

Ci mettiamo nello spazio metrico (X, d)

$$X = \mathbb{R}^n \text{ e } d = d_e \quad \left[d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \right]$$

Consideriamo la distanza euclidea

dove $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$= \|x - y\|$$

Nel caso particolare in cui ci mettiamo in $\mathbb{R}^2$ talvolta denoteremo le coordinate dei punti $p = (p_1, p_2) = (x, y)$ dove adesso $x \in \mathbb{R}$
 $y \in \mathbb{R}$

Nel caso particolare in cui ci mettiamo in $\mathbb{R}^3$ talvolta denoteremo $p = (x, y, z)$

Consideriamo ora una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e ricordiamo che f si dice continua in $x \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Se } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$\text{per ogni } y \in B_\delta(x) \quad (\Leftrightarrow \forall y : d_e(x, y) < \delta)$$

$$(C) \quad (\Leftrightarrow \forall y : \|x - y\| < \delta)$$

Si può osservare che f è continua in $x \in \mathbb{R}^n$ e solo se vale la seguente proprietà:

$$(C') \quad \forall \text{ successione } (x^m) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ tale che}$$

$$x^m \rightarrow x \text{ quando } m \rightarrow +\infty$$

$$\text{si ha } f(x^m) \rightarrow f(x)$$

$x^m \rightarrow x$ se e solo se $d_e(x^m, x) \rightarrow 0$
per $m \rightarrow +\infty$

$\Leftrightarrow$ se e solo se $\|x^m - x\| \rightarrow 0$
per $m \rightarrow +\infty$

$f(x^m) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow |f(x^m) - f(x)| \rightarrow 0$
quando $m \rightarrow +\infty$

In modo del tutto analogo possiamo considerare
funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^k$

a sua volta $f(x)$ ha k componenti quindi

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$

$\Leftrightarrow$ si può vedere $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ come
un vettore contenente k funzioni $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $i = 1, 2, \dots, k$.

Allo stesso modo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ si dice
continua in x se e solo se

(C) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$
 $\forall y \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|x - y\| < \delta$

$\Leftrightarrow$

(C') $\forall x^m$ successione tale che $x^m \rightarrow x$ per $m \rightarrow +\infty$
si ha $f(x^m) \rightarrow f(x)$

$\Leftrightarrow$ per ogni successione x^m t.c.
 $\|x^m - x\| \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$

si ha $\|f(x^m) - f(x)\| \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$.

Def: Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ dove $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto,
allora f si dice continua su A se $\forall x \in A$
vale la condizione (C) per tutti gli $y \in A$
 $\Leftrightarrow \forall x \in A$ vale la proprietà (C')
ma la successione x^m deve essere scelta
 $(x^m) \subseteq A$.

esempi: prendiamo $\mathbb{R}^2$ e facciamo vedere
che la funzione distanza $d_e: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
è continua su tutto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Prendiamo una successione $w^m \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
tale che $w^m \rightarrow w \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$

$$w^m = (\underbrace{w_1^m, w_2^m}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^2}}, \underbrace{w_3^m, w_4^m}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^2}}) \rightarrow \text{Ogni successione ha 4 componenti}$$

$$p^m = (w_1^m, w_2^m) \quad q^m = (w_3^m, w_4^m)$$

$$\begin{aligned} d_e(w^m) &= d_e(p^m, q^m) = \|p^m - q^m\| \\ &= \sqrt{(p_1^m - q_1^m)^2 + (p_2^m - q_2^m)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(w_1^m - w_3^m)^2 + (w_2^m - w_4^m)^2}$$

verificare che d_e è continue su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
 d_e equivalente a verificare che $\forall w^m \rightarrow w$
 si ha $d_e(w^m) = d_e(p^m, q^m) \rightarrow d_e(p, q)$
 $= d_e(w)$

dove ho indicato $w = (p, q)$

~~invece di fare queste verifiche (enorme)~~
 ci basiamo su un teorema più generale
 che è il seguente:

Teo: Sia (X, d) uno spazio metrico.

Allora $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

in realtà
 $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$

d è continua su $X \times X$.

$(\Rightarrow)$ ogni volta che $x^m \rightarrow x$ e
 $y^m \rightarrow y$ si ha $d(x^m, y^m) \rightarrow d(x, y)$

dim.: voglio far vedere che quando

$m \rightarrow +\infty$ si ha $|d(x^m, y^m) - d(x, y)| \rightarrow 0$

ma allora

$$0 \leq |d(x^m, y^m) - d(x, y)| = \left| d(x^m, y^m) - d(x^m, y) + d(x^m, y) - d(x, y) \right|$$

$$\leq |d(x^m, y^m) - d(x^m, y)| + |d(x^m, y) - d(x, y)|$$

$$\leq d(y^m, y) + d(x^m, x)$$

dove ho usato che

$$|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c) \quad (\text{Lemma 1}^\circ)$$

$$d(y^m, y) \rightarrow 0$$

$$d(x^m, x) \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$

perché

$$x^m \rightarrow x$$

$$y^m \rightarrow y$$

quindi ho la tesi. $\square$

Applicando il teorema al caso $X = \mathbb{R}^2$ ho che

$$n \quad q^m \rightarrow q \text{ e } p^m \rightarrow p \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{ho che } d_e(p^m, q^m) \rightarrow d_e(p, q)$$

Potrei applicarlo anche a $X = \mathbb{R}^n$

$$n \quad p^m \rightarrow p \in \mathbb{R}^n \text{ e } q^m \rightarrow q \in \mathbb{R}^n$$

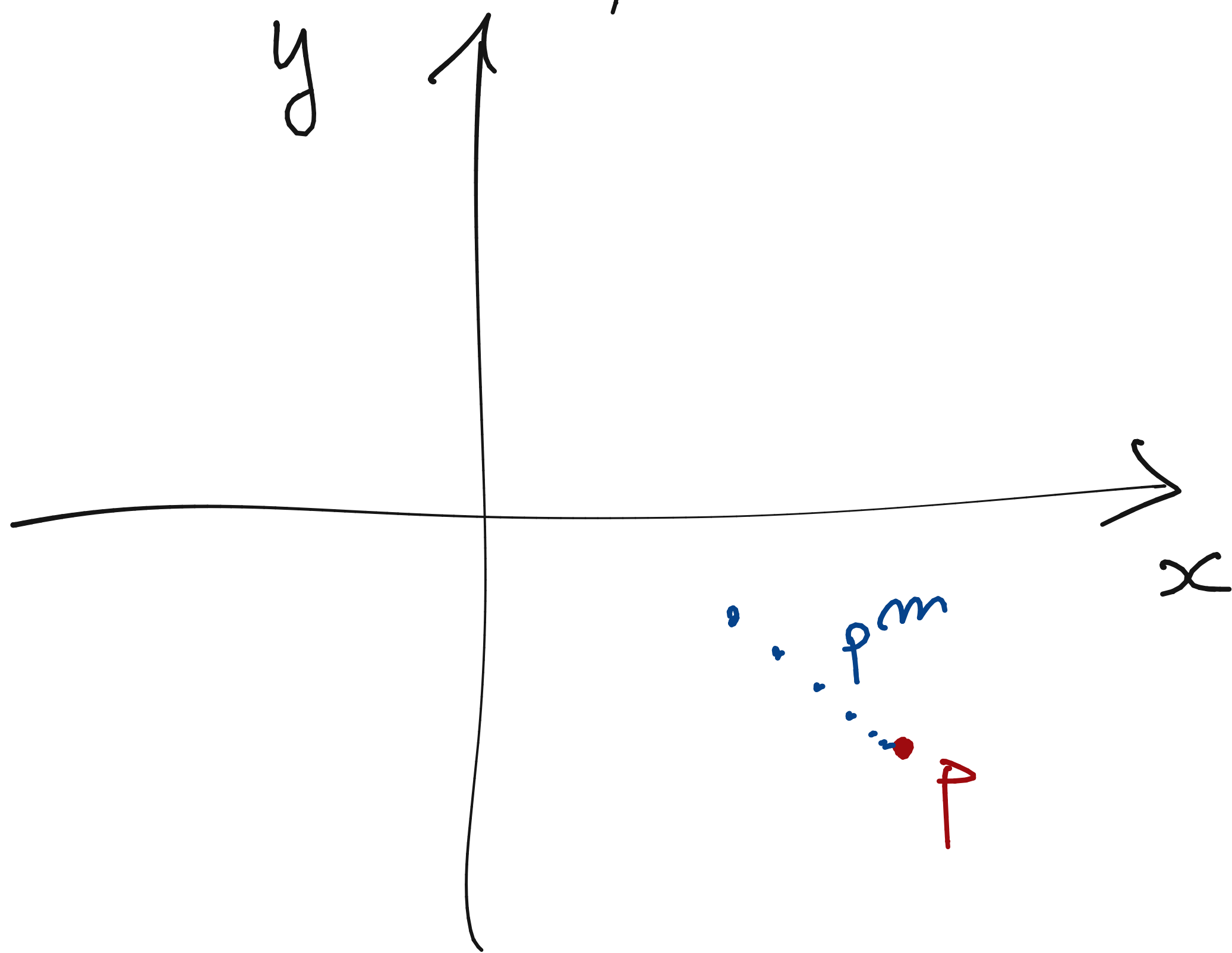
$$\|p^m - q^m\| \rightarrow \|p - q\|.$$

Esempio: prendiamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

definita da $p = (x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(p) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cerchiamo di capire se f è continua.
 prendiamo $p \neq (0,0)$ f è continua in p ?



devo chiedermi se $\forall p^m \rightarrow p$ si ha $f(p^m) \rightarrow f(p)$

$$p^m = (x_m, y_m)$$

$$p^m \rightarrow p = (x, y)$$

$$\Leftrightarrow x_m \rightarrow x \quad \& \quad y_m \rightarrow y$$

per m grande
 posso supporre che

$$f(p^m) = f(x_m, y_m) =$$

$$(x_m, y_m) \neq (0,0)$$

$$= \frac{x_m \cdot y_m}{x_m^2 + y_m^2}$$

$$\longrightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) = f(p)$$

effettivamente f è continua nei $p \neq (0,0)$

Controlliamo ora se f è continua in $(0,0)$

se prendo $p^m \rightarrow p = (0,0)$ $p^m = (x_m, y_m)$

$$\frac{x_m \cdot y_m}{x_m^2 + y_m^2}$$

$$\longrightarrow \frac{0}{0}$$

forma indeterminata

Per verificare che f è continua in $(0,0)$
 dovrai mostrare che $\forall p^m = (x_m, y_m) \rightarrow (0,0)$
 si ha

$$f(p^m) = \frac{x_m \cdot y_m}{x_m^2 + y_m^2} \rightarrow f((0,0)) = 0$$

se per esempio $p^m = (x_m, y_m) = (0, \frac{1}{m})$

$$p^m \rightarrow (0,0)$$

$$f(p^m) = f\left(0, \frac{1}{m}\right) = \frac{0}{0^2 + \frac{1}{m^2}} = 0$$

$$\Rightarrow f(p^m) \rightarrow 0 = f(0,0)$$

se per esempio $(x_m, y_m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \rightarrow (0,0)$

$$f(x_m, y_m) = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}} = \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{2}{m^2}} = \frac{1}{2}$$

quindi $f(x_m, y_m) \not\rightarrow 0 = f((0,0))$

ovvero f NON è continua nel punto $(0,0)$

esempio 2: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

f è continua in $(x,y) \neq (0,0)$ perché
 è ripeto di due funt. cont. e il den. non
 si annulla.

Verifichiamo che f è continua anche in $(0,0)$

Facciamo vedere che per ogni successione
 $(x_m, y_m) \rightarrow (0,0)$ si ha

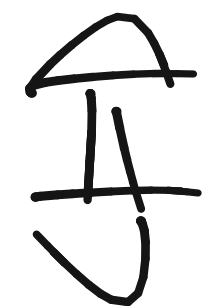
$$f(x_m, y_m) \rightarrow f(0,0) = 0$$

facciamo vedere che $|f(x_m, y_m)| \rightarrow 0$

$$0 \leq \left| \frac{x_m y_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} \right| = \frac{|x_m y_m|}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} \leq$$

$$2|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} (a-b)^2 &\geq 0 \\ (a+b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ -2ab &\leq a^2 + b^2 \end{aligned}$$

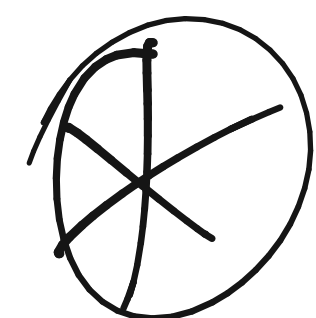
$$\leq \frac{1}{2} \frac{x_m^2 + y_m^2}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow +\infty$

perché $x_m \rightarrow 0$ $y_m \rightarrow 0$

Def.: Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e prendiamo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Definiamo la derivata parziale di f in x rispetto a x_i il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$



dove $e_i = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$

i -esima coordinata

$$h e_i = (0, \dots, h, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$x + h e_i = (x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n)$$

Se il limite del rapporto incrementale $\textcircled{*}$ esiste finito la funzione f si dice che ammette derivata parziale in x rispetto a x_i e tale derivata si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

Se f ammette tutte le derivate parziali
 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$

Allora f si dice derivabile in x .

Si chiama gradiente di f in x il vettore

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

esempio prendiamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita
 come $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Nella notazione appena introdotta avrei scritto

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

Cerchiamo

le derivate parziali di f in $(0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}((0,0)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h e_1) - f((0,0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

la funzione f ammette derivate parziali in $(0,0)$ rispetto a x_2 .

Cerchiamo la derivata parziale rispetto alla seconda variabile

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h e_2) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ e il suo gradiente è

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) \right) = (0,0)$$

ATTENZIONE Abbiamo trovato una funzione derivabile in $(0,0)$ ma discontinua in $(0,0)$

Def.: Differenziabilità.

esempio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

fissiamo un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ e calcoliamo le
sistemi $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$$

supponiamo per ora $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0) \Rightarrow$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\bar{x} + h)^2 + \bar{y}^2} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{h}$$

è il limite del rapporto incrementale per $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) \text{ dove } g(h) = \sqrt{(\bar{x} + h)^2 + \bar{y}^2}$$

$$g'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(\bar{x} + h)}{\sqrt{(\bar{x} + h)^2 + \bar{y}^2}} \Big|_{h=0} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

e effettivamente visto da lontano $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} + h)^2} - \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{h} \\ &= \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \end{aligned}$$

Come successo in $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \|f(h, 0) - 0\|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{non esiste}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

In questo caso $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ f non è derivabile.
Per $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ lo è e il gradiente

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}, \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \right)$$

Def.: Data una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
possiamo sempre definire le derivate
parziali come nel caso $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

in questo caso il rapporto incrementale scitta sopra
non è più uno scalare ma un vettore
di $\mathbb{R}^k$. Se esiste il limite sopra

f si dice che ammette derivata parziale in x rispetto alla variabile x_i

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^k$ visto che $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$
 il limite sopra, ovvero $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, non è il
 vettore

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix}$$

Allora si vuole che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ammetta
 derivate parziali in x rispetto a x_i se e solo
 se ogni componente di f , $(f_1, f_2, \dots, f_k)$
 ammettono derivata parziale in x rispetto a x_i .

Diciamo che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è derivabile in x
 se f ammette tutte le derivate parziali
 rispetto a tutte le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$
 e in tal caso il gradiente di f è
 una matrice

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dots & \nabla f_1(x) & \dots \\ \dots & \nabla f_2(x) & \dots \\ & \dots & \\ \dots & \nabla f_k(x) & \dots \end{pmatrix}$$

∇ is a matrix $k \times n$.

example $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x = (x_1, x_2)$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

$$f(x_1, x_2) = (\|x\|, x_1^2 + 1)$$

$$f_1(x) = \|x\|$$

$$f_2(x) = x_1^2 + 1$$

$$x \neq (0, 0)$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|x\|} & \frac{x_2}{\|x\|} \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1$$

2t

4

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_1+h)^2 + 1 - x_1^2}{h}$$

= deriv of $t^2 + 1$ w.r.t t (deriv $t = x_1$)

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$$

perché

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + 1 - (x_1^2 + 1)}{h} = 0$$

Inoltre $f(x_1, x_2) = (\|x\|, x_1^2 + 1)$

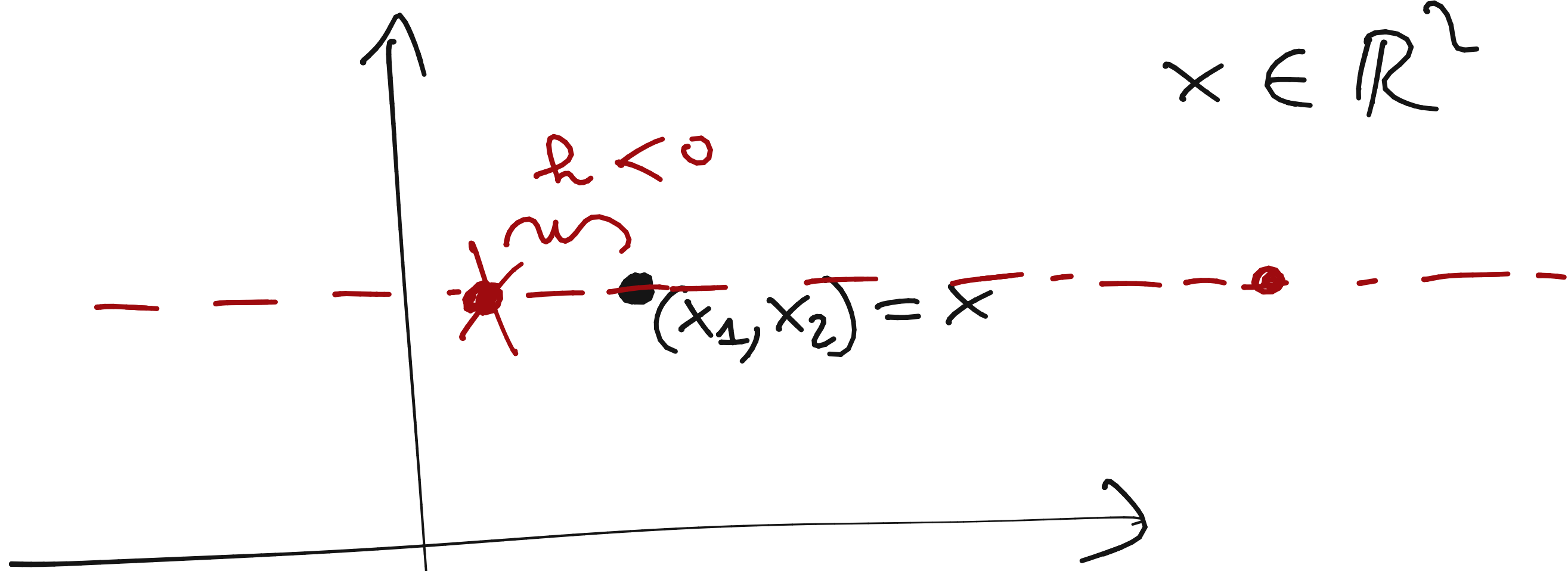
non è derivabile in $x = (0, 0)$

perché non ha una prima componente
 $f_2(x_1, x_2) = \|x\|$

Derivate direzionali:

$$u: f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

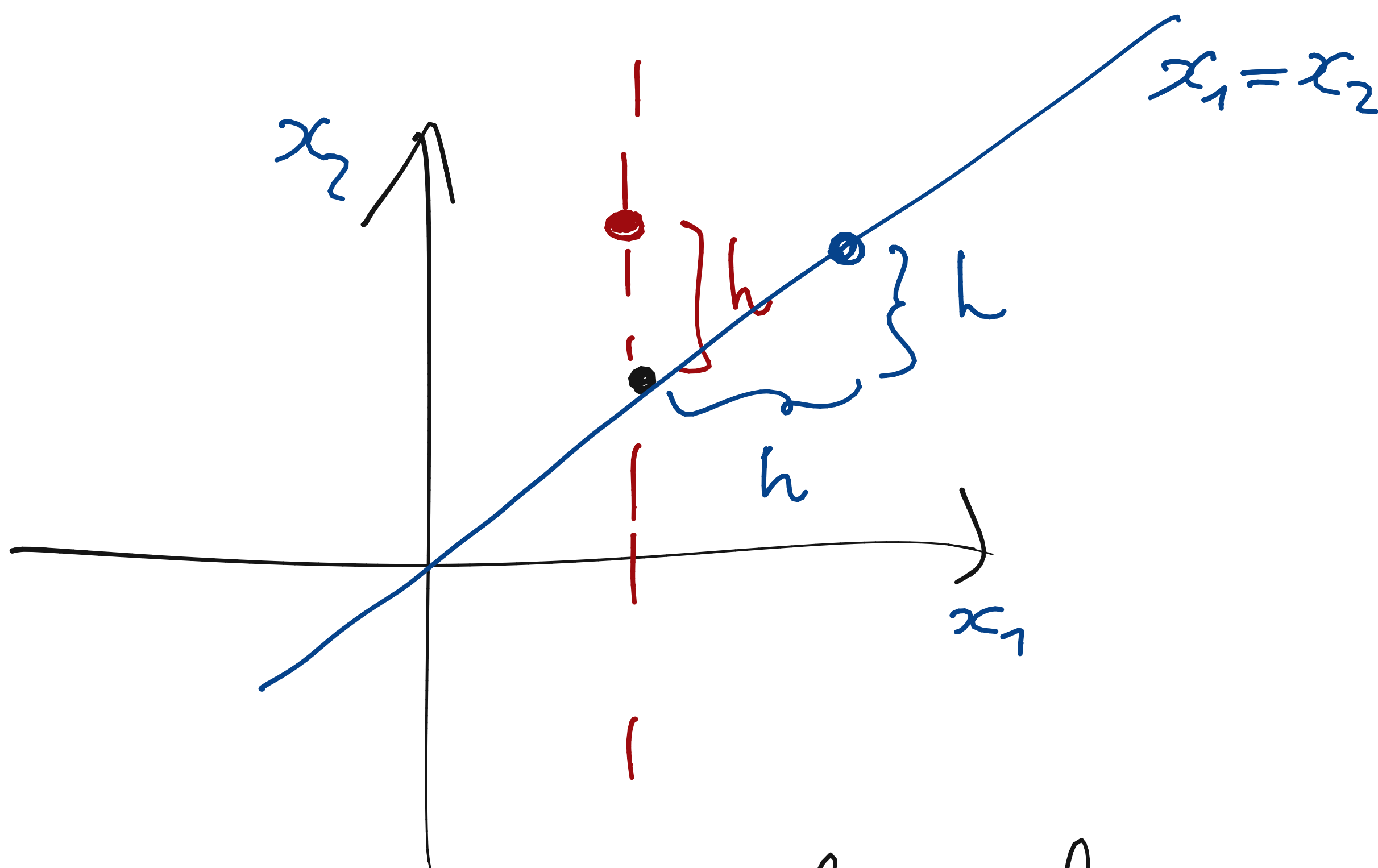


Le derivate parziali di f rispetto a x_2
 corrispondono a calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

La derivata rispetto x_2

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$



Posso calcolare la derivata anche muovendomi su una retta obliqua

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

Def: S.e. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e

v un vettore di $\mathbb{R}^n$, $v \neq (0, 0, \dots, 0)$

Allora definisco la derivata di f in direzione v nel punto x come il limite, se esiste finito, di

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

Nell'esempio precedente $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $x = (x_1, x_2)$
calcolare il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2+h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

se scrivo $(x_1+h, x_2+h) = (x_1, x_2) + h(1, 1)$
 $= x + h\nu$ dove $\nu = (1, 1)$

Esempio precedente $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2$$

prevediamo
 $\nu = (1, 1)$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial \nu}(1, 2) =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 2) + h\nu - f(1, 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2+h) - f(1, 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 3(2+h) - (1^2 - 3 \cdot 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 6 - 3h + 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{h} \stackrel{h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} h - 1 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= 2x_1 - 3$$

Def.: Sia $f: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^h$.

Supponiamo f multi derivabile in $\bar{x}$.

Allora f si dice differenziabile in $\bar{x}$ se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

Oss.: $f: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ quindi $f(x) \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^h$$

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_h}(\bar{x}) \right) = \nabla f(\bar{x})$$

$$(x - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2, \dots, x_h - \bar{x}_h)$$

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = \sum_{i=1}^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) (x_i - \bar{x}_i) \rightarrow \text{È il prodotto riga per colonna tra i due vettori}$$

Def.: nel caso in cui $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$
 se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e f è derivabile in $\bar{x}$.
 Si dice che f è differentiabile in $\bar{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\|f(x) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})(x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

Oss.: $Df(\bar{x}) =$ matrice $k \times n$

mentre $(x - \bar{x})$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$
 $Df(\bar{x})(x - \bar{x}) =$ un vettore in $\mathbb{R}^k$

$$\left[Df(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \right]_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_h}(\bar{x}) \cdot (x_h - \bar{x}_h)$$

i-esima riga di $Df(\bar{x})$ per lo il vettore $(x - \bar{x})$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \frac{\partial f_i}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

Teorema: Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ supponiamo
 f sia differentiabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora si ha

(a) f è continua in $\bar{x}$.
 (b) $\forall v$ vettore di $\mathbb{R}^n$ $\|v\| \neq 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = Df(\bar{x})v$

dim.: Facciamo vedere il punto (a).

Dobbiamo mostrare che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \|f(x) - f(\bar{x})\| = 0$

$$\Leftrightarrow d_e(f(x), f(\bar{x})) \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(\bar{x})$$

Sommo e sottraggo lo stesso termine

$$\text{Sei } \|f(x) - f(\bar{x})\| = \|f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\|$$

$$\leq \|f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\| + \|\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\|$$

Moltiplico e divido per questo termine

$$= \frac{\|f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} \|x - \bar{x}\| + \|\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\|$$

L'oggetto in giallo tende a 0 quando $x \rightarrow \bar{x}$ perché f è differenziabile in $\bar{x}$ quindi anche se lo moltiplico per $\|x - \bar{x}\|$ andrò a zero perché anche $\|x - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \bar{x}$.

Il secondo pezzo tende a zero

$$\|\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})\| \leq \|\nabla f(\bar{x})\| \|x - \bar{x}\|$$

le componenti di questo vettore • Sono

$$(\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}))_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} (x_j - \bar{x}_j)$$

Dimostrazione della disuguaglianza

$$\|\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} (x_j - \bar{x}_j) \right]^2}$$

$$\|\nabla f(\bar{x})(x-\bar{x})\|^2 = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})(x_j - \bar{x}_j) \right)^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_j^2 \cdot \sum_{j=1}^n b_j^2 \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})^2 \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})^2 \right) \|x - \bar{x}\|^2$$

$$= \|x - \bar{x}\|^2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})^2$$

Stando la radice quadrata otteniamo

$$\|\nabla f(\bar{x})(x-\bar{x})\| \leq \|x-\bar{x}\| \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\nabla f(\bar{x})\|$$

Dalla disuguaglianza dedotto in precedenza otteniamo che anche il termine

$$\|\nabla f(\bar{x})(x-\bar{x})\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow \bar{x}$$

quindi tende a zero anche

$$\|f(x) - f(\bar{x})\| \quad \text{quando } x \rightarrow \bar{x}.$$

Mostriamo che

$$b) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

Dalla differenziabilità di f in $\bar{x}$ si

ha

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\|f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

scelgendo verso da prendere $x = \bar{x} + hv$
si ha che $x \rightarrow \bar{x}$ quando $h \rightarrow 0$
e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})hv\|}{\|hv\|} = 0$$

$x - \bar{x} = hv$
 $\uparrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})hv}{\|hv\|}$$

$$\rightarrow (0, 0, \dots, 0) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})v}{|h| \|v\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (0, 0, \dots, 0)$$

$$h \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})v}{|h| \|v\|} \rightarrow 0 \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h \|v\|} \rightarrow \frac{\nabla f(\bar{x})v}{\|v\|}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

$$h \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})v}{-h \|v\|} \rightarrow 0 \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{-h \|v\|} \rightarrow - \frac{\nabla f(\bar{x})v}{\|v\|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} \rightarrow \nabla f(\bar{x})v$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

□

$$h \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})v}{|h| \|v\|} \rightarrow 0 \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h \|v\|} \rightarrow \frac{\nabla f(\bar{x})v}{\|v\|}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

$$h \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x})v}{-h \|v\|} \rightarrow 0 \dots$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{-h \|v\|} \rightarrow - \frac{\nabla f(\bar{x})v}{\|v\|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} \rightarrow \nabla f(\bar{x})v$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x})v$$

□