEZIONE #25 18/05

DEFINIZIONE

SI DICE EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE m

$$w^{(m)} = f(t, w(t), w'(t), \dots, w^{(m-1)}(t)) \quad 1$$

IL NOSTRO SCOPO SARÁ TROVARE $w(t)$ CHE SODISFA L'EQUAZIONE.

MENTRE IL PROBLEMA DI CAUCHY È NELLA FORMA

$$\begin{cases} w'(t) = f(t, w(t)) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases} \quad *$$

RISOLVERE IL SISTEMA $*$, VUOL DIRE TROVARE UNA FUNZIONE $w(t)$ SU UN INTERVALLO $I \subseteq \mathbb{R}$ CHE CONTIENE $t_0 \in I$, DOVE $w_0 \in \mathbb{R}$

POSSIAMO RICONDURCI AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PRIMO ORDINE A PARTIRE DALL'EQUAZIONE 1 PONENDO

$$\begin{aligned} w_1 &:= w \\ w_2 &:= w' \\ &\vdots \\ w_m &:= w^{(m-1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ L'EQUAZIONE 1 DIVENTA

$$\begin{cases} w_m' = f(t, w_1, w_2, \dots, w_{m-1}) \\ w = w_1 \\ w_1' = w_2 \\ \vdots \\ w_{m-1}' = w_m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SE DEFINISCO $\bar{w} = (w_1, \dots, w_m)$

$\Rightarrow \bar{w}' = F(t, \bar{w})$

DOVE

$F(t, \bar{w}) = (w_2, w_3, \dots, w_m, g(t, w_1, \dots, w_{m-1}))$

$F: I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\begin{matrix} \psi & \psi \\ t & \bar{w} \end{matrix}$

NEL PROBLEMA DI CAUCHY HO:

$\bar{w}: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ INCOGNITA

$F(t, \bar{w}): I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$F(t, \bar{w}) = (g_1(t, \bar{w}), g_2(t, \bar{w}), \dots, g_m(t, \bar{w}))$

DOVE

$\bar{w}_1' = g_1(t, \bar{w})$

$\bar{w}_2' = g_2(t, \bar{w})$

$\vdots$

$\bar{w}_m' = g_m(t, \bar{w})$

$\bar{w}(t_0) = \bar{w}_0 \in \mathbb{R}^m, t_0 \in I$

IN FORMA COMPATTA SI SCRIVE

$$\begin{cases} \bar{w}' = F(t, \bar{w}) \\ \bar{w}(t_0) = w_0 \end{cases}$$

DEFINIZIONE

DEFINIAMO EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

QUANDO VOGLIAMO CERCARE $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE

$$w'(t) = f(w(t))g(t)$$

DOVE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

SI RISOLVE COME ABBIAMO GIÀ VISTO COSÌ:

$$\frac{w'(t)}{f(w(t))} = g(t) \quad 2 \quad \text{DIVISO PER } f(w(t))$$

SE z È UNA PRIMITIVA DI $1/f(x)$ MI ACCORGO CHE $z(w(t))$ SODISFA

$$\frac{d}{dt}(z(w(t))) = \frac{1}{f(w(t))} w'(t)$$

L'EQUAZIONE 2 DIVENTA EQUIVALENTE A:

$$z(w(t)) = G(t) + C$$

DOVE G È UNA PRIMITIVA DI $g(t)$ E $C \in \mathbb{R}$

SE z È INVERTIBILE $\Rightarrow$ CHIAMO z^{-1} L'INVERSA ED HO:

$$w(t) = z^{-1}(G(t) + C)$$

PER TROVARE LA C POTREMMO DISPORRE DI UN'INFORMAZIONE AGGIUNTIVA DEL TIPO $w(t_0) = w_0 \Rightarrow$ SOSTITUIAMO $t = t_0$ NELLA EQUAZIONE E HO:

$$w(t_0) = w_0 = z^{-1}(G(t_0) + C)$$

QUINDI DOBBIAMO RISOLVERE $w_0 = z^{-1}(G(t_0) + C)$

$$\Rightarrow z(w_0) = G(w_0) + C$$

$$\Rightarrow C = z(w_0) - G(w_0)$$

ESEMPIO

TASSO DI INTERESSE IN UN CONTO IN BANCA

IL TASSO DI INTERESSE È $p > 0$

SE IL NOSTRO CAPITALE È $w(t)$

$$\Rightarrow w'(t) = pw(t)$$

SUPPONIAMO CHE AL TEMPO t_0 HO CHE

$$w(t_0) = w_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w'(t) = pw(t) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

$$w'(t) = f(w(t))g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{w'(t)}{w(t)} = p \Rightarrow \log(w(t)) = pt + c$$

$$\Rightarrow w(t) = e^{pt+c} = e^{pt} e^c = \alpha e^{pt}$$

PER TROVARE α IMPONGO $w(0) = w_0$

$$\Rightarrow w(0) = w_0 = \alpha$$

$$\Rightarrow w(t) = w_0 e^{pt}$$

SUPPONIAMO ORA CHE TOLGO SOLDI DAL CONTO

OGNI GIORNO:

$$w'(t) = pw(t) - b$$

b RAPPRESENTA IL

PRELIEVO GIORNALIERO

VOGLIO VEDERLO COME

$$w'(t) = f(w(t))g(t)$$

$$\text{PONENDO } f(w(t)) = pw(t) - b$$

$$g(t) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{w'(t)}{pw(t) - b} = 1$$

$$\Rightarrow \text{CERCO LA PRIMITIVA DI } \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{px-b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \log(px-b) \rightarrow \text{PRIMITIVA DI } \frac{1}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \log(pw(t)-b) = t + c$$

$$\Rightarrow \log(pw(t)-b) = pt + \underbrace{pc}$$

c È SEMPRE UNA
COST.

$$\Rightarrow pw(t)-b = e^{pt+c} = e^{pt} e^c = \alpha e^{pt}$$

$$\Rightarrow w(t) = \frac{\alpha e^{pt} + b}{p} = \underbrace{\frac{\alpha}{p}}_{\alpha} e^{pt} + \frac{b}{p}$$

α È SEMPRE COST.

ANCHE QUI SE HO $w(0) = w_0 \Rightarrow$ POSSO
CALCOLARE α

$$w_0 = w(0) = \alpha + \frac{b}{p} \Rightarrow \alpha = w_0 - \frac{b}{p}$$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY È:

$$w(t) = \left(w_0 - \frac{b}{p}\right) e^{pt} + \frac{b}{p}$$

SE $\frac{b}{p} = w_0 \Rightarrow w(t) = \frac{b}{p} \Rightarrow$ IL MIO CONTO
IN BANCA È COST.

$$\Rightarrow b = w_0 p$$

SE $w_0 - \frac{b}{p} > 0 \Leftrightarrow b < w_0 p \Rightarrow$ IL CONTO
CRESCE

SE $\frac{b}{p} > w_0 \Rightarrow$ LA FUNZIONE È DECRESCENTE

QUAL'È IL TEMPO IN CUI IL CONTO DIVENTA ZERO IN QUESTO CASO?

$$w(t) = \left(w_0 - \frac{b}{p}\right) e^{pt} + \frac{b}{p}$$

$\Rightarrow$ DEVO TROVARE $T > 0$ PER CUI $w(T) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(w_0 - \frac{b}{p}\right) e^{Tp} + \frac{b}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \left(w_0 - \frac{b}{p}\right) e^{Tp} = -\frac{b}{p} \Rightarrow e^{Tp} = \frac{-\frac{b}{p}}{w_0 - \frac{b}{p}} > 0$$

$$\Rightarrow Tp = \log\left(\frac{-\frac{b}{p}}{w_0 - \frac{b}{p}}\right)$$

$$= T = \frac{1}{p} \log\left(\frac{-b/p}{w_0 - b/p}\right)$$

ESEMPIO

$$w'(t) = \frac{t + e^t}{w(t)^3}$$

POSSO VEDERLA NELLA FORMA $w'(t) = g(w(t))q(t)$

INFATTI $g(x) = \frac{1}{x^3}$ E $q(x) = t + e^t$

$$\Rightarrow w'(t)w^3(t) = t + e^t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} w^4(t) = \frac{t^2}{2} + e^t + c \Rightarrow w^4(t) = 2t^2 + 4e^t + c$$

ABBIAMO PERÒ UN PROBLEMA: $w^4(t)$ NON È VERAMENTE INVERTIBILE

IN GENERALE HO DUE SOLUZIONI:

$$w(t) = \sqrt[4]{2t^2 + 4e^t + c}$$

$$w(t) = -\sqrt[4]{2t^2 + 4e^t + c}$$

SE AVESSI AVUTO UNA CONDIZIONE INIZIALE DEL TIPO $w(0) = 2$

$$\Rightarrow 2 = \pm \sqrt[4]{4+c} \Rightarrow 16 = 4+c \Rightarrow c = 12$$

QUINDI LE SOLUZIONI SONO

$$w(t) = \pm \sqrt[4]{2t^2 + 4e^t + 12} \quad \text{PERÓ QUALE DEVO USARE??}$$

DATO CHE $w(0) = 2 = \pm \sqrt[4]{16} \Rightarrow$ PRENDO IL +

SE AVESSI AVUTO $w(0) < 0$

$\Rightarrow$ AVREI PRESO IL -

RICORDIAMO PERÓ CHE LA RADICE QUARTA HA 4 SOLUZIONI ALGEBRICHE: $2 \in \mathbb{R}, 2 \in \mathbb{C}$

ESEMPIO

$$w'(t) = 2tw(t) + e^{t^2}$$

IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

RIENTRA NELLA CATEGORIA DELL'EQUAZIONI

DIFFERENZIALI LINEARI DELLA FORMA:

$$w'(t) = a(t)w(t) + b(t) \quad \text{CON } a \text{ E } b \text{ FUNZIONI DI SOLO } t$$

COME ABBIAMO VISTO QUESTA SI RISOLVE COSÍ:

1° STEP:

$$\text{IMPONGO } b(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow w'(t) = a(t)w(t)$$

$\Rightarrow w(t) = \alpha e^{A(t)}$ DOVE $\alpha > 0$ E $A(t)$ È
PRIMITIVA DI $a(t)$

2° STEP:

$$w'(t) = a(t)w(t) + b(t) \quad **$$

CERCO UNA SOLUZIONE COSÌ FATTA:

$$w(t) = c(t) \alpha e^{A(t)} \quad \text{INGLOBO } \alpha \text{ IN } c(t) \\ = c(t) e^{A(t)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w'(t) &= c'(t) e^{A(t)} + c(t) \left(\frac{d}{dt} e^{A(t)} \right) = \\ &= c'(t) e^{A(t)} + \underbrace{c(t) a(t)}_{= w(t)} \underbrace{e^{A(t)}}_{= w(t)} \end{aligned}$$

MI POSSO SCRIVERE

$$w'(t) = c'(t) e^{A(t)} + a(t)w(t)$$

PER POTER AVERE $w(t)$ CHE RISOLVA LA ** DEVO

$$\text{AVERE } c'(t) e^{A(t)} = b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

$$\Rightarrow c(t) = \int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds + c$$

LA SOLUZIONE ERA DELLA FORMA

$$w(t) = c(t) e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow w(t) = \left(\int_{t_0}^t b(s) e^{-A(s)} ds + c \right) e^{A(t)}$$

ORA METTIAMOLO IN PRATICA CON L'ESEMPIO

$$w'(t) = \underbrace{2t}_{a(t)} w(t) + \underbrace{e^{t^2}}_{b(t)}$$

$$\Rightarrow w(t) = \left(\int_{t_0}^t e^{s^2} e^{-s^2} ds + c \right) e^{t^2} =$$

$$= ((t - t_0) + c) e^{t^2}$$

SE AVESSI AVUTO $w(t_0) = 1$

$$\Rightarrow w(t_0) = 1 = c e^{t_0^2} \Rightarrow c = e^{-t_0^2}$$

DEFINIZIONE

$$w' = a(t)w + b(t)w^\alpha \text{ DOVE } \alpha \neq 1$$

QUESTO TIPO DI EQUAZIONE PRENDO IL NOME DI EQUAZIONE DI BERNOLLI

SE $\alpha = 1 \Rightarrow w' = w(a(t) + b(t))$

$$\Rightarrow \frac{w'}{w} = a(t) + b(t) \text{ LA RISOLVO}$$

COME NEI CASI

PRECEDENTI

SE $\alpha \neq 1$

CHIAMO z UNA FUNZIONE AUSILIARIA TALE CHE

$$w = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow w' = \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot z'$$

SOSTITUISCO NELL'EQUAZIONE DI PARTENZA E HO:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{DIVIDO}$$

PER $z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha} + b(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z + b(t)$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{1-\alpha} a(t) z + \frac{1}{1-\alpha} b(t)$$

QUESTA È UN'EQUAZIONE LINEARE CHE SAPPIAMO GIÀ RISOLVERE CON LA FORMULA DI PRIMA, CIOÈ:

$$z(t) = \left[\int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds + c \right] e^{A(t)}$$

PERÒ BISOGNA STARE ATTENTI AD $a(t)$ E $b(t)$ PERCHÉ SONO DIVERSE DALL'EQUAZIONE USATA PER OTTENERE QUESTA FORMULA

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE È:

$$z(t) = \left[\int_{t_0}^t e^{(1-s)A(s)} b(s)(1-\alpha) ds + c \right] e^{(1-\alpha)A(t)}$$

DOVE $A(t)$ È UNA PRIMITIVA DI $a(t)$

DATO CHE $w = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\Rightarrow w(t) = [z(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} e^{A(t)}$$

ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE L'EQUAZIONE:

$$w' = g\left(\frac{w}{t}\right)$$

$$\text{CONVIENE PORRE } z = \frac{w}{t} \Rightarrow w = tz \\ \Rightarrow w' = z + tz'$$

$$\Rightarrow z + tz' = f(z) \quad \text{EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{t} \Rightarrow \frac{z'}{f(z) - z} = \frac{1}{t}$$

SI RISOLVE COME SEMPRE

$$\Rightarrow w(t) = t z(t)$$

RICORDIAMO COS'È IL PROBLEMA DI CAUCHY Pdc:

$$\begin{cases} w' = f(t, w) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases} \quad *$$

TEOREMA

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO

SIA $f: A \rightarrow \mathbb{R}: f$ È CONTINUA E DERIVABILE NELLA SECONDA VARIABILE, CIOÈ, DATO CHE $f(t, w)$, VUOL DIRE CHE f È DERIVABILE RISPETTO A w E TALE CHE È CONTINUA SU A .

SE $(t_0, w_0) \in A$, ESISTE UN INTORNO DI t_0 CHE CHIAMO $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ TALE CHE IL Pdc * AMETTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE $w: I \rightarrow \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO DI AVERE L'EQUAZIONI:

$$\begin{cases} w' = g(w(t))h(t) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(t, w) = g(w(t))h(t)$$

$$\text{SE } g(w_0) = 0$$

COL METODO PRECEDENTE DOVREI SCRIVERE

$$\frac{w'}{g(w(t))} = h(t) \text{ MA IN } g(w_0) = 0$$

$\Rightarrow$ IL METODO PRECEDENTE CREA PROBLEMI NELLA SOLUZIONE PERCHÉ DIVIDO PER ZERO.

$$\begin{aligned} \text{SE } g(w_0) = 0 \Rightarrow w'(t_0) &= g(w(t_0))h(t_0) = \\ &= g(w_0)h(t_0) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ MI ACCORGO CHE LA FUNZIONE $w(t) \equiv w_0$

RISOLVE IL P.d.C., PERCHÉ

$$w'(t) = 0 = g(w_0)h(t) = 0$$

$\Rightarrow$ POSSO OSSERVARE CHE SE $w(t)$ È UNA SOLUZIONE DI

$$\begin{cases} w'(t) = g(w(t))h(t) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

TALE CHE $w(t)$ NON È COSTANTE

$\Rightarrow g(w(t))$ NON SI ANNULLA MAI PERCHÉ

SE $\exists t_1: g(w(t_1)) = 0$ TROVEREI CHE LA SOLUZIONE $w(t) \equiv w(t_1)$ È L'UNICA SOLUZIONE DEL P.d.C.

$\Rightarrow$ ASSURDO, HO SUPPOSTO $w(t)$ NO COST.

OSSERVAZIONE

$$\begin{cases} w'(t) = w(t)^{2/3} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

LA FUNZIONE $x^{2/3}$ È CONTINUA IN ZERO MA NON È DERIVABILE IN $x=0$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE $w(t) \equiv 0$ È SOLUZIONE DEL Pdc

SE INFATTI PRENDO
$$\begin{cases} w(t) = \alpha t^3 \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w'(t) = 3\alpha t^2$$
$$\text{MA } w^{2/3}(t) = \alpha^{2/3} t^2$$

$\Rightarrow$ AFFINCHÉ IL Pdc SIA SODISFATTO AVRÒ:

$$w'(t) = 3\alpha t^2 = \alpha^{2/3} t^2 = w(t)^{2/3}$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha = \alpha^{2/3}$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

$$\begin{cases} w' = f(t, w) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases} \quad *$$

POTREI INTEGRARE LA 1° EQ.

$$w(t) = \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds + w_0 \quad **$$

QUESTA ESPRESSIONE DI $w(t)$ MI DA UNA SOLUZIONE DEL Pdc E VICEVERSA

SE w È CONTINUA $\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DI ****** È

SOLUZIONE DEL PdC *

VICEVERSA È ANCORA VERO PERCHÉ $g(t, \omega)$ È CONTINUA E $\omega(t)$ È CONTINUA

ORA VOGLIO LA SOLUZIONE DI **

$(t_0, \omega_0) \in A \Rightarrow \exists$ UN RETTANGOLO DELLA FORMA
 $R = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta] : R \subseteq A$

PER IL TEOREMA DI WEISTRASS, POICHÉ g È CONTINUA SU $A \Rightarrow$ È CONTINUA SU R

$\Rightarrow |g(t, \omega)|$ AMMETTE MASSIMO SU R

$$M = \max_{(t, \omega) \in R} |g(t, \omega)|$$

MA ANCHE $\frac{\partial g}{\partial \omega}$ È CONTINUA SU R

$$\Rightarrow \text{CHIAMO } L = \max_{(t, \omega) \in R} \left| \frac{\partial g}{\partial \omega}(t, \omega) \right|$$

ORA DEFINISCO $\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon, \frac{\delta}{M} \right\}$

QUANDO $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ DEFINISCO UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI PER RINCORENZA NEL SEGUENTE MODO

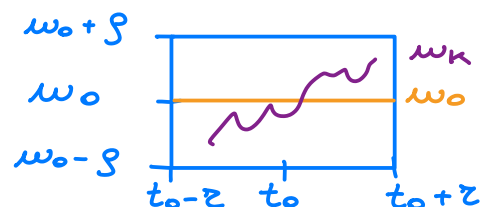
$$\omega_0(t) \equiv \omega_0$$

$$\omega_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t g(s, \omega_k(s)) ds + \omega_0 \quad \forall k \geq 0$$

PER $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ SI HA CHE

$$|\omega_k(t) - \omega_0| \leq \delta \quad \forall k \quad ***$$

↓
DISTANZA TRA ω_k E $\omega_0 \leq \delta$



DIMOSTRIAMO ***

PER $k=0$ LA *** È SODISFATTA

$$w_0(t) \equiv w_0 \Rightarrow |w_0(t) - w_0| = 0 \leq \rho$$

SUPPONIAMO CHE *** È SODISFATTA PER k ,

DIMOSTRIAMO CHE LO È ANCHE PER $k+1$ INDUZIONE

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(t) - w_0| &= \left| \int_{t_0}^t g(s, w_k(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |g(s, w_k(s))| ds \\ &\quad \text{eR} \Rightarrow g(s, w_k(s)) \leq M \end{aligned}$$

$$\leq \int_{t_0}^t M ds \leq \int_{t_0}^{t_0+z_0} M ds = z_0 M$$

$$\text{MA } z_0 = \min \left\{ z, \frac{\rho}{M} \right\}$$

$$\Rightarrow z_0 M \leq \frac{\rho}{M} M = \rho$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO DIMOSTRATO LA ***

ORA DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE CHE

$$|w_k(t) - w_{k-1}(t)| \leq M L^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!} \quad \forall k \geq 1$$

PER $k=1$ HO

$$\begin{aligned} |w_1(t) - w_0(t)| &= \left| \int_{t_0}^t g(s, w_0(s)) ds + w_0 - w_0 \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |g(s, w_0(s))| ds \leq |t - t_0| M \end{aligned}$$

$k \rightarrow k+1$

$$|w_{k+1}(t) - w_k(t)| =$$

$$= \left| \int_{t_0}^t g(s, w_k(s)) ds + w_0 - \int_{t_0}^t g(s, w_{k-1}(s)) ds - w_0 \right|$$

$$= \left| \int_{t_0}^t g(s, w_k(s)) - g(s, w_{k-1}(s)) ds \right|$$

IL TEOREMA DI LAGRANGE MI CONSENTE DI TROVARE $\xi(s)$ COMPRESO TRA $w_k(s)$ E $w_{k-1}(s)$ TALE CHE

$$g(s, w_k(s)) - g(s, w_{k-1}(s)) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial w}(s, \xi(s)) \cdot (w_k(s) - w_{k-1}(s))$$

$$\Rightarrow |g(s, w_k(s)) - g(s, w_{k-1}(s))| \leq$$

$$\leq L |w_k(s) - w_{k-1}(s)|$$

$$\text{MA } |w_{k+1}(t) - w_k(t)| =$$

$$= \int_{t_0}^t |g(s, w_k(s)) - g(s, w_{k-1}(s))| ds \leq$$

$$\leq L \int_{t_0}^t |w_k(s) - w_{k-1}(s)| ds$$

PER IPOTESI INDUTTIVA HO

$$|w_{k+1}(t) - w_k(t)| \leq L \int_{t_0}^t M L^{k-1} \frac{|s-t_0|^k}{k!} ds =$$

$$= M L^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

CHE È LA FORMULA DA DIMOSTRARE PER $k+1$

DALLA FORMULA APPENA DIMOSTRATA HO

$$|w_k(t) - w_{k-1}(t)| \leq M L^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!}$$

SI DEDUCE CHE

$$\sup_{t \in [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]} |w_k(t) - w_{k-1}(t)| =$$

$$= \|w_k(t) - w_{k-1}(t)\|_{\infty, [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]} \leq$$

$$\leq M L^{k-1} \frac{\tau_0^k}{k!}$$

LA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} M L^{k-1} \frac{\tau_0^k}{k!}$ CONVERGE

E QUINDI SAPPIAMO CHE LA SERIE

$\sum_{k=1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1})$ CONVERGE TOTALMENTE

SULL'INTERVALLO $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$

1° CONSEGUENZA

$S_m = \sum_{k=1}^m (w_k - w_{k-1})$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

2° CONSEGUENZA

$S_m = w_m - w_0$ CONVERGE UNIFORMEMENTE AD

$$v = \sum_{k=1}^{+\infty} (w_k - w_{k-1})$$

INOLTRE v È COST. PERCHÉ È LIMITE

UNIFORME DI FUNZIONI CONTINUE

DEFINISCO $w = v + w_0$

$\Rightarrow w_m \rightarrow w$ UNIFORMEMENTE E $|w(t) - w_0| \leq \delta \forall t$

INOLTRE $w_{k+1}(t) = w_0 + \int_{t_0}^t g(s, w_k(s)) ds$

PASSANDO AL LIMITE PER $h \rightarrow +\infty$

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds$$

ABBIAMO DIMOSTRATO LA **

LEZIONE #26 19/05/23 (LEZIONE PERSA)

CONTINUO DIMOSTRAZIONE

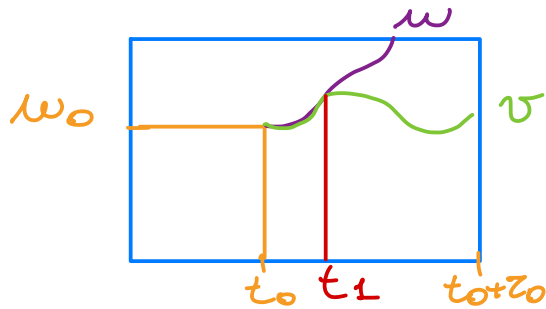
PRENDIAMO $w, v: [t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0] \rightarrow [w_0 - \delta, w_0 + \delta]$

SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\Rightarrow w(t_0) = v(t_0) = w_0$$

E VOGLIAMO VEDERE CHE $w(t) = v(t)$

DEFINIAMO $t_1 := \sup \{ t \leq t_0 + \tau_0 : w = v \text{ su } [t_0, t] \}$



ESSENDO w E v UGUALI NEL PUNTO (t_0, w_0) , ESISTERÀ UN INTERVALLO $[t_0, t_1]$ IN CUI LE FUNZIONI RIMANGONO UGUALI. E QUINDI PRENDO IL SUP DEI t_1 POSSIBILI.

ESSENDO w E v CONTINUE SI AVRÀ CHE

$$w(t_1) = v(t_1)$$

$\Rightarrow$ VOGLIAMO FAR VEDERE CHE $t_1 = t_0 + \tau_0$, OVVERO

CHE LE DUE FUNZIONI COINCIDONO SU TUTTO IL GRAFICO

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $t_1 < t_0 + \tau_0$

$$w(t) = \int_{t_0}^t f(s, w(s)) ds + w_0$$

$$v(s) = \int_{t_0}^s f(s, v(s)) ds + w_0$$

$$\forall t > t_1 \Rightarrow w(t) = \int_{t_1}^t g(s, w(s)) ds + w(t_1)$$

$$v(t) = \int_{t_1}^t g(s, v(s)) ds + v(t_1)$$

$$w(t) - v(t) = \int_{t_1}^t g(s, w(s)) - g(s, v(s)) ds$$

PERCHÉ

$$w(t_1) = v(t_1)$$

STIMIAMO IL MODULO

$$|w(t) - v(t)| \leq \int_{t_1}^t |g(s, w(s)) - g(s, v(s))| ds$$

TEOREMA DI
LAGRANGE

$$\leq \int_{t_1}^t L |w(s) - v(s)| ds =$$

$$= L \int_{t_1}^t |w(s) - v(s)| ds$$

ORA SCELGO UN NUMERO $0 < z_1 < \frac{1}{L}$ TALE CHE
 $t_1 + z_1 < t_0 + z_0$

$$\Rightarrow |w(t) - v(t)| \leq L \int_{t_1}^t |w(s) - v(s)| ds$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [t_1, t_1 + z_1]} |w(t) - v(t)| = \|w - v\|_{\infty, [t_1, t_1 + z_1]}$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_1 + z_1} |w(s) - v(s)| ds \leq \int_{t_1}^{t_1 + z_1} \|w - v\|_{\infty, [t_1, t_1 + z_1]} ds =$$

$$= L z_1 \|w - v\|_{\infty, [t_1, t_1 + z_1]} < \|w - v\|_{\infty, [t_1, t_1 + z_1]}$$

$\Rightarrow$ HO UN ASSURDO PERCHÉ HO OTTENUTO CHE
 $\|w-v\|_\infty < \|w-v\|_\infty$ HO OMESSO L'INTERVALLO
PER COMODITÀ

$\Rightarrow$ L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE $\|w-v\|_\infty = 0$ SU
 $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$\Rightarrow w = v$ IN $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$\Rightarrow$ CONTRADICE IL FATTO CHE

$t_1 = \sup \{t \leq t_0 + \tau_0 : w = v \text{ SU } [t_0, t]\}$

$\Rightarrow t_1$ NON PUÓ ESSERE MINIMO STRETTO DI $t_0 + \tau_0$

$\Rightarrow t_1 = t_0 + \tau_0$

$\Rightarrow w = v$ SU $[t_0, t_0 + \tau_0]$

PER CONCLUDERE DOVREI FARE LO STESSO CON
 $t_0 - \tau_0$, BASTA FARE $t_1 = \inf$

$\Rightarrow w = v$ SU $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DEL PdC È UNICA

OSSERVAZIONE

NELLA DIMOSTRAZIONE CHE ABBIAMO FATTO NON
ABBIAMO UTILIZZATO ESPPLICITAMENTE CHE g FOSSE
DERIVABILE IN w

$$\underbrace{|g(s, w(s)) - g(s, v(s))|}_{\frac{\partial g}{\partial w}(s, \xi(s)) \cdot [w(s) - v(s)]} \leq L |w(s) - v(s)|$$

LA DISUGUAGLIANZA SEGUE DAL TEOREMA DI LAGRANGE,
CHE SEGUE DALLA DERIVABILITÀ DI g IN w E

DAL FATTO CHE $\frac{\partial g}{\partial w}$ È CONTINUA

POTEVO QUINDI NON RICHIEDERE CHE LA FUNZIONE FOSSE DERIVABILE RISPETTO A w , E QUINDI CON DERIVATA CONTINUA MA CHE FOSSE LIPSCHIZIANA IN w

TEOREMA

SIA $g(t, w)$ CONTINUA SU A , $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ E LOCALMENTE LIPSCHIZIANA NELLA VARIABILE w

SIA $(t_0, w_0) \in A$

$\Rightarrow$ IL PdC $\begin{cases} w' = g(t, w) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$ AMETTE UN'UNICA SOLUZIONE IN UN INTORNO $[t_0 - \tau_0, t_0 + \tau_0]$ DI t_0

OSSERVAZIONE

SIA w SOLUZIONE $w' = g(t, w)$ SU (a, b) E SIA v SOLUZIONE DI $v' = g(t, v)$ SU (c, d) E SUPPONIAMO CHE $w = v$ SU $(a, b) \cap (c, d)$, INOLTRE SUPPONGO CHE $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$

SE DEFINISCO $w(t) = \begin{cases} w(t) & t \in (a, b) \\ v(t) & t \in (c, d) \end{cases}$

$\Rightarrow w: (a, b) \cup (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow w$ SODISFA $w' = g(t, w)$ SU $(a, b) \cup (c, d)$

PROPOSIZIONE

SIA $g(t, w)$ CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHIZIANA NELLA VARIABILE w

SUPPONIAMO DI AVERE v E w SOLUZIONE DI
 $v' = f(t, v)$ E $w' = f(t, w)$ SULL'INTERVALLO (α, β)
SE ESISTE $t_0 \in (\alpha, \beta)$: $v(t_0) = w(t_0)$
 $\Rightarrow v = w$ SU (α, β)

DEFINIZIONE

SIANO v E w SOLUZIONI DI $v' = f(t, v)$ E
 $w' = f(t, w)$ SULL'INTERVALLO (a, b) E (c, d)
RISPETTIVAMENTE.

DIREMO CHE v ESTENDE w SE $(a, b) \supsetneq (c, d)$
E $v = w$ SU (c, d)
 $\Rightarrow v$ È UN PROLUNGAMENTO DI w

DEFINIZIONE

UNA SOLUZIONE w DI $w' = f(t, w)$ SI DICE
MASSIMALE SE NON AMMETTE NESSUN PROLUNGAMENTO

TEOREMA

SIA f CONTINUA SU A APERTO, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ E SIA f
LOCALMENTE LIPSCIZIANA NELLA VARIABILE w .

CONSIDERIAMO IL Pdc

$$\begin{cases} w' = f(t, w) & \text{PER } (t_0, w_0) \in A \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ESISTE UNA SOLUZIONE MASSIMALE $\bar{w}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
DEL PROBLEMA

DIMOSTRAZIONE

SIA $v: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ UNA SOLUZIONE DEL P.d.C

DENOTIAMO $V = \left\{ w: w \text{ È SOLUZIONE DEL P.d.C} \right. \\ \left. \text{E DI SUOI PROLUNGAMENTI DI } v \right\}$

$\forall w \in V, w: (a_w, b_w) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a_w, b_w) \neq (\alpha, \beta)$$

DEFINISCO $a := \inf \{ a_w: w \in V \}$

$$b := \inf \{ b_w: w \in V \}$$

$\forall t \in (a, b), \exists w \in V: (a_w, b_w) \ni t$

DEFINISCO $\bar{w}(t) = w(t)$

SI VERIFICA CHE $\bar{w}$ È BEN DEFINITA, OVVERO CHE

NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLA w

SI VERIFICA ANCHE CHE $\bar{w}'(t) = g(t, \bar{w}(t))$

POICHÉ SE $\bar{w}(t) = w(t) \Rightarrow \bar{w}'(t) = w'(t)$

E $w(t)$ SODISFA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$\bar{w}'(t) = w'(t) = g(t, w(t)) = g(t, \bar{w}(t))$$

$\Rightarrow \bar{w}$ È SOLUZIONE DELLA STESSA EQUAZIONE

DIFFERENZIALE ED È DEFINITA SU $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ E

PER DEFINIZIONE DI a E b È LA SOLUZIONE

MASSIMALE

TEOREMA

SIA $A = I \times \mathbb{R}$ DOVE I È UN INTERVALLO $\subseteq \mathbb{R}$

$I = (a, b)$ o $I = (-\infty, b)$ o $I = [a, +\infty) \dots$

SIA $g(t, w): A \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA SU A E LOCALMENTE LIPSCIZIANA RISPETTO ALLA VARIABILE w

SUPPONIAMO $\exists k > 0$:

$$|g(t, w)| \leq k(1 + |w|) \quad \forall t, w \in A$$

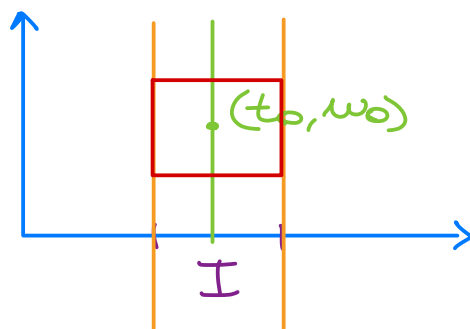
$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DEL Pdc

$$\begin{cases} w' = g(t, w) \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$

È DEFINITA SU TUTTO I

SE w È SOLUZIONE

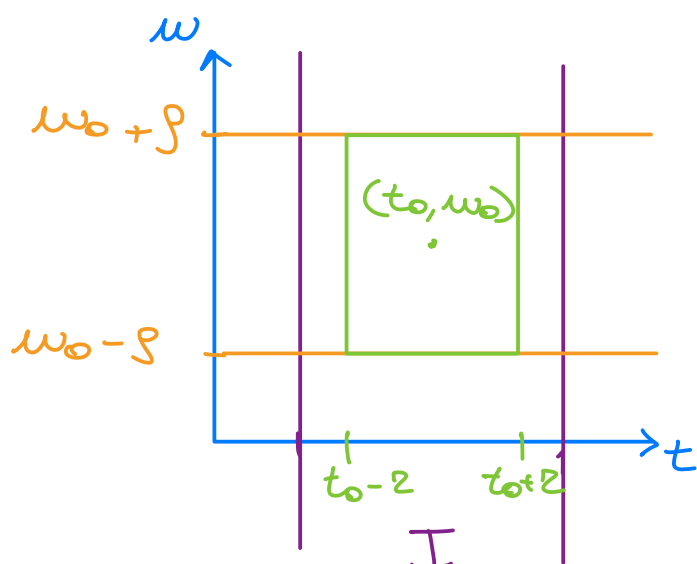
MASSIMALE $\Rightarrow w: I \rightarrow \mathbb{R}$



DIMOSTRAZIONE

NEL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL Pdc, ABBIAMO PRESO $(t_0, w_0) \in A$ E ABBIAMO DEFINITO IL RETTANGOLO

$$R = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \times [w_0 - \delta, w_0 + \delta] \text{ TALI CHE } R \subseteq A$$



LA SOLUZIONE

NELL'INTERVALLO

$[t_0 - \epsilon_0, t_0 + \epsilon_0]$ DOVE

$\epsilon_0 := \min \left\{ \epsilon, \frac{\delta}{M} \right\}$ DOVE

$$M = \max \{ |g(t, w)| : (t, w) \in R \}$$

VISTO CHE ρ È ARBITRARIO, SCELGO $\rho = 1 + |\omega_0|$
SO CHE LA SOLUZIONE $\omega: [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$
SODISFA $|\omega - v| < \rho \Rightarrow |\omega| \leq |\omega_0| + \rho = 1 + 2|\omega_0|$

$$\Rightarrow |\varphi(t, \omega)| \leq k(1 + |\omega|) \leq k(2 + 2|\omega_0|) = 2k(1 + |\omega_0|)$$

POSSO SCEGLIERE $\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon, \frac{\rho}{2k(1 + |\omega_0|)} \right\}$
PERCHÉ $M < 2k(1 + |\omega_0|)$

$\Rightarrow$ POSSO TROVARE SOLUZIONE IN $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$
DOVE ε_0 È DEFINITO COME SOPRA, INOLTRE
 $\varepsilon_0 \leq \min \left\{ \varepsilon, \frac{\rho}{2k} \right\}$

SIA v SOLUZIONE MASSIMALE DEL P.d.C. DEFINITA
SU $(\alpha, \beta) \subseteq I$

VOGLIO FAR VEDERE CHE $(\alpha, \beta) = I$

SUPPONIAMO CHE $I = (a, b)$

SUPPONIAMO CHE $\beta < b$, PRENDIAMO $t_1 \in (\alpha, \beta)$

E $\varepsilon < \frac{1}{2k}$ TALI CHE $t_1 + \varepsilon > \beta$ E $t_1 + \varepsilon < b$

IL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ DEL P.d.C. MI
DICE CHE POSSO TROVARE UNA SOLUZIONE DI

$$\begin{cases} \omega' = \varphi(t, \omega) \\ \omega(t_1) = v(t_1) \end{cases}$$

DEFINITA SU $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$

QUESTA SOLUZIONE COINCIDE CON v IN
 $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \cap (\alpha, \beta)$ MA ESTENDE A DESTRA
DI β LA SOLUZIONE MASSIMALE v

$\Rightarrow v$ NON È MASSIMALE

$\Rightarrow$ HO TROVATO UN ASSURDO AVEVO SUPPOSTO

$\Rightarrow (\alpha, \beta) = I$ CHE $(\alpha, \beta) \neq I$

OSSERVAZIONE

I TEOREMI ENUNCIATI FIN ORA SI APPLICANO
ANCHE A SISTEMI DI CAUCHY

$$\begin{cases} w_1' = f_1(t, w_1, w_2, \dots, w_n) \\ w_2' = f_2(t, w_1, w_2, \dots, w_n) \\ \vdots \\ w_n' = f_n(t, w_1, w_2, \dots, w_n) \\ w_1(t_0) = w_0^1 \\ w_2(t_0) = w_0^2 \\ \vdots \\ w_n(t_0) = w_0^n \end{cases}$$

DEFINISCO IL VETTORE $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

CHIAMO $\bar{w}_0 = (w_0^1, w_0^2, \dots, w_0^n)$

E DEFINISCO $f(t, w_1, w_2, \dots, w_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA PRECEDENTE DIVENTA

$$\begin{cases} w' = f(t, w_1, w_2, \dots, w_n) = f(t, \bar{w}) \\ \bar{w}(t_0) = \bar{w}_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ANCHE PER QUESTO SISTEMA VALGONO I

TEOREMI PRECEDENTI

SE g È CONTINUA IN A E $\frac{\partial g}{\partial w_i}$ CONTINUA
 $\forall i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow \exists$ UNA SOLUZIONE ED È UNICA IN UN
OPPORTUNO INTORNO DI t_0

DEFINIZIONE (PIÙ FORMALE DI PRIMA)

L'EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE n SONO
DEL TIPO:

$$w^{(n)} = g(t, w', w'', \dots, w^{(n-1)}) *$$

DOVE $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

POSSE RICONDURRE L'EQUAZIONE DI ORDINE n A
UNA EQUAZIONE DI ORDINE 1 INTRODUCENDO
DELLE NUOVE VARIABILI

$$w_1 = w$$

$$w_2 = w'$$

$$\vdots$$

$$w_n = w^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_n' = g(t, w_1, w_2, \dots, w_n) \\ w_1' = w_2 \\ w_2' = w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1}' = w_n \end{cases}$$

È UN SISTEMA
DEL 1° ORDINE
**

ORA CHIAMO $\bar{w}$ COME SOPRA

$$\Rightarrow \bar{w}' = g(t, w_1, \dots, w_n) = g(t, \bar{w})$$

AFFINCHÉ IL Pdc

$$\begin{cases} \bar{w}' = f(t, \bar{w}) \\ \bar{w}(t_0) = \bar{w}_0 \end{cases}$$

SIA RISOLVIBILE DEVO RISOLVERE LA SECONDA EQUAZIONE, OVERO DIRE CHI È $\bar{w}_0$

$$(w_1(t_0), w_2(t_0), \dots, w_m(t_0)) = (w_0^1, w_0^2, \dots, w_0^m)$$

• IMPONGO $w_1(t_0) = w_0^1$ EQUIVALE IN * A
 $w(t_0) = w_0^1$ NON SONO POTENZE!

• IMPONGO $w_2(t_0) = w_0^2$ EQUIVALE IN * A
 $w'(t_0) = w_0^2$

⋮

• IMPONGO $w_m(t_0) = w_0^m$ EQUIVALE IN * A
 $w^{(m-1)}(t_0) = w_0^m$

QUINDI IL Pdc ** MESSO A SISTEMA CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$w_1(t_0) = w_0^1, \dots, w_m(t_0) = w_0^m$$

È EQUIVALENTE A

$$\begin{cases} w^{(m)} = f(t, w, w', \dots, w^{(m-1)}) \\ w(t_0) = w_0^1 \\ w'(t_0) = w_0^2 \\ \vdots \\ w^{(m-1)}(t_0) = w_0^m \end{cases}$$

DEFINIZIONE

EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COST.:

$$w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + a_{n-2} w^{(n-2)} + \dots + a_0 w = 0$$

CHIAMIAMO $P(\lambda)$ IL POLINOMIO CHE SI OTTIENE

SOSTITUENDO λ^k ALLA DERIVATA k -ESIMA DI w .

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$P(\lambda)$ È DETTO POLINOMIO CARATTERISTICO

DELL'EQUAZIONE

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SI

TROVANO NEL SEGUENTE MODO

$$w = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

DOVE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ SONO SOLUZIONI DI $P(\lambda)$

ESEMPIO

$$\begin{cases} w'' + 3w' - 4w = 0 \\ w(0) = 1 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

SCRIVO IL POLINOMIO CARATTERISTICO

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = P(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -4$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$$

SOLUZIONE GENERALE

$$\Rightarrow \begin{cases} w(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t} \\ w(0) = 1 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ w'(0) = c_1 - 4c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{5} \\ C_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE UNICA DEL PDC È

$$w(t) = \frac{4}{5} e^t + \frac{1}{5} e^{-t}$$

ESEMPIO

$$w''' - w' = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -1$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE GENERALE:

$$w(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}$$

$$\text{SUPPONIAMO } \begin{cases} w(0) = 1 \\ w'(0) = 1/2 \\ w''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ w'(0) = C_2 - C_3 = 1/2 \\ w''(0) = C_2 + C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{4} \\ C_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{UNICA SOLUZIONE: } w(t) = 1 + \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t}$$

LEZIONE #27 23/05/23 SOLO ESEMPI (HO MESSO
ESEMPIO SOLO QUELLO PIÙ RILEVANTE)

$$w' = \frac{w}{2t} + w^3 \cos t \quad \text{EQUAZIONE DI BERNOLLI}$$

$$A(t) = \int \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} \log |t|$$

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{\frac{1}{2} \log |t|} \left(\int -2 \cos s e^{2 \cdot \frac{1}{2} \log |s|} + c \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= e^{\frac{1}{2} \log |t|} \left(\int -2 \cos s \cdot |s| \right)^{-\frac{1}{2}} = \text{PER PARTI} \end{aligned}$$

$$\int -2 \cos t |t| = \begin{cases} -2t \sin t - 2 \cos t & t > 0 \\ 2t \sin t + 2 \cos t & t < 0 \end{cases}$$

$t > 0$:

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{\frac{1}{2} \log |t|} (-2t \sin t - 2 \cos t + c)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{-2t \sin t - 2 \cos t + c}} \end{aligned}$$

$t < 0$

$$w(t) = \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{-2t \sin t - 2 \cos t + c}}$$

SE AVESSI AVUTO $w(0) = 1$ NON POTREMO FARE
NIENTE PERCHÉ L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE
ABBIAMO È $w' = g(t, w)$ DOVE g NON È

CONTINUA IN ZERO E PERCIÒ NON HO LA PARTE
TEORICA SUFFICIENTE PER RISOLVERE IL P.D.C

SE INVECE $w(1)=1$

$$w(1) = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-2\sin 1 - 2\cos 1 + c}} = 1$$

$$\Rightarrow c = 1 + 2\sin 1 + 2\cos 1$$

LEZIONE #28 25/05/23

OSSERVAZIONE

SIA DATA UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$w^{(m)} + a_{m-1} w^{(m-1)} + \dots + a_0 w = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

SIA $P(\lambda)$ IL SUO POLINOMIO CARATTERISTICO

SIANO λ_i LE SUE RADICI.

SE λ_i SONO TUTTE DISTINTE $\Rightarrow$ LA SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È:

$$w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n

$$e^{\lambda_1 t} = v_1$$

$$e^{\lambda_2 t} = v_2$$

$\vdots$

$$e^{\lambda_n t} = v_n$$

ESEMPIO

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = P(\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

ESEMPIO

CHE SUCCEDDE SE $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ NON SONO DISTINTE?

$$w'' - 2w' + w = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^t + c_2 e^t = e^t (c_1 + c_2)$$

QUINDI HO TROVATO UNA SOLA SOLUZIONE MA NE DEVO TROVARE UN'ALTRA, PERCHÉ HO BISOGNO DI DUE VETTORI

$$e^{\lambda_1 t} \rightarrow t e^{\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = e^{\lambda_1 t} \\ v_2 = t e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$$

CHE SUCCEDDE SE LA MOLTEPLICITÀ È 3?

$$w''' + 3w'' + 3w' - w = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = e^{\lambda_1 t} = e^t \\ v_2 = t e^{\lambda_1 t} = t e^t \\ v_3 = t^2 e^{\lambda_1 t} = t^2 e^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

OSSERVAZIONE

NEL CASO GENERALE

$$\omega^{(m)} + a_{m-1} \omega^{(m-1)} + \dots + a_0 \omega = 0$$

SUPPONIAMO CHE LE RADICI SIANO

λ_1 CON MOLTEPLICITÀ $m_1 \rightarrow e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}$

λ_2 CON MOLTEPLICITÀ $m_2 \rightarrow e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \dots, t^{m_2-1} e^{\lambda_2 t}$

$\vdots$

λ_k CON MOLTEPLICITÀ $m_k \rightarrow e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}$

$$\text{INOLTRE } \sum_{i=1}^k m_i = m$$

ESEMPIO

$$\omega''' - \omega'' = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \Rightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = e^{\lambda_3 t} = e^t \\ v_2 = e^{\lambda_1 t} = 1 \\ v_3 = t e^{\lambda_1 t} = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = c_1 e^t + c_2 + c_3 t$$

SE SOSTITUISCO $z = \omega''$

$$\Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow z' = z \Rightarrow z(t) = c e^t$$

$$\Rightarrow \omega'' = c e^t \Rightarrow \omega'(t) = c_1 + c_2 e^t$$

$$\Rightarrow \omega(t) = c_3 + c_1 t + c_2 e^t$$

$\Rightarrow$ LE DUE SOLUZIONI SONO EQUIVALENTI

ESEMPIO

$$w'' - 4w' + 5w = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \Rightarrow \lambda_1 = 2+i$$

$$\lambda_2 = 2-i$$

$$\cdot e^{\lambda_1 t} = e^{(2+i)t} = e^{2t} e^{it}$$

$$\text{MA } e^{it} = \cos t + i \sin t$$

IN GENERALE

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cdot e^{\lambda_2 t} = e^{(2-i)t} = e^{2t} e^{-it}$$

$$\text{MA } e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^{2t} (\cos t + i \sin t) + c_2 e^{2t} (\cos t - i \sin t)$$

$$\text{SE } c_1 = c_2 = C$$

$$\Rightarrow w(t) = C e^{2t} (\cancel{\cos t + i \sin t} + \cancel{\cos t - i \sin t}) = 2C e^{2t} \cos t \quad \text{IN QUESTO CASO, SE}$$

$$\text{PRENDO } C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = e^{2t} \cos t$$

$$\text{SE } c_1 = -c_2$$

$$\Rightarrow w(t) = -c_1 e^{2t} 2i \sin t \quad \text{IN QUESTO CASO,}$$

$$\text{SE PRENDO } c_1 = \frac{-1}{2i}$$

$$\Rightarrow v_2 = e^{2t} \sin t$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t$$

PERCHÉ LE DUE TROVATE SONO SOLUZIONI IDEALI
IO DEVO FARE LA COMBINAZIONE LINEARE PER
TROVARE QUELLA GENERALE.

OSSERVAZIONE

IN GENERALE SE $\alpha + i\beta$ E $\alpha - i\beta$ SONO SOLUZIONI DEL $P(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha + i\beta$ È RADICE DI $P(\lambda)$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ v_2 = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{cases}$$

COSA SUCCEDDE SE $\alpha + i\beta$ HA MOLTEPLICITÀ $m > 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{m-1} \cos \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{m-1} \sin \beta t \end{cases}$$

ESEMPIO

$$w''' + w' = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = +i$$

$$\lambda_3 = -i$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

ESEMPIO

$$y^{(5)} - y^{(4)} + y^{(3)} - y'' + y' = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^5 - \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \text{RACCOLGO E CAMBIO}$$

$$\Rightarrow \text{LE SOLUZIONI} \quad \text{VARIABILE}$$

SONO:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \lambda_1 = e^{i \frac{1}{3} \pi}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \lambda_2 = -e^{i \frac{1}{3} \pi}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \lambda_3 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \lambda_4 = -e^{i\frac{2}{3}\pi}$$

$$\lambda_5 = 1$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 e^t +$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ & + c_3 e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_4 e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + \\ & + c_5 e^{-\frac{1}{2}t} \underbrace{\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}_{\parallel \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ PERCHÉ IL COS È PARI}} + c_5 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{aligned}$$

ESEMPIO

$$w''' + w' = t + 1 \quad *$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -1$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA: $(w''' + w' = 0)$

$$w(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

PER TROVARE QUELLA GENERALE HO BISOGNO DI UNA SOLUZIONE DI $*$ E LA CHIAMO $v(t)$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DI $*$ È

$$w(t) = v(t) + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

CERCHIAMO $v(t)$ NELLA FORMA

$$v(t) = at^2 + bt + c$$

$$\Rightarrow v'(t) = 2at + b$$

$$v''(t) = 2a$$

$$v'''(t) = 0$$

$$\Rightarrow 0 - 2at - b = t + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -1/2 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{2}t^2 - t$$

$$\Rightarrow w(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - t$$

ESEMPIO

$$w''' - w' = \sin t$$

$$\Rightarrow w''' - w' = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow w(t) = v(t) + c_1 + c_2 e^t$$

CERCO $v(t)$ NELLA FORMA

$$v(t) = a \cos t + b \sin t$$

$$\Rightarrow v'(t) = -a \sin t + b \cos t$$

$$\Rightarrow v''(t) = -a \cos t - b \sin t$$

$$\Rightarrow -a \cos t - b \sin t + a \sin t - b \cos t = \sin t$$

$$\Rightarrow (-a - b) \cos t + (a - b) \sin t = \sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2 \end{cases} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t$$

$$\Rightarrow w(t) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t + c_1 + c_2 e^t$$