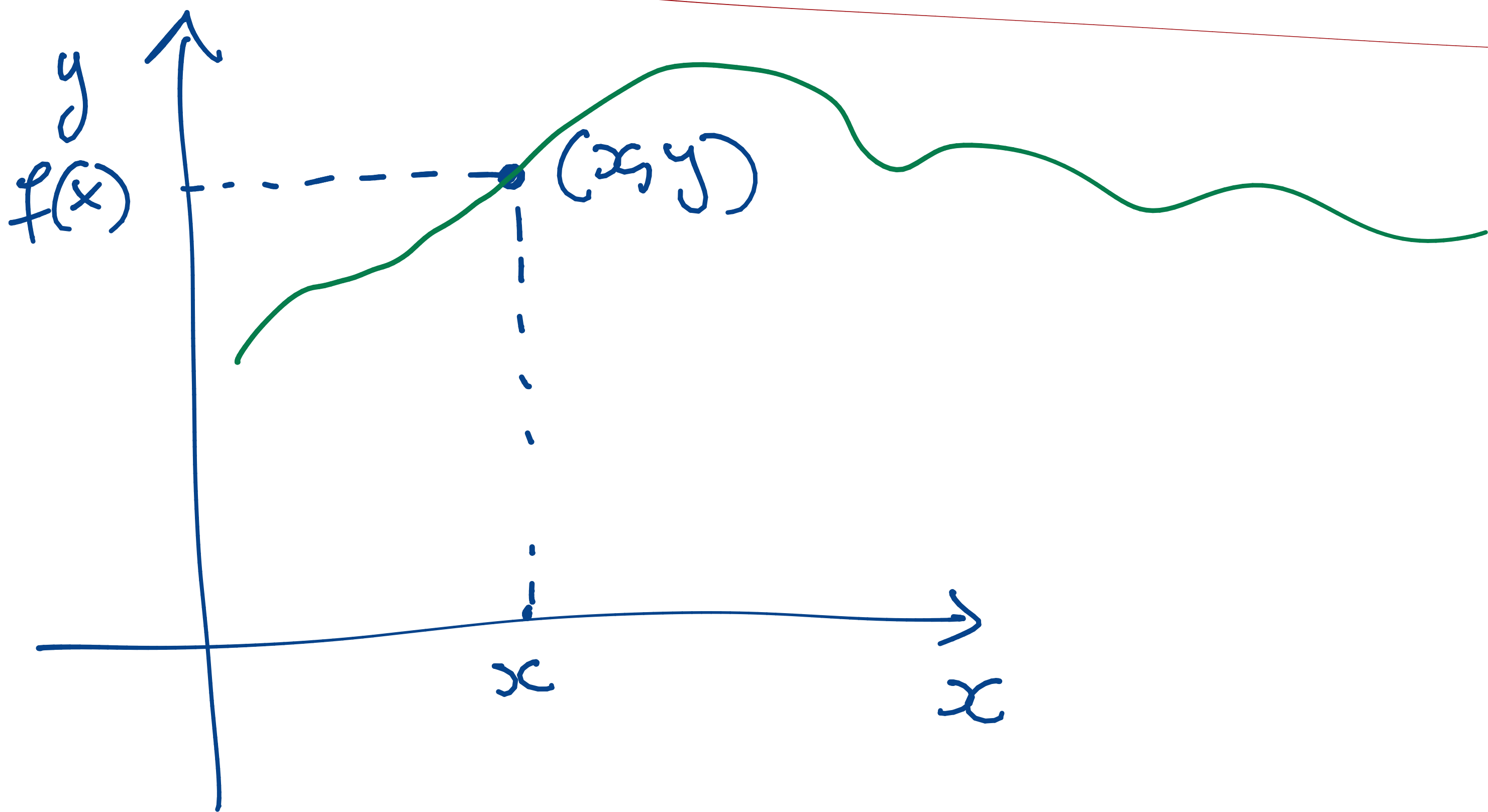


RICCARDO SCALA

riccardo.scala@unisi.it



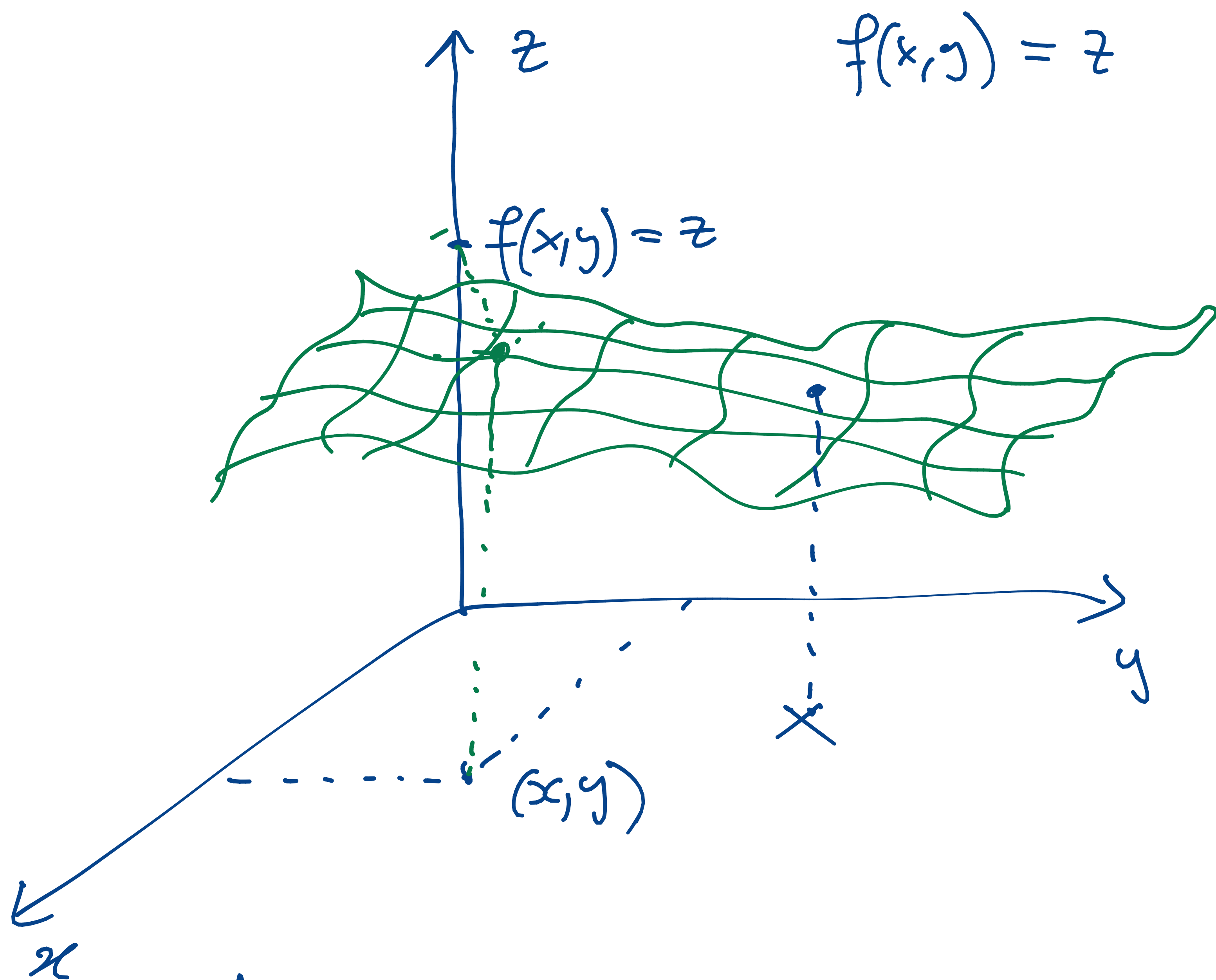
Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
possiamo rappresentare il suo grafico nel
piano cartesiano. $\forall x \in \mathbb{R}$ chiamiamo $y = f(x)$
e designiamo il punto $(x, y) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$

Nel corso di Analisi 2 andremo a studiare
funzioni che dipendono da più variabili

$$f: \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = z$$

il grafico di una funzione come questa
non può essere rappresentato nel piano Cartesiano.



Studieremo :

- Proprietà di continuità, derivabilità, differenziabilità di tali funzioni
- Integrale per funzioni di più variabili
- Successioni di funzioni

In funzioni e studieremo il concetto di limite di una successione di funzioni.

- Serie di funzioni
- Relazioni tra gli oggetti sopra introdotti e derivabilità, integrabilità di funzioni.
- Tutti gli strumenti appena introdotti servono, tra i vari scopi, a studiare le equazioni differenziali.

- Studi qualitativi della sp. differenziali
- Serie di Fourier

LIBRI

● teoria

● esercizi

Enrico Giusti Analisi 2

Giovanni PRODI Lezioni di Analisi 2

Enrico Giusti Complementi di A. 2

Fusco - Marcellini - Shubert Lezioni di A.M. 2

Grillo (Worms)

Analisi 2

Marcellini - Shubert

ESERCITAZIONI

Demichevich

ESERCIZI e PROBLEMI

di A.M. 2

Dispense del corso

Analisi 2

Prerequisiti

Programmi di An. 1
e Alg. Lineare Fortunato
Necoreis

Spazio vettoriale, funzioni di una variabile
con tutte le loro proprietà sono
date per scontate.

Spazio metrico

uno spazio metrico
è un insieme X in cui è definita
una distanza $d: X \times X \longrightarrow [0, +\infty]$.

per ogni coppia di punti $x, y \in X$
il simbolo $d(x, y)$ denota la distanza
tra x e y . La funzione distanza d
deve soddisfare le seguenti proprietà:

(i) $\forall x, y \in X$ si ha $d(x, y) \geq 0$

e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

(ii) La distanza è una funzione simmetrica

$\forall x, y \in X$ si ha $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) Vale la disuguaglianza triangolare

$\forall x, y, z \in X$ si ha $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Le coppie (X, d) prende nome di spazio metrico. (supponiamo sempre $X \neq \emptyset$)

oss.: Se (X, d) è uno spazio metrico e $Y \subseteq X$, con $Y \neq \emptyset$, allora (Y, d) è anch'esso uno spazio metrico.

esempi:

- $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico, infatti
 $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow d(x, y) = |x - y|$

- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è uno spazio metrico: $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow d(x, y) = |x - y|$ (vedere oss. precedente)

- $E \subseteq \mathbb{R}$, allora (E, d) è uno spazio metrico

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, definisco $d(n, m) = |n - m|$

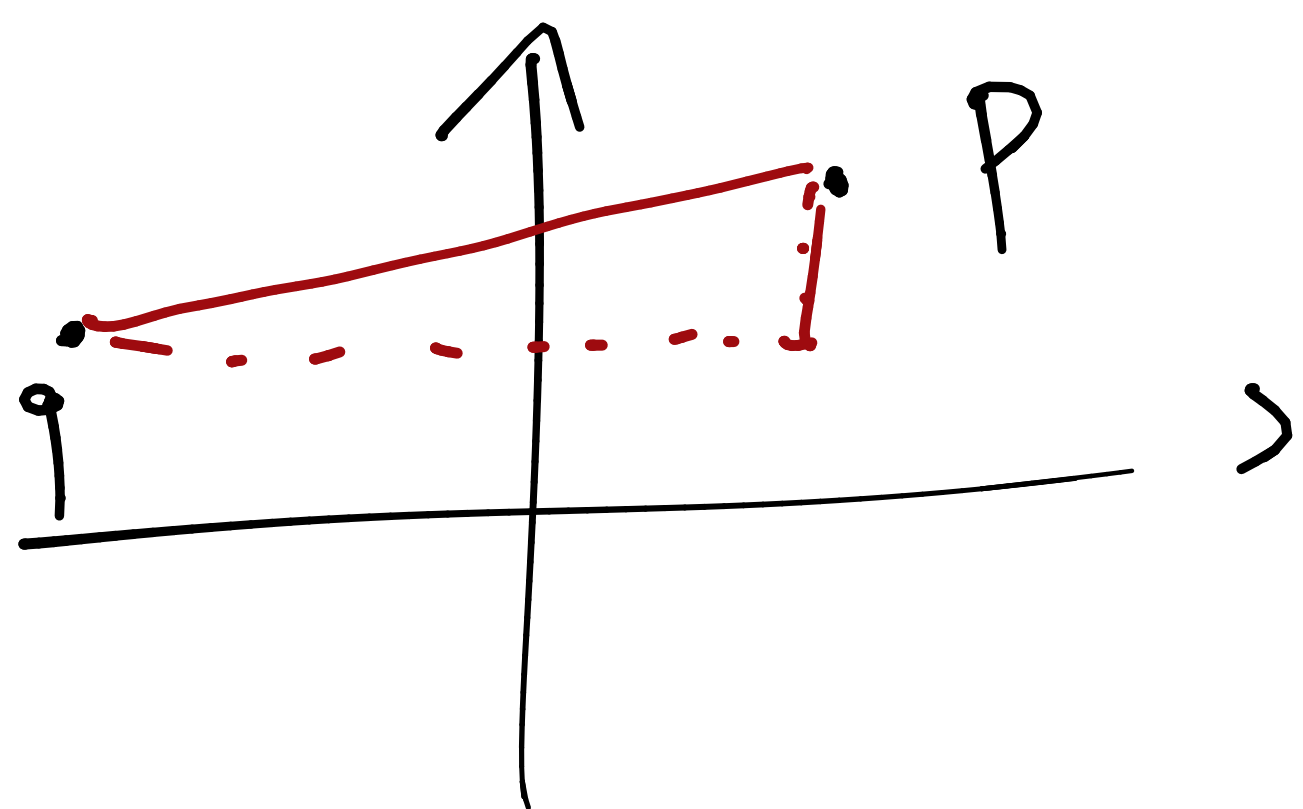
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$

esempio: il piano euclideo $\mathbb{R}^2$

chi è d in $\mathbb{R}^2$.

$$p = (p_1, p_2)$$

$$q = (q_1, q_2)$$



$$\begin{aligned} d_e(p, q) &= \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \\ &= \|p - q\| \end{aligned}$$

in fatti $p - q \in \mathbb{R}^2$ $p - q = (p_1 - q_1, p_2 - q_2)$

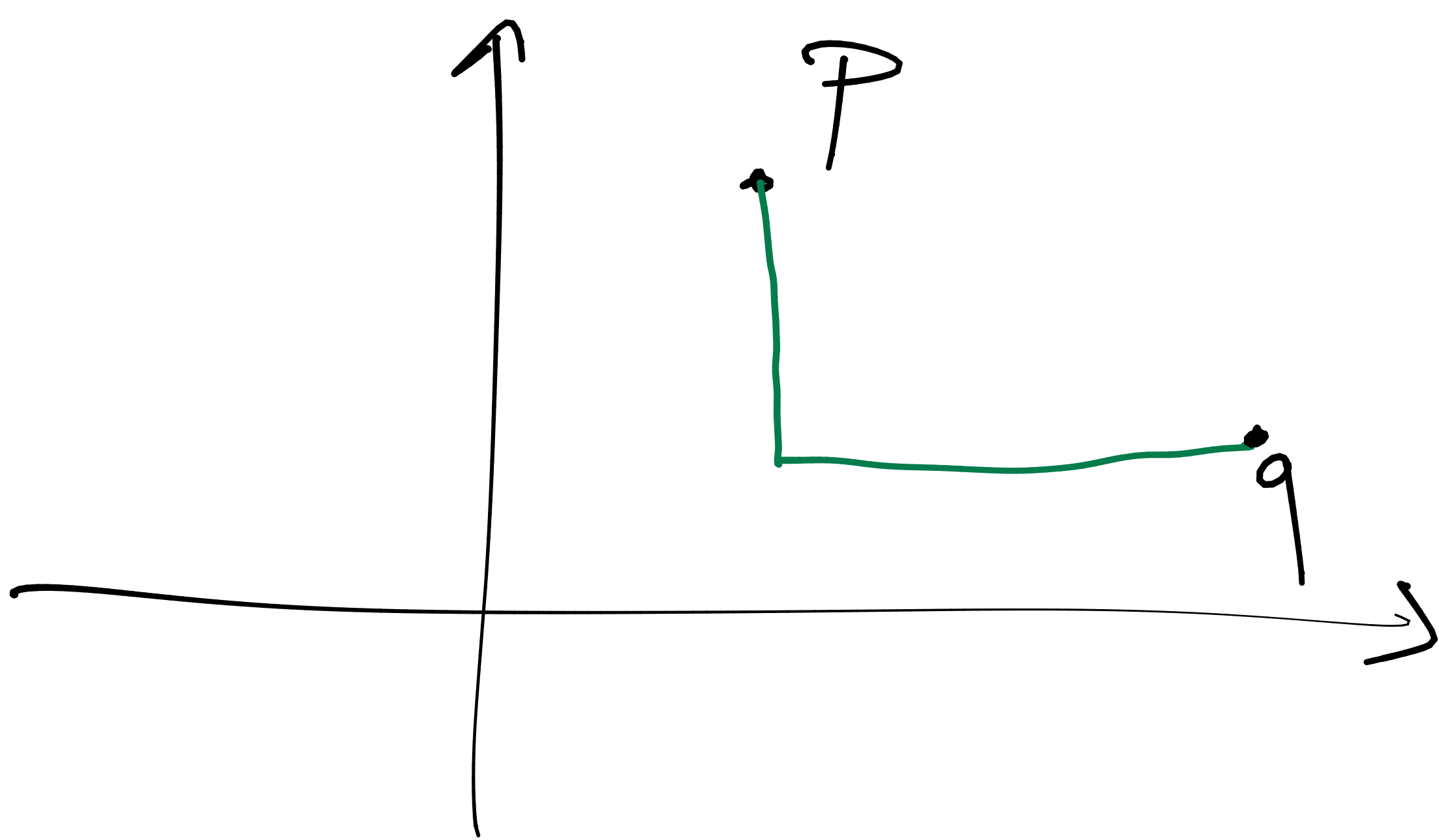
che si chiama distanza Euclidea.

Ci sono altre nozioni di distanza in $\mathbb{R}^2$

per esempio: $d_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$

anche questa è una distanza in $\mathbb{R}^2$.

[esercizio: verificare che d_1 soddisfa (i), (ii), (iii)]



se fossi vincolato
a muovermi
solo in orizzontale
o verticale
per andare da
p a q dovrei

seguire il percorso verde.

esempio $d_\infty(p, q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$

anche questa verifica le (i), (ii) e (iii)

[esercizio: farlo]

esempio se definissi $\hat{d}(p, q) = \min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$

non otterrei una distanza.

(i) $\hat{d}(p, q) = 0$ se e solo se $p = q$

se $p_1 = q_1$ e $p_2 \neq q_2 \Rightarrow \min\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} = \min\{0, \dots\} = 0$

$\Rightarrow$ $\uparrow$ non è una distanza.

●) esempio: in $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d_e(p, q) = \left(\sum_{i=1}^n |p_i - q_i|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \|p - q\|$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$d_1(p, q) := \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$$

$$d_\infty(p, q) := \max \{ |p_i - q_i|; i = 1, \dots, n \}$$

Alcune proprietà Def: $x, y, z \in X$

si ha sempre che

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$$

dim.: la disug. triangolare dice che

$$d(x, y) \leq d(z, y) + d(x, z)$$

$$\Rightarrow d(x, y) - d(z, y) \leq d(x, z)$$

Inoltre $d(x, z) \geq d(z, y) - d(x, y)$

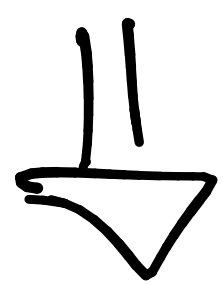
perché per la dis. triangolare

$$d(x, z) + d(x, y) \geq d(z, y)$$

Mettenendo insieme le due dis. in giallo

$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y)$$

$$d(x, z) \geq d(z, y) - d(x, y)$$



$$t \geq s \quad \& \quad t \geq -s$$

$$\Rightarrow \quad t \geq |s|$$

$$\Rightarrow \quad d(x, z) \geq |d(x, y) - d(z, y)|$$

TESI.

Esempio nel caso particolare in cui

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{dove } x, y \in \mathbb{R}^n$$

ovvero $d(x, y) = d_e(x, y)$ le proprietà
 appena dimostrate dice che $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$|\|x - y\| - \|x - z\|| \leq \|y - z\|$$

Def.: in uno spazio metrico (X, d)

esiste la nozione di palla. Dato $x \in X$ e $r > 0$

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

si chiama palla di centro x e raggio $r > 0$.

$$D_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

si chiama disco centrato in x con raggio r .

In uno spazio metrico esiste la nozione di insieme aperto e insieme chiuso.

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se
 $\forall x \in A \quad \exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$.

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se A^c
è aperto. dove $A^c = \mathbb{R} \setminus A$.

NOTA: si definisce $\emptyset$ aperto

$\Rightarrow \emptyset$ è sia aperto che chiuso

infatti $A = \mathbb{R}$ è aperto per la def
nel riquadro. $\Rightarrow A^c$ è chiuso

$\Rightarrow \emptyset$ è chiuso.

stesse cose per $A = \mathbb{R}$; uno non è
aperto e chiuso.

In $\mathbb{R}^n$ le def. e le stesse.

TUTORAGGIO

14:30

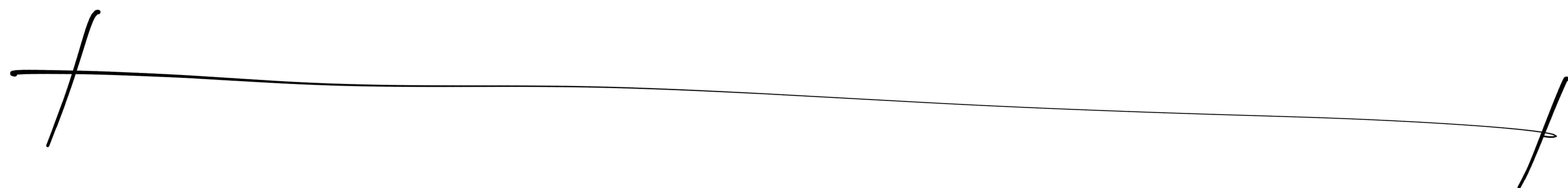
MARTEDÌ

RICEVIMENTO

14:30 - 16:30

G10

ufficio 228



Lezione 5 MARZO 24

in spazi metrici la definizione di insieme aperto è la stessa: un insieme $A \subseteq X$ non vuoto è aperto se e solo se $\forall x \in A$
 $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq A$. per definizione
anche $\emptyset$ è aperto

Proprietà

-) A è aperto $\Leftrightarrow A^c = X \setminus A$ è chiuso

-) Se A_i sono aperti, dove $i \in I$,
 I un insieme di indici, Allora

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A \text{ è aperto.}$$

-) Se C_i sono insiemi chiusi, $i \in I$,

allora

$$\bigcap_{i \in I} C_i = C \text{ è chiuso}$$

Definizione. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n) \subseteq X$ una successione di punti nello spazio metrico X . Allora diremo che x_n tende a $x \in X$ se e solo se vale la seguente condizione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$$

In tal caso scriviamo $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Una successione per la quale $\exists x \in X$ t.c. $x_n \rightarrow x$ si dice successione convergente.

Equivalentemente osserviamo che una successione x_n tende a x se e solo se vale la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad d(x_n, x) < \varepsilon \\ \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Equivalentemente $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$ se e solo se

$$\forall r > 0 \quad \exists N_r \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad x_n \in B_r(x) \\ \forall n \geq N_r$$

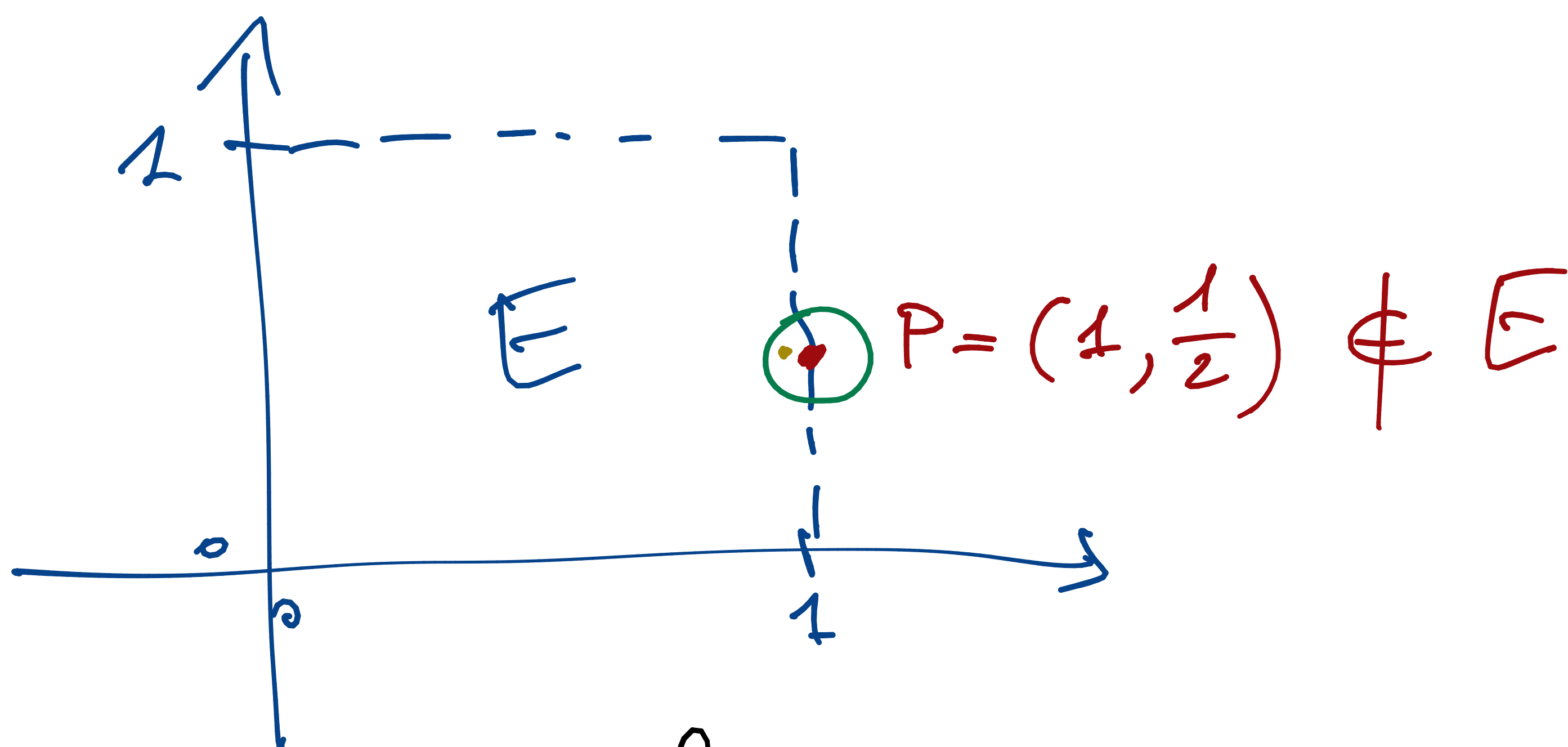
Definizione Sia $E \subseteq X$ dove (X, d) è uno spazio metrico. e sia $x \in X$

diremo che x è un punto di accumulazione per E se $\forall r > 0 \exists y \in E$ t.c. $y \neq x$ e $y \in B_r(x)$

Oss.: Se x è un punto di accumulazione per E non è necessariamente vero che $x \in E$

ex.: prendiamo in $\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$E = \{ p = (p_1, p_2) : p_1 \in (0, 1) \quad p_2 \in (0, 1) \}$$

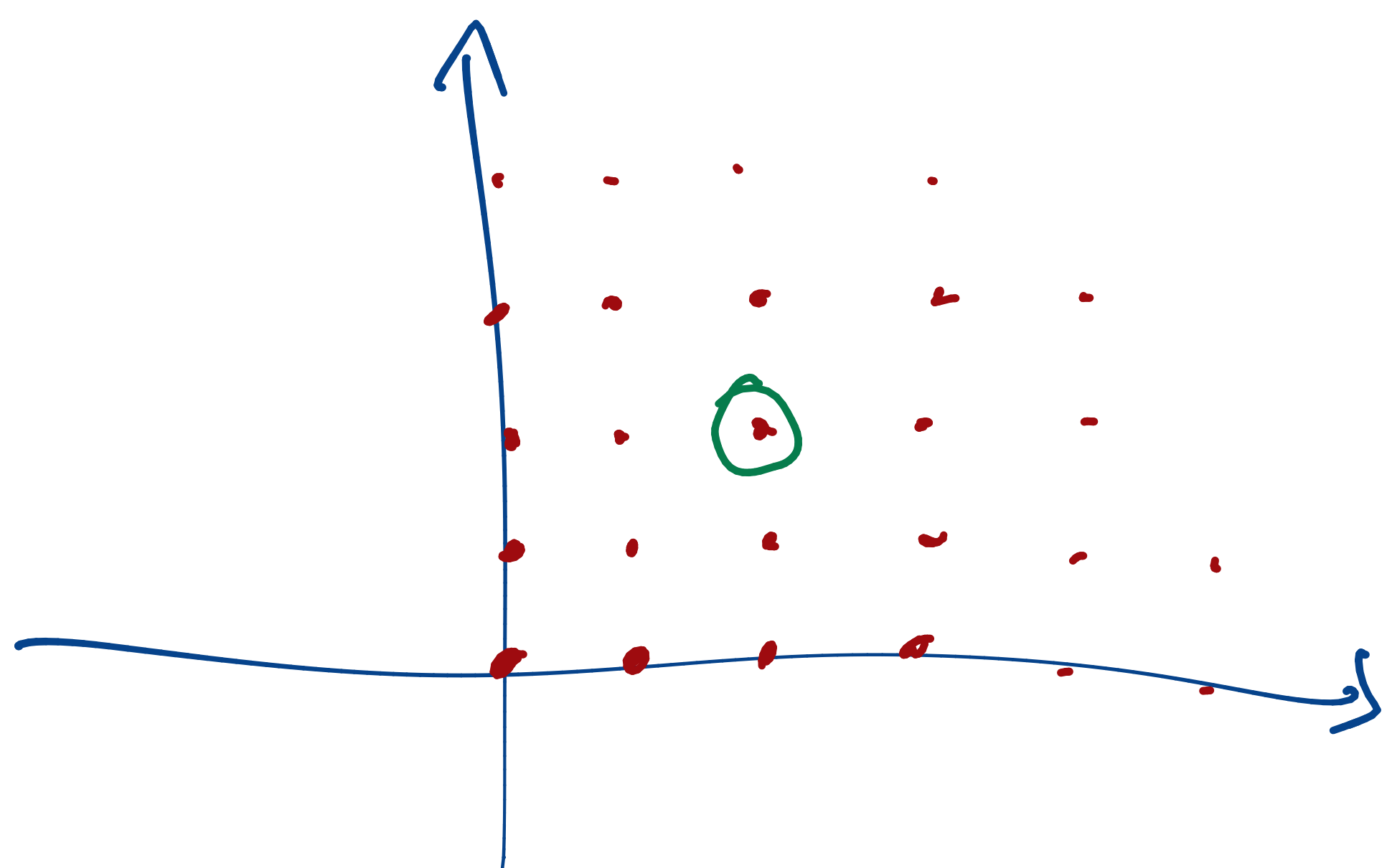


Verificare che P è un pto di accumulazione per E .

Oss.: se $x \in \bar{E}$ non è detto che x sia un punto di accumulazione per E .

esempio: $E \subseteq \mathbb{R}^2$ $E = \mathbb{N}^2 = \{ p = (p_1, p_2)$

$$\text{t.c. } p_1, p_2 \in \mathbb{N} \}$$



← nessuno di questi punti è di accumulazione per E

Un punto $x \in E$ t.r. x non è di accumulazione si dice punto isolato.

OSS.: $x \in X$ è di accumulazione per E se e solo se vale la seguente condiz.

$$\forall n > 0 \quad \exists y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \quad y_n \neq x$$

In particolare si osserva che se è verificata questa condizione, allora abbiamo trovato la successione $y_n \in E$, $y_n \neq x \quad \forall n$ e $y_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$.
(infatti $d(y_n, x) < \frac{1}{n}$)

Def.: $E \subseteq X$ indicheremo con $\overline{E}$ la chiusura di E in X . Inoltre indicheremo con $\overset{\circ}{E}$ la parte interna. Sono definiti come segue:

$$\overline{E} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq E}} C \quad \Rightarrow \text{è chiuso}$$

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq E}} A \quad \Rightarrow \text{è aperto.}$$

Lemma : Sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso
e sia $(x_n) \subseteq C$ convergente (ovvero t.c. $\exists x$
per cui $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$). Allora
 $x \in C$.

dim.: supponiamo che $x \notin C$ allora
 $x \in X \setminus C$ che è un insieme aperto.

Allora $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x) \subseteq X \setminus C$

quindi $\forall n > 0 \quad x_n \in C \Rightarrow x_n \notin X \setminus C$
 $\Rightarrow x_n \notin B_r(x)$

questo fatto mi dice che x_n non può
convergere a x ($d(x_n, x) \geq r$) Assurdo

Lemma Sia $E \subseteq X$. □

Allora $x \in \overline{E}$ se e solo se esiste una
successione $(x_n) \subseteq E$ t.c. $x_n \rightarrow x$.

dim.: supponiamo che esiste $(x_n) \subseteq E$ t.c.
 $x_n \rightarrow x$. Allora $\forall (x_n) \subseteq E \subseteq \overline{E}$ ^{essendo} simile
 $(x_n) \subseteq \overline{E} \Rightarrow x_n \rightarrow x \in \overline{E}$ per il
lemma precedente. $\Rightarrow x \in \overline{E}$.

Supponiamo $x \in \overline{E}$. Allora affermo che $\forall n > 0$
 $\exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$. Se fosse vero

avrei che $x_n \in E$ e $x_n \rightarrow x$.

Dimostriamo allora l'affermazione
 supponiamo $\exists \bar{n}$ per il quale non esistono
 punti $x_n \in B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x) \cap E \iff B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x) \cap E = \emptyset$

$$\Rightarrow B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x) \subseteq X \setminus E$$

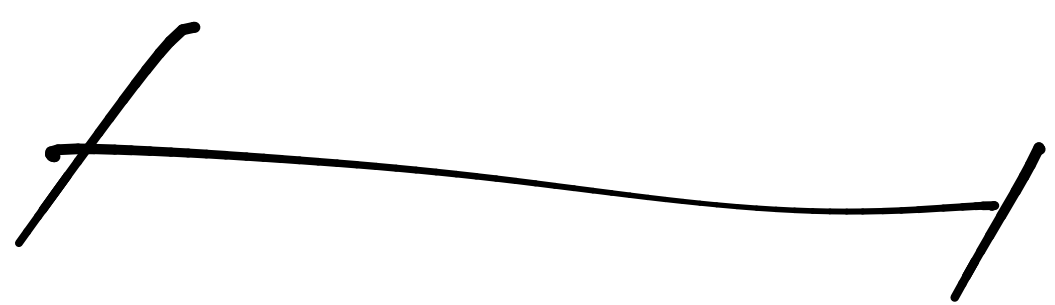
quindi $B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x)$ è un aperto $\Rightarrow$

$$X \setminus B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x) \text{ è chiuso} \Rightarrow \overline{E} \subseteq X \setminus B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x)$$

$$\Rightarrow x \in B_{\frac{1}{\bar{n}}}(x) \text{ non può appartenere a } \overline{E}.$$

D

Corollario: Un insieme $C \subseteq X$ è chiuso
 se e solo se $\forall$ successione $(x_n) \subseteq C$
 tale che $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow +\infty$ si
 ha $x \in C$.

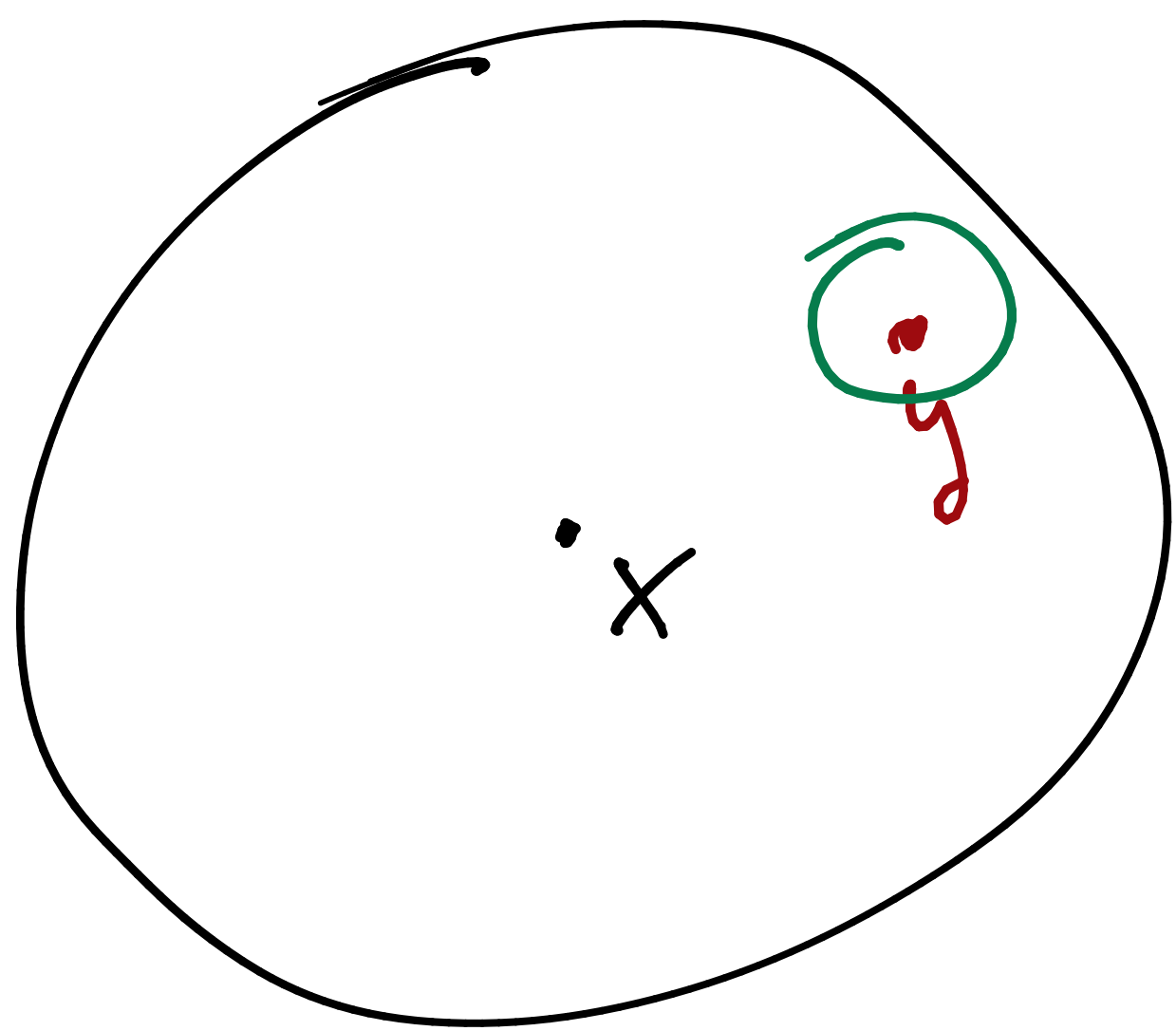


Le palle $B_r(x)$ sono aperte per
 definizione.

$$B_r(x) := \{y \in X \text{ t.c. } d(x, y) < r\}$$

sono aperte perché se prendo $A = B_r(x)$
 è aperto? devo verificare che $\forall y \in A$

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } B_\delta(y) \subseteq A.$$



$d(x, y) < r$ per
definizione perché $y \in B_r(x)$

$$\hat{r} := \frac{r - d(x, y)}{2}$$

verifichiamo che $B_{\hat{r}}(y) \subseteq A = B_r(x)$

prendo $z \in B_{\hat{r}}(y)$ devo far vedere
che $z \in B_r(x)$

devo quindi far vedere che $d(z, x) < r$

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$$

$$< \hat{r} + d(y, x)$$

$$= \frac{r - d(x, y)}{2} + d(y, x)$$

$$= \frac{r - d(x, y) + 2d(x, y)}{2}$$

$$= \frac{r}{2} + \frac{d(x, y)}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

D

oss.: $D_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$

insiemi chiusi [ex.: dimostrabile]

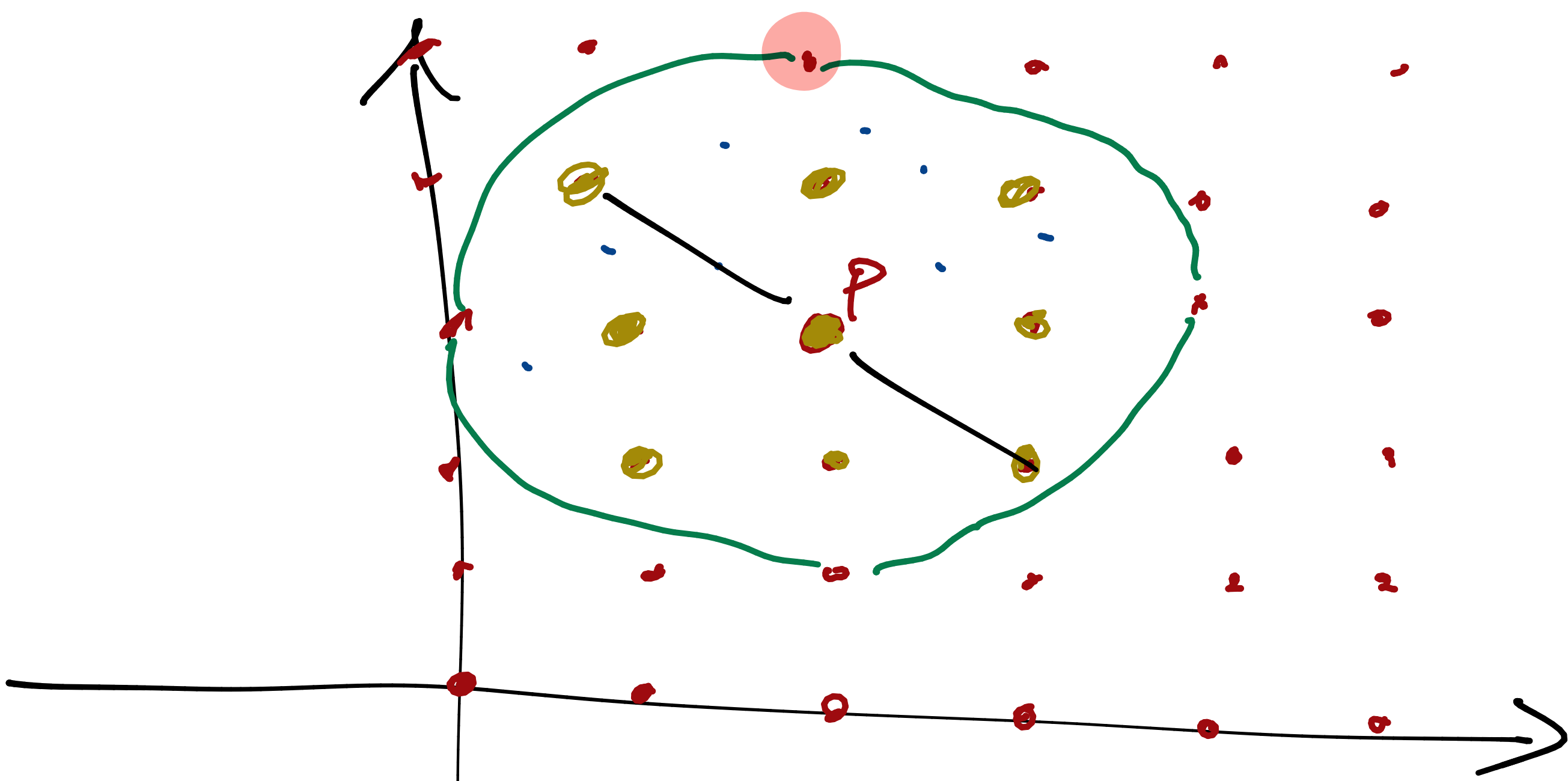
Domanda: è vero che $\overline{B_r(x)}$ coincide con $D_r(x)$?

$$D_r(x) = B_r(x) \cup \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

esmp prendo $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

considero il punto $p = (2, 3) \in \mathbb{N}^2$

considero la spaziometrica $X = (\mathbb{N}^2, d_e)$



considero $\underline{B_2(p)} = \{q \in \mathbb{N}^2 : d_e(p, q) < 2\}$

$$\Rightarrow \underline{B_2(p)} = B_2(p)$$

[ex.: convincersi di ciò]

oss.: i punti che non hanno coordinate naturali non appartengono allo spazio metrico considerato e quindi non è di accumulazione per $B_2(p) \Rightarrow p \notin \overline{B_2(p)}$

Def.: Sia $E \subseteq X$ definire

$$\text{diam}(E) = \sup \{ d(x, y) : x, y \in E \}$$

diametro di E .

esercizio verificare che $B_r(x)$, $D_r(x)$
hanno diametro $\leq 2r$

ATTENZIONE può venire $< 2r$.

Def.: Sia (X, d) uno spazio metrico e
sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f si dice
continua in $\bar{x} \in X$ se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(\bar{x}) - f(y)| < \varepsilon \\ \forall y \text{ t.c. } d(\bar{x}, y) < \delta.$$

Def.: Sia (X, d) uno spazio metrico

sia $E \subseteq X$ e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice continua su E se

$\forall x \in E$ f è continua in x .

Inoltre f si dice uniformemente continua

su E se vale la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in E \text{ t.c. } d(x, y) < \delta.$$

$$d(x, y) < \delta.$$

$$\Rightarrow \delta(\varepsilon)$$

REMARK Sia f continua su E .

$\forall x \in E$ si ha che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in E \quad d(x, y) < \delta.$$

in questo caso il $\delta > 0$ che esiste dipende dalla x che ho scelto

$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x, \varepsilon) > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in E \quad d(x, y) < \delta.$$

$\delta(x, \varepsilon) \Rightarrow$ dipende da x e ε .

esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

risulta continua ma non unif. continua

Def.: (X, d) spazio metrico, sia $K \subseteq X$

insieme non vuoto. Allora K si dice compatto se vale la seguente proprietà

Def. $\{A_i\}_{i \in I}$ insiemi aperti: tali che

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq K \quad \text{Allora} \quad \exists \hat{I} \subseteq I \text{ t.c.}$$

$\hat{I}$ è un insieme finito e $K \subseteq \bigcup_{i \in \hat{I}} A_i$

Negli spazi metrici questo nozione è equivalente alla seguente:

Def. $K \subseteq X$ si dice compatto per successioni se vale la seguente proprietà:

$$\forall (x_n) \subseteq K \implies \exists \text{ una sottosuccessione}$$

$$(x_{n_k}) \subseteq K \text{ A.r. } x_{n_k} \rightarrow x \in K.$$

Teo $K \subseteq X$ è compatto se e solo se K è compatto per successioni.

il teorema precedente vale in tutti gli spazi metrici.

Def. Sia $(x_n) \subseteq X$ una successione in uno spazio metrico (X, d) . Allora x_n si dice di

Cauchy se vale la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n, m \geq N_\varepsilon \\ \text{si ha } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Def. Lo spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy risulta convergente.

esempio $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è completo quindi $\mathbb{Q}$ con spazio metrico

Allora $\mathbb{Q}$ non è completo.

Basta prendere una successione di numeri razionali $q_n \in \mathbb{Q}$ tali che $q_n \rightarrow \sqrt{2}$

La successione q_n è convergente $\Rightarrow$ è di Cauchy $\Rightarrow$ nello spazio $\mathbb{Q}$ la successione q_n non converge perché il limite non esiste in $\mathbb{Q}$.

Lemma osserviamo che in qualsiasi spazio metrico ogni successione x_n convergente è anche di Cauchy. Il viceversa è vero se e solo se (X, d) è completo.

esempio

$\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ non è uno spazio metrico completo
 $\mathbb{Q}^2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x, y \in \mathbb{Q} \}$

Lemma: Supponiamo (X, d) spazio metrico e supponiamo $(x_n) \subseteq X$ successione di Cauchy. Supponiamo che $\exists$ sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a qualche $x \in X$.

Allora tutta la successione x_n converge a x .

dim.: con Scianna.

Corollario: Se (X, d) spazio metrico completo e sia $E \subseteq X$. Allora lo spazio (E, d) è completo se e solo se E è chiuso.

dim.: Se E è chiuso allora se $x_n \in E$ convergente allora il limite di x_n deve appartenere ad E . Se prendiamo $x_n \in E$ successione di Cauchy, essa ammette un limite $x \in X$ perché (X, d) è completo.
 $\Rightarrow$ essendo E chiuso si ha $x \in E$.

Viceversa supponiamo ogni successione di Cauchy $(x_n) \subseteq E$ ammetta limite x in E .

Vogliamo mostrare che E è chiuso.

E è chiuso $\Leftrightarrow \forall$ successione $x_n \in E$ convergente il limite è ancora $x \in E$.

Prendiamo $x_n \in E$ convergente a $x \in X$

$\Rightarrow x_n$ è di Cauchy (perché convergente)

$\Rightarrow x$ deve appartenere ad E .

Quindi E è chiuso. $\square$

Def.: Sia (X, d) metrica e sia $E \subseteq X$.

Allora E si dice limitato se $\exists x \in X$ ed

$\exists r > 0$ t.c. $E \subseteq B_r(x)$.

Equivalentemente E è limitato se e solo se $\text{diam}(E) < +\infty$. (ESERCIZIO)

Def.: Sia (X, d) metrica su $E \subseteq X$.

E si dice totalmente limitato se vale la seguente proprietà:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ e esistono n punti:
 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

↑ dice che
 $\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$
 ricopre E .

Oss.: Nello spazio $\mathbb{R}$ le due nozioni di
 limitatezza e totale limitatezza sono
 equivalenti. Lo stesso vale per $\mathbb{R}^n$.

In generale però i due concetti non
sono equivalenti.

Esempio: definiamo un insieme

$$X = \left\{ \text{le successioni } (a_n) \subseteq \mathbb{R} \text{ tali che} \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \right\}$$

L'insieme X forma uno spazio metrico
 e definisce la distanza d nel
 seguente modo: se $a = (a_n)$ e $b = (b_n)$

$$d(a, b) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

se avessimo aut. $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$
 $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$

$$\Rightarrow d(a, b) = d_e(a, b) = \sqrt{\sum_{n=1}^k |a_n - b_n|^2}$$

mollemente " $X = \mathbb{R}^\infty$ " o $\mathbb{R}^\mathbb{N}$

chi $E = B_1(\bar{0})$ dove $\bar{0} = (0, 0, 0, 0, \dots)$

$$B_1(\bar{0}) = \left\{ a = (a_n) : d(a, \bar{0}) < 1 \right\}$$
$$= \left\{ a = (a_n) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2} < 1 \right\}$$

esercizio: Far vedere che $B_1(\bar{0})$ è limitato ma non totalmente limitato.

Se provate a ricoprire $B_1(\bar{0})$ con palline di raggio $\frac{1}{2}$ potete dimostrare che ve ne occorrono infinite.

Teorema: Sia (X, d) spazio metrico

Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $K \subseteq X$ è compatto per successioni
- (ii) $K \subseteq X$ è compatto
- (iii) $K \subseteq X$ è completo e totalmente limitato.

Corollario (X, d) è uno spazio metrico completo

$K \subseteq X$ è compatto $\Leftrightarrow K \subseteq X$ è compatto per successioni
 $\Leftrightarrow K$ è chiuso e totalmente limitato

Teorema : in $\mathbb{R}^n$, che è completo,
 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\Leftrightarrow$ è chiuso e
limitato

Dim.: segue dal fatto che K è limitato
se e solo se è totalmente limitato. $\square$

Ci focalizziamo ora sullo spazio metrico $\mathbb{R}^n$
e ne considereremo sempre (e puzi)
la distanza euclidea $d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

Ricordiamoci che queste distanze e anche
la norma del vettore $x - y$.

$$\|x - y\| = d_e(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Sia $q \in \mathbb{R}^n$ un punto fissato e sia
 $v \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo

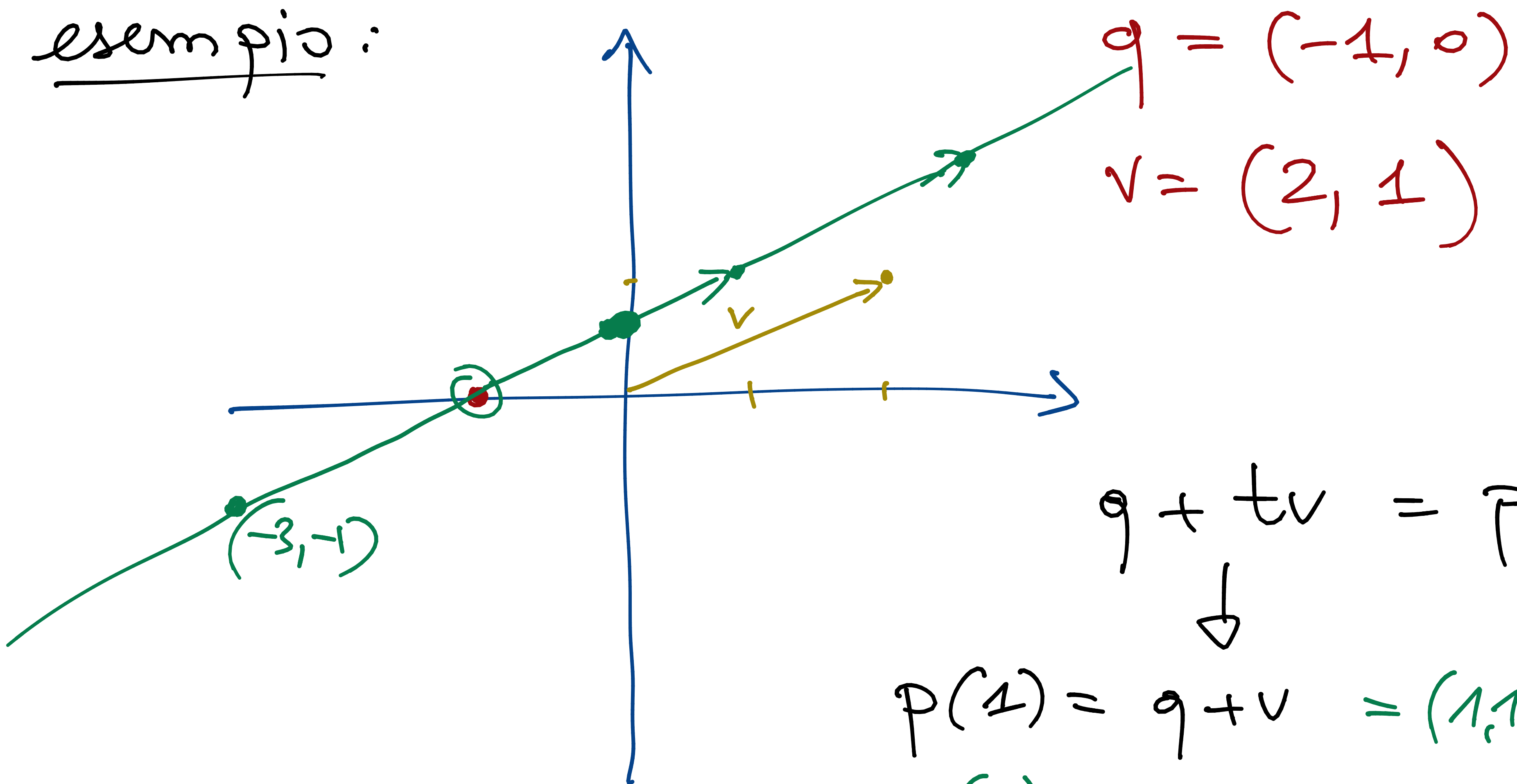
$$v \neq (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}$$

Se t è un parametro in $\mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$,
il punto

$$p(t) = q + tv$$

definisce un punto sulla retta passante
per q e avente direzione v .

esempio:



$$q + tv = p(t)$$

↓

$$p(1) = q + v = (1, 1)$$

$$p(0) = q$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$p(2) =$$

$$p(-1) = (-3, -1)$$

tutti i punti della retta verde sono identificati da un valore del parametro t .

Al variare del parametro t varia il punto $p(t)$ sulla retta verde.

Chiamiamo tale retta $r_{q,v}$

Ricordiamo che ogni retta del piano Cartesiano è esprimibile come luogo di punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano

$$ax + by + c = 0$$

(*)

dove a e b non sono contemporaneamente nulli.
 $(a,b) \neq (0,0)$

Facciamo vedere che ogni retta descritta dall'equazione $(*)$ è esprimibile anche in forma parametrica.

Dobbiamo far vedere che $\exists q \in \mathbb{R}^2$ e $v \in \mathbb{R}^2$ con $v \neq \vec{0}$ t.c. il punto

$$p(t) = q + tv$$

descrive tutti e soli i punti della retta implicita in $(*)$. Visto che $(a, b) \neq (0, 0)$ definisco

$$q := \begin{cases} (-\frac{c}{a}, 0) & \text{se } a \neq 0 \\ (0, -\frac{c}{b}) & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

verifichiamo che $q \in$ retta definita in $(*)$.

$$\text{Infatti: se } x = -\frac{c}{a} \text{ e } y = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot x + b \cdot y + c = -c + c = 0$$

OK

Se $a = 0$ stessa verifica.

Supponiamo sempre $a \neq 0$ (d'ora in poi)
l'altro caso si fa allo stesso modo.

Dobbiamo trovare il vettore v .

$$v = (-b, a) \in \mathbb{R}^2 \quad \& \quad v \neq \vec{0}$$

Verifichiamo che $p(t) := q + tv$
appartiene alla retta definita in $(*) \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} p(t) &= (p_1, p_2) = (q_1, q_2) + t(v_1, v_2) \\ &= \left(-\frac{c}{a}, 0\right) + t(-b, a) \\ &= \left(-\frac{c}{a} - tb, ta\right) \end{aligned}$$

Sostituiamo nell'eq. $(*)$ e vediamo se
viene 0

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y + c &= a\left(-\frac{c}{a} - tb\right) + tab + c \\ &= -c - tab + tab + c = 0 \end{aligned}$$

quindi $p(t)$ appartiene alla retta in $(*)$
Verifichiamo ora che ogni punto $p=(x,y)$ che
soddisfa $(*)$ (che sta sulla retta in forma
implicita)
può essere scritto come un certo $p(t)$.

$$ax + by + c = 0$$

Calcoliamo $x \Rightarrow$

$$ax = -by - c$$

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

$$= -\frac{b}{a}y + q_1$$

ponendo $t = \frac{y}{a} \Rightarrow$

$$x = -bt + q_1$$

$$= v_1 t + q_1$$

d'altro conto avendo posto $t = \frac{y}{a}$

$$\Rightarrow y = at = v_2 t = v_2 t + q_2$$

mettendo insieme le due eq. giuste

$$x = v_1 t + q_1$$

$$y = v_2 t + q_2$$

$$(x, y) = vt + q = p(t)$$

Quindi il punto (x, y) che appartiene alla retta in $(*)$ è esprimibile come $p(t) = q + vt$ prendendo $t = \frac{y}{a}$. Ovvero $(x, y) \in r_{q, v}$.

Ogni retta del piano è equivalentemente esprimibile o in forma implicita $(*)$ o in forma parametrica

$$p(t) = q + tv$$

ATTENZIONE non tutte le rette parametriche sono esprimibili nella forma $y = mx + c$ sono

le rette della forma $x = c$

non si possono esprimere nella forma $y = mx + c$

LE RETTE in forma parametrica
descrivono anche tutte le rette in $\mathbb{R}^2$.