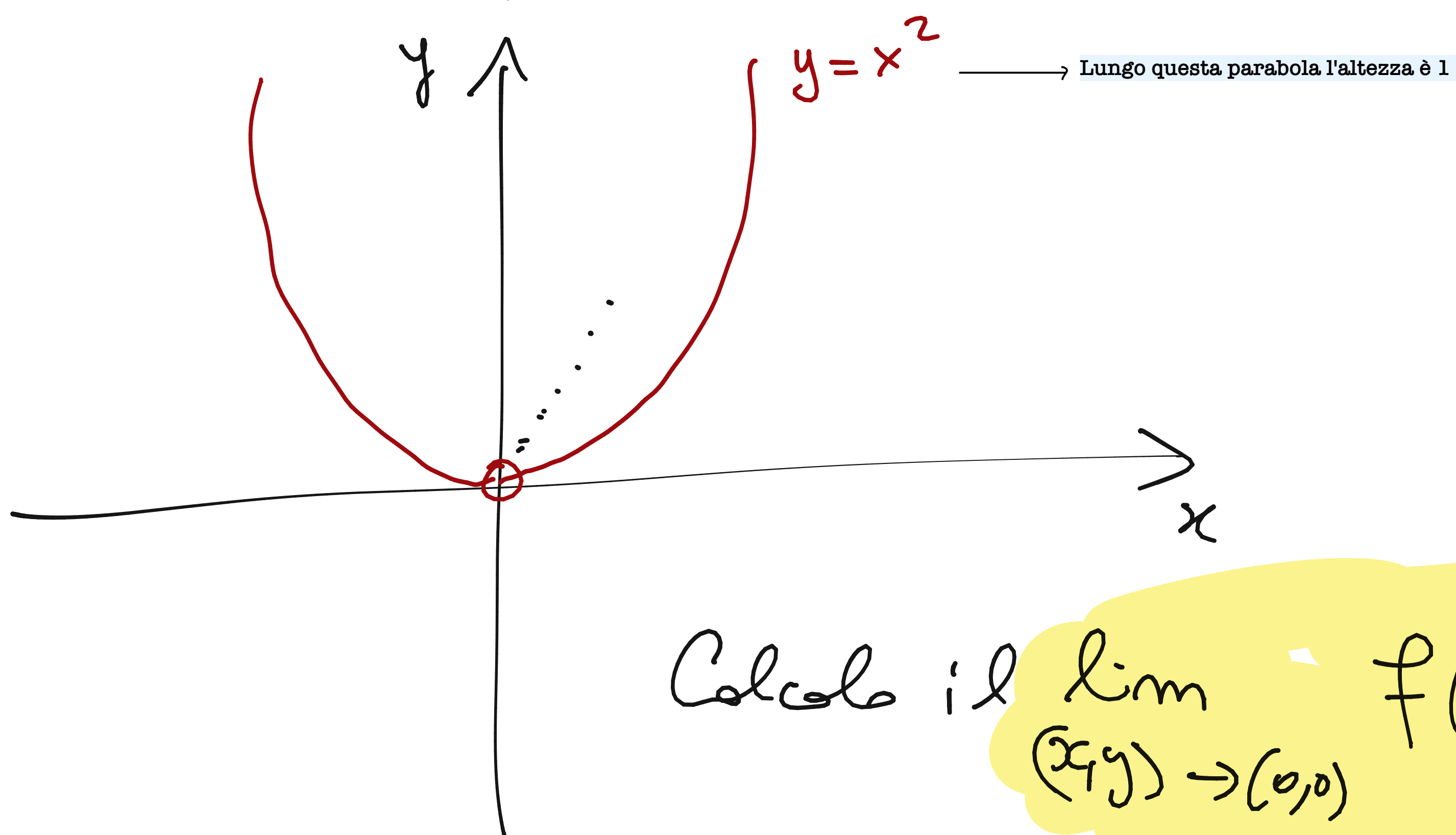


Teo Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è differenziabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ allora f è anche continua in $\bar{x}$
 e $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

esempio Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da
 $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \text{ e } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$



Calcolo il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) =$
non esiste

In particolare la funzione non è continua in $(0,0)$ ($\Delta \Rightarrow \Delta \quad f(x,y) \rightarrow f(0,0) = 0$ quando $(x,y) \rightarrow (0,0)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

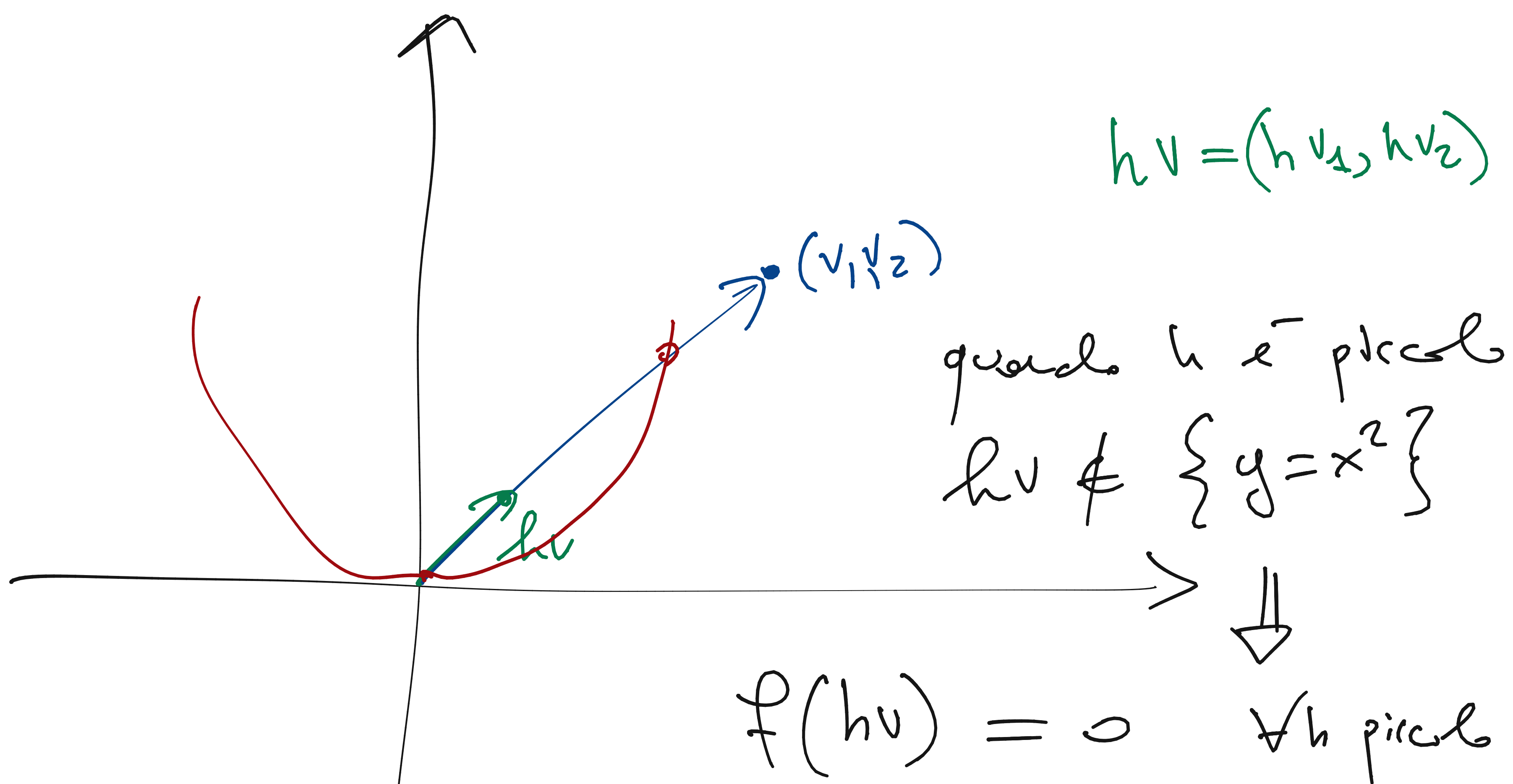
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\Rightarrow Df(0,0) = (0,0)$$

Adesso però f NON è differenziabile
in $(0,0) \Rightarrow$ perché non è continua

oss: $v \neq (0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0)+hv) - f(0,0)}{h}$

$$v = (v_1, v_2) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h}$$

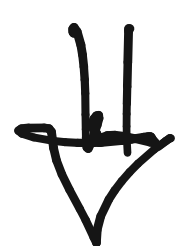


$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

la funzione f ammette tutte le derivate
direzionali in $(0,0)$ e sono tutte 0

$$\nabla f(0,0) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$



$$(0,0) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

Remark $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$

$\Leftrightarrow \forall$ successione $x_n \rightarrow \bar{x}$

$$f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

Teorema (del differenziale totale)

Sia $f: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^h$.

Deve ammettere tutte le derivate parziali

Supponiamo la funzione f sia derivabile in un intorno $B_\delta(\bar{x})$ e che le

derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ risultano continue in $\bar{x}$. Allora f è differenziabile

in $\bar{x}$.

dim.: Mettiamoci nel caso in cui

Punto in cui vogliamo verificare tutte le condizioni

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ quindi chiamiamo $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

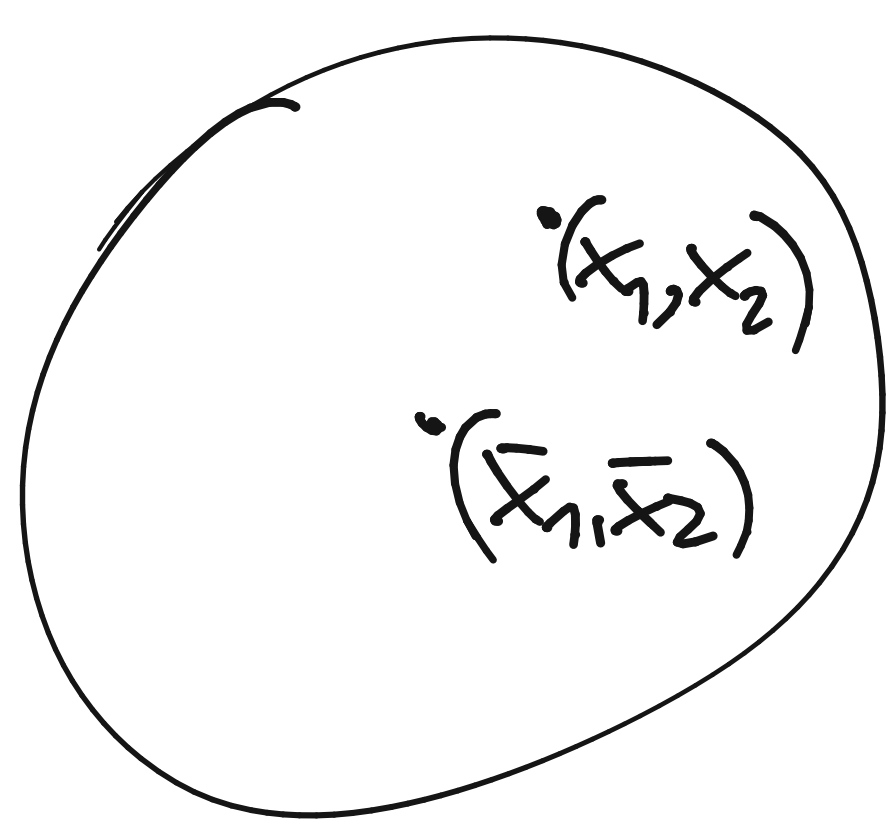
Vogliamo far vedere che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

Dividiamo il prodotto gradiente per differenza nelle sue componenti

Esplicitiamo il limite secondo le sue coordinate

$$\Leftrightarrow \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

 $B_\delta(\bar{x})$

$$f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) =$$

Sommiamo e sottraiamo questo termine

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, \bar{x}_2) + f(x_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad (*)$$

Osservo che la funzione $t \mapsto f(t, \bar{x}_2)$

è continua in un intorno di 0 e derivabile

le sue derivate e $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2)$

il teorema di Lagrange ci garantisce che

$\exists \xi \in (\bar{x}_1, x_1)$ t.c.

$$f(x_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1)$$

$t \mapsto f(t, \bar{x}_2)$ $h(t) = f(t, \bar{x}_2)$ è continua
e derivabile in $[\bar{x}_1, x_1] \Rightarrow$ Lagrange

dici che $h(x_1) - h(\bar{x}_1) = h'(\xi)(x_1 - \bar{x}_1)$

La funzione $t \mapsto f(x_1, t)$ è continua e
derivabile in $[\bar{x}_2, x_2] \Rightarrow$ Lagrange

$\exists \eta \in (\bar{x}_2, x_2)$ t.c.

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(x_2 - \bar{x}_2)$$

Dalla (*) ottengo

$$f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(x_2 - \bar{x}_2)$$

Vedo e serve il limite di dimostrare la differenziabilità: devo verificare che

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(x_2 - \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$$

$$= \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_2 - \bar{x}_2)}{\|x - \bar{x}\|}$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Questo limite è zero perché posso scrivere

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left| \dots \right| \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| |x_1 - \bar{x}_1|}{\|x - \bar{x}\|} + \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| |x_2 - \bar{x}_2|}{\|x - \bar{x}\|}$$

e questi due termini vanno a zero

$$\text{perché } \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| \rightarrow 0$$

e quando $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ho anche che

$$x_1 \rightarrow \bar{x}_1, \text{ e quindi anche } \xi \in [\bar{x}_1, x_1] \rightarrow \bar{x}_1$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ è continua in } (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\text{Allo stesso tempo } \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{\|x - \bar{x}\|} = \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{\sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2}} \leq 1$$

di conseguenza $\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| \cdot \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{\|x - \bar{x}\|}$

tende a zero quando $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

Il termine vale $\frac{\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| (x_2 - \bar{x}_2)}{\|x - \bar{x}\|}$

anche tende a zero per motivi

simili. Infatti $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, y) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rightarrow 0$

perché se $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Rightarrow y \rightarrow \bar{x}_2$
visto che $y \in [\bar{x}_2, x_2]$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ è continua
in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

□

Esempio prendiamo $f(x, y) = xy - 1$

Vediamo se f è differenziabile nel punto

$(\bar{x}, \bar{y}) = (1, -2)$.

Sicuramente la funzione è derivabile perché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

ora queste derivate parziali sono continue
in $(1, -2)$ (in realtà lo sono in tutto $\mathbb{R}^2$)

quindi il teo del diff. totale.

$\Rightarrow$ allora f è differenziabile in $(1, -2)$

Inoltre per il teorema precedente, essendo f differenziabile in $(1, -2)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$
 $v \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, -2) = \nabla f(1, -2) \cdot (v_1, v_2)$$

$$\nabla f(x, y) = (y, x) \Rightarrow \nabla f(1, -2) = (-2, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1, -2) = (-2, 1) \cdot (v_1, v_2) \\ = -2v_1 + v_2$$

Un ed esempio volevo calcolare la derivata direzionale rispetto a $(v_1, v_2) = (1, -1)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1, -2) = -2 - 1 = -3$$

Altro esempio : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

vediamo se f : la funzione f è continua
 (lesione scema)

Derivabilità in $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

f è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = \underline{\underline{(0,0)}}$

f è differenziabile? $\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad ?$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \underline{\text{NON ESISTE}}$$

ad esempio $(x,y) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

lungo la direzione $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ lo da

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

Ma se $(x,y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h}}{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2}} = \frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{2}{h^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

quindi ho trovato due successioni lungo le quali il limite è diverso $\Rightarrow$ il limite $(x,y) \rightarrow (0,0)$ non esiste.

Di conseguenza la funzione $f(x,y)$ non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio verificare che invece sono

differenziabili le seguenti funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2) xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \end{cases}$$

ATTENZIONE le funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possono anche essere definite solamente su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Avrai potuto supporre che $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dove A è un aperto. I teoremi precedenti valgono lo stesso!

Te (diff. totale) Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
derivabile in $B_\delta(\bar{x})$ di $\bar{x} \in A$

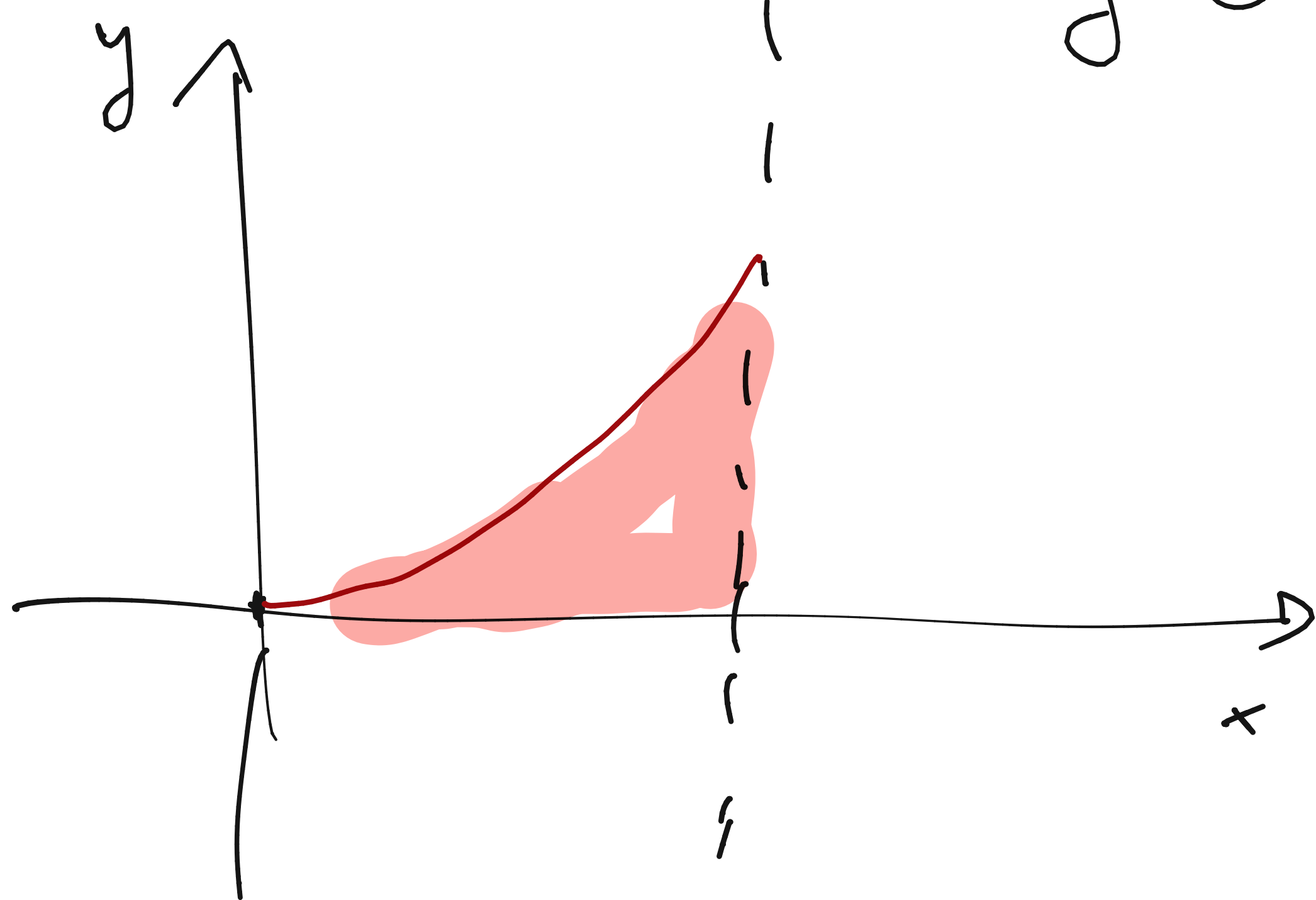
$(B_\delta(\bar{x}) \subseteq A)$ con derivate parziali continue
in $\bar{x} \Rightarrow f$ è differenziabile in $\bar{x}$.

ATTENZIONE Tutte le funzioni possono
essere definite su insiemi non necessariamente
aperti. Oppure $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e chiediamo
di calcolare $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x)$ per $\hat{x} \in \partial A$
Frontiera dell'insieme

Esempio prendiamo $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

per $(x,y) \in A$

$$A = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x \in (0,1) \\ y \in (0,x^2) \end{array} \right\}$$



in disegno $y=x^2$
L'insieme A coincide
colla regione compresa
tra l'asse x e il
grafico di $y=x^2$

con il vincolo $x \in (0,1)$

- x,y

?

Domanda Calcolo $\lim_{\substack{(x,y) \in A \\ (x,y) \rightarrow (2,0)}} f(x,y)$

In questo caso $\frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow 0$

perché essendo $y \in (0, x^2)$

Togliendo y^2 dal denominatore, abbiamo fatto in modo di dividere per un termine che sarà sicuramente più piccolo, quindi la funzione sarà sicuramente maggiore o uguale a prima

$\Rightarrow 0 \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{x^3}{x^2+y^2} \leq \frac{x^3}{x^2} \parallel x$

Essendo x in $(0,1)$ e quindi sicuramente positivo e y in $(0, x^2)$ e quindi anch'esso sicuramente positivo, possiamo dire che la funzione sarà sicuramente positiva e mai negativa visto l'insieme su cui è definita

Sostituendo ad $y = x^2$ allora siamo sicuri che abbiamo messo sempre il suo valore massimo

Abbiamo quindi trovato due termini che tendono a zero, uno maggiorante ed uno minorante, quindi la funzione tende sicuramente al valore a cui tendono entrambi, ovvero zero

$\Rightarrow 0 \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq x$
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $0 \qquad \qquad \qquad 0$
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$

DERIVATE SUCCESSIVE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in A$

abbiamo studiato come calcolare le derivate parziali e le derivate direzionali di f in $\bar{x}$

Supponiamo che f sia derivabile in un intorno di $\bar{x}$, possiamo chiederci se le derivate parziali di f sono a loro volta derivabili.

Se f ammette derivata parziale rispetto a x_i in un intorno di $\bar{x}$, possiamo chiederci se la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ammette derivata parziale in $\bar{x}$ rispetto, ad esempio, a x_j .

In tal caso dobbiamo calcolare

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + h e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})}{h}$$

Se esiste finito tale limite diremo che f ammette derivata seconda mista rispetto alle variabili x_i e x_j . In tal caso

scriviamo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x} + h e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})}{h}$$

$$= : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\bar{x})$$

$\forall i, j$
 $\cap$

$\{1, 2, \dots, n\}$

Se $i=j$ allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(\bar{x})$

Supponiamo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $\bar{x} \in A$. Supponiamo f ammettere derivate seconde in $\bar{x}$ rispetto a tutte le variabili. Allora in tal caso definiamo l'HESSIANO di f come la matrice che contiene tutte le derivate seconde

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(\bar{x}) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(\bar{x}) \\ \dots & \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \dots & \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) & & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

In forma compatta scriviamo che $\nabla^2 f(\bar{x})$ ha come componenti nelle i -esima riga

e j-esima componente il termine

$$\nabla^2 f(\bar{x})_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x})$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

esempio: prendiamo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$
definite come

$$f(x, y) = x^2 y - \frac{1}{2} \log x$$

Abbiamo bisogno di questa condizione in quanto la funzione $\log(x)$ non è definita per valori di x che sono negativi.

$$\text{dove } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Sia $p = (1, -2)$ e calcoliamo l'Hessiano
in p .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - \frac{1}{2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y + \frac{1}{2x^2} & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = (1, -2) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 f(1, -2) = \begin{pmatrix} -4 + \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana risulta simmetrica

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{Non \u00e8 sempre vero}$$

ma in certi casi lo \u00e8:

Teorema di Schwarz: Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

con $A \subseteq \mathbb{R}^h$ e supponiamo f sia derivabile in A . Supponiamo anche che f ammetta derivate miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ e che

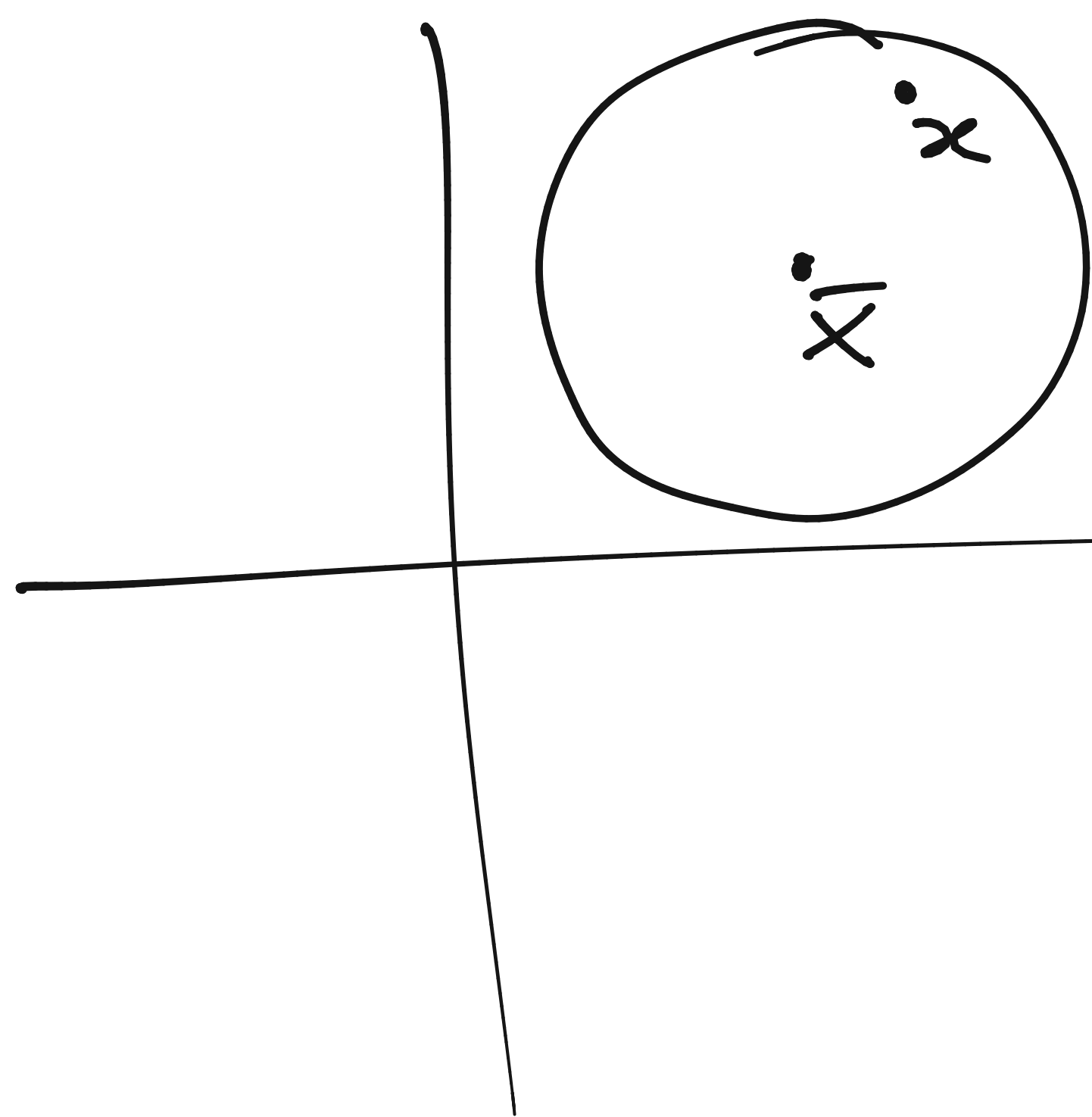
tal derivate rimangono continue in un punto $\bar{x} \in A$. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$$

dim: Supponiamo $n=2$ e da quindi la

due derivate miste sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

Prendiamo un punto $x \in A$ e supponiamo
 $x \in B_\delta(\bar{x}) \subseteq A$. e per semplicità
come nel disegno



supponiamo che

$$x = (x_1, x_2)$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\text{abbiamo } x_1 > \bar{x}_1$$

$$x_2 > \bar{x}_2$$

Allora scriviamo $h = (x_1 - \bar{x}_1)$ e $k = (x_2 - \bar{x}_2)$
 $h, k > 0$. Definisc

$$Q(h, k) := f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) - f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2)$$

$$(*) \quad - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + k) + f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Se derivato con $F: [\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h] \rightarrow \mathbb{R}$
la funzione

$$F(t) = f(t, \bar{x}_2 + k) - f(t, \bar{x}_2)$$

allora si ha

$$Q(h, k) = F(\bar{x}_1 + h) - F(\bar{x}_1)$$

$$= F'(\xi_1) (\bar{x}_1 + h - \bar{x}_1) = F'(\xi_1) h$$

dove nella seconda riga abbiamo applicato il teo di Lagrange, quindi $\xi_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1+h)$ che poteva essere applicato perché F è continua su $[\bar{x}_1, \bar{x}_1+h]$ e derivabile

$$\text{infatti: } \frac{\partial}{\partial t} F(t) = \frac{\partial}{\partial t} [f(t, \bar{x}_2+k) - f(t, \bar{x}_2)] \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2)$$

$$\text{Sapremo anche che } F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2)$$

Tornando all'espressione della G ho

$$\underline{\underline{G(h,k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2+k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) \right] h}}$$

della la funzione $\hat{F}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, t)$ è derivabile nell'intervallo $(\bar{x}_2, \bar{x}_2+k)$ e è anche continua su $[\bar{x}_2, \bar{x}_2+k]$, quindi infatti

$$\hat{F}'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, t) \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (\xi_1, t) \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, t)$$

$$= [\hat{F}(\bar{x}_2+k) - \hat{F}(\bar{x}_2)] h = \text{Lagrange}$$

$$= [\hat{F}'(\xi_2) k] h \quad \text{per un certo } \xi_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2+k)$$

$$G(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2) k h$$

Quindi per teorema di $G(h, k) = *$

per continuità alla $\square$.

Ripartiamo adesso da $*$

$$G(h, k) = f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) - f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + k) + f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

e definisco $H(t) = f(\bar{x}_1 + h, t) - f(\bar{x}_1, t)$

che è continua su $[\bar{x}_2, \bar{x}_2 + k]$ e derivabile in $(\bar{x}_2, \bar{x}_2 + k)$ con derivata

$$H'(t) = \frac{\partial}{\partial t} (f(\bar{x}_1 + h, t) - f(\bar{x}_1, t)) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, t) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, t)$$

inoltre $G(h, k) = H(\bar{x}_2 + k) - H(\bar{x}_2) =$ Lagrange

$$= H'(\eta_2) k = \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \eta_2) \right] k \quad \text{dove}$$

$$\eta_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2 + k)$$

Ripetiamo Lagrange $\Rightarrow$

$$\hat{H}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, \eta_2)$$

se chiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1 + h, \eta_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \eta_2) = \hat{H}(\bar{x}_1 + h) - \hat{H}(\bar{x}_1)$$

$$= \hat{H}'(\eta_1) h$$

con $\eta_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1 + h)$

$$\text{ma ora } \hat{H}'(\eta_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (\eta_1, \eta_2)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\eta_1, \eta_2) \Rightarrow$$

$$g(h,k) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}_1+h, \eta_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}_1, \eta_2) \right] k = \hat{f}'(\eta_1) h k$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\eta_1, \eta_2) h k$$

Mettendo insieme le formule

$$g(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2) h k = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\eta_1, \eta_2) h k$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\eta_1, \eta_2)$$

dove ricordiamo che

$$\xi_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1+h)$$

$$\eta_1 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_1+h)$$

$$\xi_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2+k)$$

$$\eta_2 \in (\bar{x}_2, \bar{x}_2+k)$$

Facciamo tendere $h, k \rightarrow 0$

quindi $\xi_1, \eta_1 \rightarrow \bar{x}_1$, $\xi_2, \eta_2 \rightarrow \bar{x}_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

ho usato che (per ipotesi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ è continua in $\bar{x}$)

$$\lim_{(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

□

DS: Le derivate seconde possono essere calcolate anche per funzioni

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

f si dice derivabile due volte (o si dice ammettere derivate seconde) se ogni sua componente $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ ammette derivate seconde.

Allo stesso modo il teorema di Schwarz si applica a funzioni $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ applicandolo componente per componente.

Def: Una funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $A \subseteq \mathbb{R}^h$ si dice di classe C^0 su A se è continua su A . In tal

caso scriviamo $f \in C^0(A; \mathbb{R}^k)$
 f si dice di classe C^m se ammette derivate di ordine m $[m \in \mathbb{N}]$

e tali derivate sono continue su A .

es: $m = 1 \longrightarrow$ derivate prime

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$m = 2 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$m=3 \rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \dots i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$$

In tal caso scriviamo $f \in C^m(A; \mathbb{R}^k)$
 se $f \in C^m(A; \mathbb{R}^k) \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 allora si dice che f è di classe C^∞
 e si scrive

$$f \in C^\infty(A; \mathbb{R}^k)$$

Oss.: Se $f \in C^1(A; \mathbb{R}^k) \Rightarrow$

f è anche $\in C^0(A; \mathbb{R}^k)$
 (conseguenza del teo del diff. totale)

In generale se $f \in C^m(A; \mathbb{R}^k)$
 allora tutte le derivate di ordine
 $m' \leq m$ sono continue.

D