

in 3D

$$(P-P_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$(P-P_0) = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = r^2$$

$$a(x-x_c)^2 + b(y-y_c)^2 + c(z-z_c)^2 = 1$$

Paraboloidi

$$z = a(x-x_v)^2 + b(y-y_v)^2 + z_v$$

$$\text{Volume} := \frac{\pi r^2 h}{2}$$

Cilindri

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{Volume} := 2\pi \cdot h$$

Coni

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

in 2D

Cerchio

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Vertice} = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta = (b^2 - 4ac)$$

Ellisse

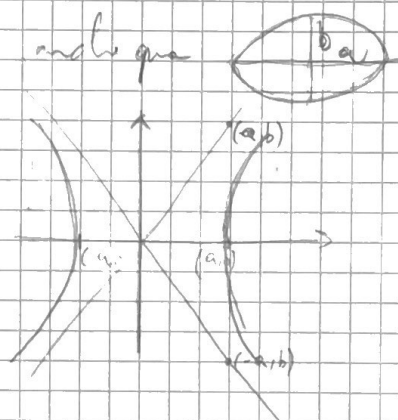
$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

Centro ellisse (x_c, y_c)

Iperbole

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$$

Centro iperbole (x_c, y_c)

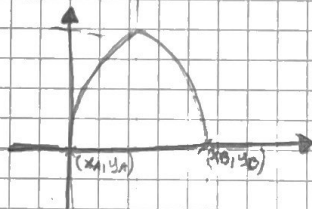


Area ellisse

$$A = \pi \cdot a \cdot b$$

Area parabola

$$A = \frac{g}{6} (x_0 - x_1)^3$$



Insiemi

- Insieme Aperto $A \subseteq X$ è aperto se $\forall x \in A, \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$
- Insieme Chiuso $C \subseteq X$ è chiuso se $C^c = X \setminus C$ è aperto, cioè se il suo complementare è aperto
- Insieme limitato $E \subseteq X$ è limitato se $\exists x \in X, R > 0$ t.c. $E \subseteq B_R(x)$
- diametro di un insieme $\text{diam}(E) = \sup \{d(x, y) : x, y \in E\}$
- $\cap C_i$ è chiuso, l'intersezione di chiusi è chiusa
- $\cup A_i$ è aperto, l'unione di aperti è aperta
- Insieme compatto $K \subseteq X$ è compatto se è chiuso e limitato
- $m(E) = \int_E 1 \, dx \, dy$

Integrabilità

f è integrabile in senso improprio $\Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{E \rightarrow 0} \int_{E \setminus R_E} f(x) \, dx$ figura geometrica centrata in $\bar{x}$
 $\Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{E \rightarrow \infty} \int_{E \cap R_E} f(x) \, dx$ caso $R_E \rightarrow 0$ per $E \rightarrow 0$
 $\nwarrow$ figura geometrica con $R_E \rightarrow \infty$ per $E \rightarrow \infty$

- 1) individuare punti in cui la funzione va a ∞
- 2) verificare quali di questi punti appartengono al dominio
- 3) cercare di eliminare il punto dall'integrale usando l' ϵ
- 4) Calcolo l'integrale in funzione di ϵ e poi faccio il limite per verificare se è integrabile

Integrali

- Risolti normalmente

- Cambio di Variabili

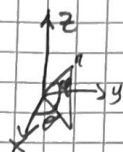
$$\Phi: A \rightarrow B, f: B \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \int_B f(x) dx = \int_A f(\Phi(u)) \left| \det \nabla \Phi \right| du$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 B A $\mathbb{R}$ A A

- coordinate polari $(x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta) \Rightarrow \left| \det \nabla \Phi \right| = \rho$

- coordinate cilindriche $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z) \Rightarrow \left| \det \nabla \Phi \right| = r$

- Coordinate sferiche $(x = \rho \cos \theta \cos \varphi, y = \rho \cos \theta \sin \theta, z = \rho \sin \theta) \Rightarrow \Rightarrow \det \nabla \Phi = \rho^2 \sin \theta$



Esempio

$$B: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$A: (\rho, \theta, z) \xrightarrow{\Phi} B: \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\nabla \Phi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gradiente

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Matrice Hessiana

det dei min. princip.

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \Delta_2 & \\ & & \Delta_3 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f) = \bullet \text{ Se } \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

minimo

$$\bullet \text{ Se } \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$$

massimo

$$\bullet \text{ Se } \Delta_3 < 0 \quad \text{p. di sella} \quad \Delta_1, \Delta_2 \text{ qualsiasi altri caso diverso dal max}$$

$$\bullet \text{ Se } \Delta_1 = 0 \text{ oppure } \Delta_2 = 0 \text{ oppure } \Delta_3 = 0 \Rightarrow \text{non posso dire niente}$$

(x_i, y_i) sono i punti ottenuti dal sistema $\nabla f = 0$

Maximin

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum \lambda_i f_i(x) + \sum \lambda_j g_j(x)$$

Se $\bar{x}$ è di minimo

↓ allora

- $\nabla_{\bar{x}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$

- $h_i(\bar{x}) = 0$

- $g_j(\bar{x}) \geq 0$

- $\lambda_j \geq 0$

- $\lambda_j g_j(\bar{x}) = 0$

Punto stazionario $\nabla f(x) = 0$

Continuità, derivabilità, differenziabilità

Continuità: f è continua in $x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon, \forall y \in \mathbb{R}^n: \|x - y\| < \delta$
 $\Leftrightarrow \forall (x^m)_{m \rightarrow \infty} \rightarrow x \Rightarrow f(x^m) \rightarrow f(x)$

Derivabilità: Se esistono tutte le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $\bar{x}$: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h_i}$

Differenziabilità: f è diff. in $\bar{x}$ se $\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$
prodotto scalare $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y + \dots$

Teo. diff. Tot.

Se f è derivabile in $\bar{x}$ e le derivate sono continue $\Rightarrow f$ è differenziabile in $\bar{x}$

Derivabilità

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

Differenziabilità • Se

$$\frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|}$$

• del limite ≤ 0 prova con il teo del confronto

• Se

• del limite è diverso da zero o
mettendo $\alpha(x, y, z)$ delle coppie di
valori tipo (t, t, t) oppure $(t, 2t, 2t)$

quando $t \rightarrow 0$, se il limite tende a un valore $\neq 0$ allora prova che non è diff.
ricordare anche i limiti notevoli

Successioni

$f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente ad $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ in E se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in E, \forall \epsilon > 0 \exists m \geq 0 \text{ t.c. } \|f_m(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad \forall m \geq m_\epsilon, x$$

- $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente se $\forall \epsilon > 0, \exists m \geq 0$ t.c. $\|f_m(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad \forall m \geq m_\epsilon, \forall x \in E$
- $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ puntualmente
- $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$

Per gli esercizi

puntualmente $\Rightarrow$ verificare che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

uniformemente $\Rightarrow \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_\infty = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \sup} \|f_n - f\|$
 (di solito la norma la tolgo)
 valore di x che corrisponde al sup di $\|f_n - f\|$

$$\|g(x)\|_\infty := \sup \{ \|g(x)\| : x \in E \}$$

Proprietà norme infinito

- $\|f(x)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- $\|\alpha f(x)\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f(x)\|_\infty$
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Uniformemente

- $\|f_n - f\|_\infty = \sup \|f_n - f\| \Rightarrow$ vedo dove $(f_n - f) \geq 0$ e lo porto fuori dal modulo
- calcolo il $\sup(f_n - f)$ come $(f_n - f)' = 0$
- trovo le x t.c. $(f_n - f)|_x = \sup(f_n - f)$

Serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Convergenza puntuale

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge punto per } x \in E \Rightarrow S_n(x) \rightarrow f, f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

Convergenza uniforme

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge unif. ad } f \text{ se } S_n \rightarrow f \text{ uniformemente}$$

Convergenza totale

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge tot. su } E \text{ se } \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$$

Calcolo $\|f_n(x)\|_{\infty}$ e studio la convergenza della serie

Serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$

Teorema: Se $\sum a_n y^n$ per $x=y \Rightarrow \forall x \in (-1/4, 1/4)$ $\sum a_n y^n$ converge punto

Raggio di convergenza: $R := \sup \{ |x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall y \in (-R, R) \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \rightarrow \text{converge}$$

Teorema Se $f(x) = \sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ allora $f(x)$ è derivabile in $(-R, R)$ e

$$\bullet f'(x) = \sum n a_n x^{n-1} \rightarrow \text{ha raggio di convergenza uguale}$$

$$\bullet f^{(k)}(x) = \sum \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

$$\bullet f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \leftarrow \text{Serie di Taylor in } 0$$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$\Rightarrow L = +\infty \Rightarrow \sum a_n x^n$ converge solo per $x=0$

$\Rightarrow L = 0 \Rightarrow \sum a_n x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$L \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum a_n x^n \quad \forall x \in (-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$, $R = \frac{1}{L}$

la convergenza è puntuale

Ricordi. Prop. triang.

• tra. carab.

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \cdot \quad \|a-b\| \geq \|a\| - \|b\|$$

Serie assolutamente convergente $\sum a_n$ è ass. convergente se $\sum |a_n|$ è convergente

• Stime utili • $e^t \leq 1+t$ $\forall t \in [0,1]$ • $e^t > 1+t$ $t \in [0,1]$

$$e^t < 1+t+t^2$$

• $\forall x,y \geq 0, p \geq 1 \quad (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p+y^p)$

ris. utili

$$\frac{a \cdot b}{|a \cdot b|} \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$\frac{|\sin(x)|}{|\arctg(y)|} \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trasformata di Fourier

Se $x(t)$ è periodica di periodo T_0 e soddisfa le condizioni di Dirichlet:

- $\int_0^{T_0} |x(t)| dt < \infty$ • Esiste finito di max e min in T_0 di $x(t)$
- Esiste finito di discontinuità

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j 2\pi \frac{n}{T_0} t} \quad x_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j 2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \quad \bullet x_n = |x_n| e^{j \phi_n}$$

Se $x(t) \in \mathbb{R}$

$$x_n = x_n^*$$

$$x_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \Rightarrow x_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{j 2\pi \frac{n}{T_0} t} + x_{-n} e^{-j 2\pi \frac{n}{T_0} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n - j b_n}{2} e^{j 2\pi \frac{n}{T_0} t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j 2\pi \frac{n}{T_0} t} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi \frac{n}{T_0} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T_0} t)$$

Calcolo di a_n e b_n

$$x_n = \frac{a_n - j b_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-j 2\pi \frac{n}{T_0} t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_n - j b_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt - \frac{j}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt$$

$$\bullet \underline{a_n} = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt$$

$$\bullet \underline{b_n} = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt$$

• Se $x(t)$ è anche pari $\Rightarrow b_n = 0$

• Se " " " dispari $\Rightarrow a_n = 0$

$$\bullet \text{Relazione di Parseval} \quad \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Curve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

γ è una curva iniettiva se $\forall t_1 \neq t_2 \in I \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (basta vedere se una delle γ_i è iniettiva)

cioè faccio la derivata delle γ_i e vedo se $\dot{\gamma} > 0$ oppure < 0 in I

γ è una curva regolare se $\dot{\gamma} \neq 0 \forall t \in I$ (si fa la derivata delle componenti e vedo dove si annullano, se $\nexists t$: tutte le $\dot{\gamma}_i = 0 \Rightarrow$ la curva è regolare)

Sostegno di γ $\text{supp}(\gamma) = \gamma(I) = \{ \gamma(t) : t \in I \}$

Immagine definita sul sostegno di γ $f: \text{supp}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se come studiare $f(\gamma(I))$