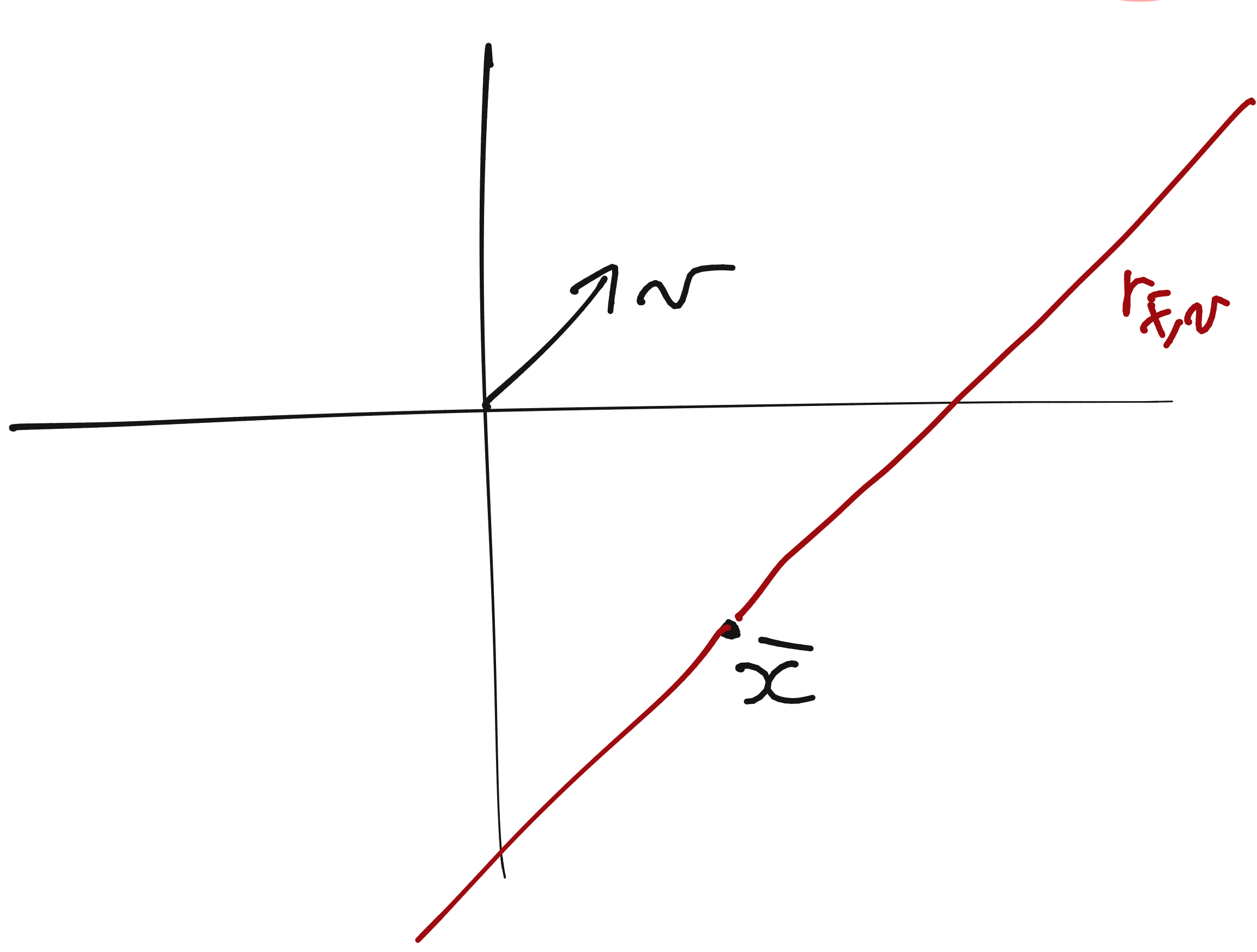


Funzioni composte. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
 $B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e siano $g: A \rightarrow B$
ed $f: B \rightarrow \mathbb{R}^k$



possiamo considerare $f \circ g(x) = f(g(x))$
per ogni $x \in A$. $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$
prende nome di funzione composta di f e g

Esempi: $A = \mathbb{R}$ $B = \mathbb{R}^m$ sono $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$
e sia $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ Vettore non nullo e consideriamo la
funzione $g(t) = \bar{x} + tv$ $\forall t \in \mathbb{R}$



$m = 2$
 $g(t) \in \underline{\underline{r_{\bar{x}, v}}}$
Retta passante per il punto $\bar{x}$ con direzione del vettore v

Prendiamo una funzione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ qualsiasi.
 $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ perché $f \circ g(t) =$
 $= f(g(t))$

Ci chiediamo se $f \circ g$ risulta derivabile

Applichiamo la definizione di derivabilità di una funzione

$$(f \circ g)'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(t+h) - (f \circ g)(t)}{h}$$

$$g(t) = \bar{x} + tv$$

$$g(t+h) = \bar{x} + (t+h)v$$

Espandiamo i singoli termini

$$(f \circ g)(t+h) = f(g(t+h)) = f(\bar{x} + (t+h)v)$$

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(\bar{x} + tv)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + (t+h)v) - f(\bar{x} + tv)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv + hv) - f(\bar{x} + tv)}{h}$$

definisco $\bar{y} = \bar{x} + tv$ quindi devo calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{y} + hv) - f(\bar{y})}{h} \stackrel{\text{se esiste}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{y})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv)$$

Se f ammette derivata parziale rispetto a v nel punto $\bar{x} + tv \Rightarrow f \circ g$ è derivabile

$$\text{in } t \quad \text{e} \quad (f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv) = \frac{\partial f}{\partial v}(g(t))$$

Se inoltre f è differenziabile in $\bar{x} + tv$

$$= g(t) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(g(t)) = \underline{\underline{\nabla f(g(t)) \cdot v}} \quad (*)$$

Ma osserviamo anche che

L'unica variabile rispetto alla quale possiamo derivare g è t

$g(t)$ ammette derivata in t

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{x} + tv) = v$$

Pertanto f è differenziabile in $g(t)$

$\Rightarrow f \circ g(t)$ è derivabile in t e

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) \quad \text{per la } *$$

Abbiamo ottenuto che se f è differenziabile su $\mathbb{R}^m$ allora $f \circ g(t)$ è derivabile per ogni t e quindi essendo una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è anche continua.

Posso scrivermi la differenza

$$f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = f(g(t)) - f(g(0))$$

$$= (f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)$$

Leiperge

$$= (f \circ g)'(\xi) \cdot t$$

Teorema di Lagrange: $f(t) - f(0) = f'(\xi) \cdot t$

per un opportuno valore $\xi \in (0, t)$.

$$(f \circ g)'(\xi) = \nabla f(g(\xi)) \cdot g'(\xi) = \nabla f(\bar{x} + \xi v) \cdot v$$

quindi la formula precedente diventa

$$f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = \nabla f(g(\xi)) g'(\xi) \cdot t \\ = (\nabla f(\bar{x} + \xi v) \cdot v) t$$

per un opportuno $\xi \in (0, t)$

$$f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = t \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + \xi v) \quad (1)$$

La formula gialla vale giu' volta che
 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile. $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^m$
 $\forall v \in \mathbb{R}^m, \{0\}$
 $\forall t > 0$

Teorema (funzione composta)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti
e siano $g: A \rightarrow B$ ed $f: B \rightarrow \mathbb{R}^k$
funzioni di classe C^1 . Allora $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$
è una funzione di classe C^1 e

$$\nabla(f \circ g)(x) = \nabla f(g(x)) \nabla g(x)$$

ATTENZIONE $\nabla f(\dots)$ è matrice $k \times m$
mentre $\nabla g(\dots)$ è matrice $m \times n$

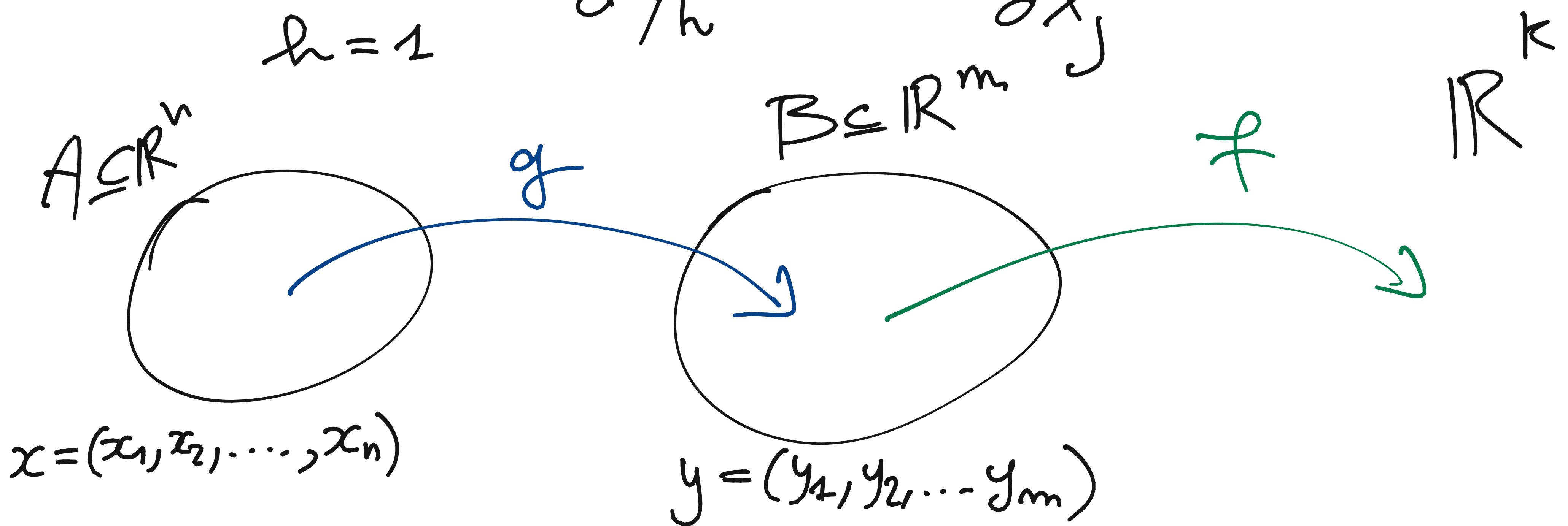
$\Rightarrow \nabla f(g(x)) \cdot \nabla g(x)$ è un prodotto vettore
 $(k \times m) \quad (m \times n)$
 $\downarrow$
matrice $k \times n$ infatti $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $\downarrow$
 $\mathbb{R}^n$ colonne

Esercizio $\nabla f(g(x)) \cdot \nabla g(x)$ in prodotto nipa per classe

$$[\nabla(f \circ g)(x)]_{ij} = \quad \begin{matrix} i \in \{1, \dots, k\} \\ j \in \{1, \dots, m\} \end{matrix}$$

$$= \sum_{h=1}^m \nabla f(g(x))_{ih} \cdot \nabla g(x)_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x)$$



Dim.: Dobbiamo mostrare che $f \circ g$ è differenziabile
e che vale la formula

Abbiamo osservato che la formula gialla è
equivalente

$$[\nabla(f \circ g)(x)]_j = \sum_{h=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x)) \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x)$$

Osservo anche che

$$\nabla (f \circ g)(x)_i = \frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(x)$$

Vogliamo anzitutto mostrare che

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x)) \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x)$$

A tale scopo $f \circ g =: \varphi$ e fissiamo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e per ogni $t > 0$ consideriamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i(x+tv) - \varphi_i(x)}{t} &= \frac{(f \circ g)_i(x+tv) - (f \circ g)_i(x)}{t} \\ &= \frac{f_i(g(x+tv)) - f_i(g(x))}{t} = (**) \end{aligned}$$

chiamiamo $w = \frac{g(x+tv) - g(x)}{\|g(x+tv) - g(x)\|}$ e $s = \|g(x+tv) - g(x)\|$

$$\begin{aligned} (**) &= \frac{f_i(g(x) + g(x+tv) - g(x)) - f_i(g(x))}{t} \\ &= \frac{f_i(g(x) + ws) - f_i(g(x))}{t} = \end{aligned}$$

grazie alle formule (1) possiamo trovare

$$\xi \in (0, s) \quad \text{t.c.} \quad f_i(g(x) + \xi w) - f_i(g(x)) =$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial w}(g(x) + \xi w) s$$

Sostituendo $\Rightarrow$

$$= \frac{\frac{\partial f_i}{\partial w}(g(x) + \xi w) s}{t} = \frac{s}{t} \nabla f_i(g(x) + \xi w) w$$

$$= \frac{1}{t} \nabla f_i(g(x) + \xi w) (g(x + tv) - g(x))$$

$$= \nabla f_i(g(x) + \xi w) \frac{g(x + tv) - g(x)}{t}$$

facendo tendere $t \rightarrow 0$ ottengo che

$$\frac{g(x + tv) - g(x)}{t} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial v}(x)$$

$$\nabla f_i(g(x) + \xi w) \rightarrow \nabla f_i(g(x))$$

dove $\xi \in (0, s)$ $s = \|g(x + tv) - g(x)\| \rightarrow 0$

$\Rightarrow \xi \rightarrow 0$ mentre $w = \frac{g(x + tv) - g(x)}{\|g(x + tv) - g(x)\|}$

$$\|\xi \cdot w\| = |\xi| \rightarrow 0$$

Quindi abbiamo ottenuto che

$$\frac{\partial f_i}{\partial v}(x) = \nabla f_i(g(x)) \frac{\partial g}{\partial v}(x)$$

$$(\Rightarrow) (f \circ g)_i = \varphi_i$$

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial v}(x) = \nabla f_i(g(x)) \frac{\partial g}{\partial v}(x)$$

se prendo $v = e_j \Rightarrow$

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(x) = \nabla f_i(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$$

(2)

$$= \sum_{h=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x)) \frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x)$$

Dobbiamo osservare anche che $f \circ g$ è di classe C^1 .

Abbiamo mostrato che $f \circ g$ è derivabile in ogni $x \in A$ e che le derivate parziali soddisfano l'eq. (2)

Ma $\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}$ è continua perché $\frac{\partial f_i}{\partial y_h}(g(x))$ è continua e anche $\frac{\partial g_h}{\partial x_j}(x)$ è continua

$\Rightarrow f \circ g$ è differenziabile in A .

□

Esempio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(y_1, y_2) = y_1 y_2 - \sin(e^{y_1})$$

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g(x_1, x_2) = \left(\log(x_1^2 + x_2^2), x_1 - x_2 \right)$$

$$g(x_1, x_2) = \left(\log(x_1^2 + x_2^2), x_1 - x_2 \right) = \left(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2) \right)$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x_1, x_2) &= f(g(x_1, x_2)) = f(\log(x_1^2 + x_2^2), x_1 - x_2) \\ &= \log(x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2) - \sin(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\nabla(f \circ g)(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_1}, \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 - x_2) + \log(x_1^2 + x_2^2) - \cos(x_1^2 + x_2^2) 2x_1$$

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 - x_2) - \log(x_1^2 + x_2^2) - \cos(x_1^2 + x_2^2) 2x_2$$

Per il teorema precedente avremo subito che

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_1} = \sum_{h=1}^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}(g(x)) \cdot \frac{\partial g_h}{\partial x_1}(x)$$

$$\nabla f(y_1, y_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1, y_2), \frac{\partial f}{\partial y_2}(y_1, y_2) \right)$$

$$= \left(\underline{y_2 - \cos(e^{y_1}) e^{y_1}}, \underline{y_1} \right)$$

$$\nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x_1, x_2) \\ \nabla g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \log(x_1^2 + x_2^2)$$

$$g_2 = x_1 - x_2$$

$$\nabla g_1 = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

$$\nabla g_2 = \left(\underline{1}, -1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f \circ g}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(g(x)) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x)$$

$$= y_2 - (\cos e^{y_1}) e^{y_1} \quad \begin{array}{l} y_2 = g_2(x) \\ y_1 = g_1(x) \end{array}$$

$$= \left[\underline{(x_1 - x_2) - \cos(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)} \right] \cdot \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$+ \underline{\log(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} (x_1 - x_2) + \log(x_1^2 + x_2^2) - \cos(x_1^2 + x_2^2) 2x_1$$

