

Teo: Sia  $E$  un insieme limitato  
 e misurabile secondo Peano-Jordan e sia  $R$   
 un rettangolo  $R \supseteq E$ . Supponiamo  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$   
 una funzione integrabile  $\Rightarrow f$  è integrabile su  $E$   
 $\Leftrightarrow f \cdot \chi_E$  è integrabile

$$\int_R f \chi_E dx dy =: \int_E f dx dy$$

Corollario Se  $f$  è continua su  $\bar{R}$  e  $E \subseteq R$   
 è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan  
 Allora  $f$  è integrabile su  $E$ .

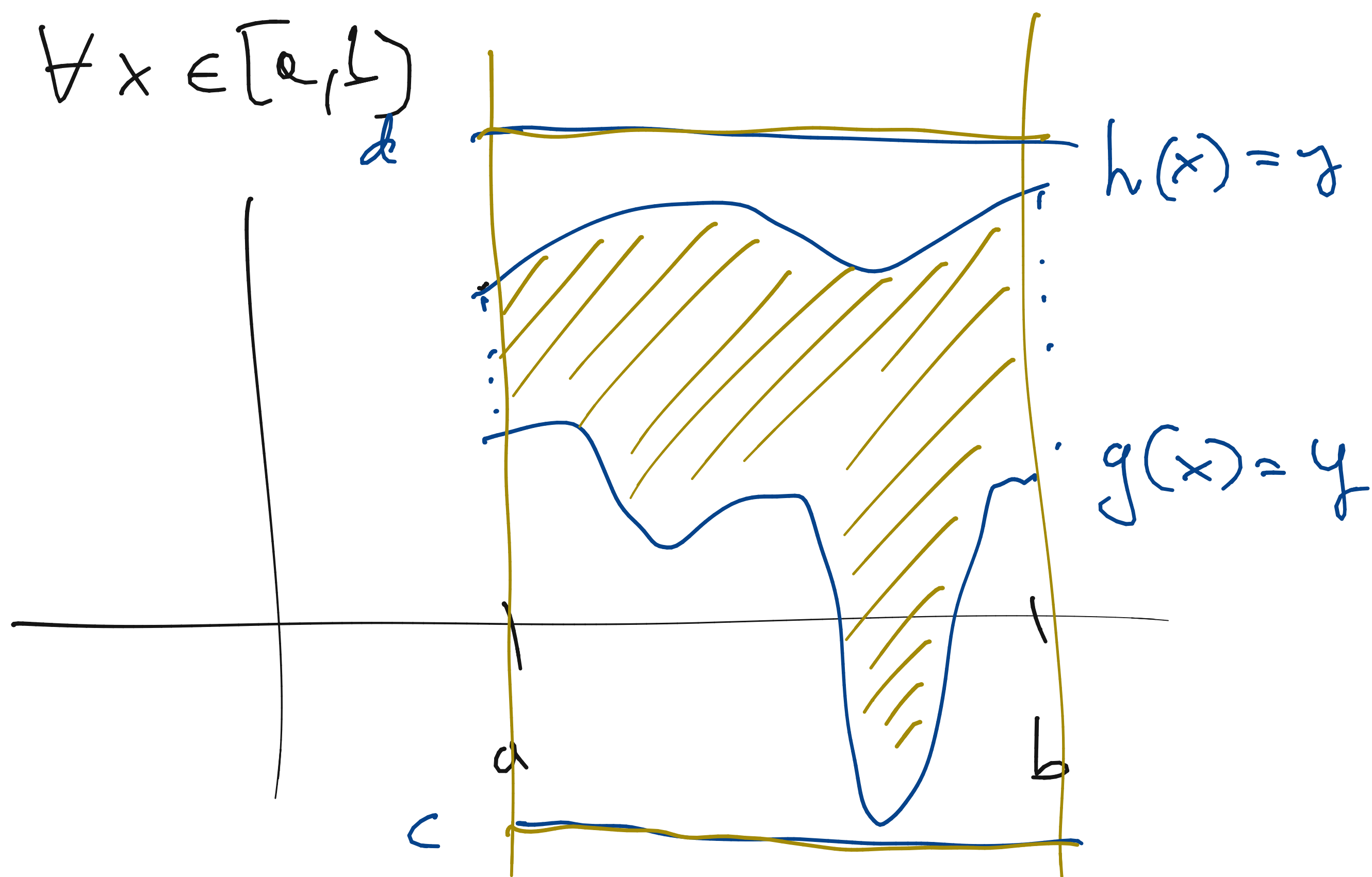
La dimostrazione del teorema la mettiamo

esempio insieme  $E$  normale rispetto all'asse  $y$ .

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

$$g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal che} \quad g(x) < h(x)$$

$$\forall x \in [a, b]$$



Fatto: Se  $g$  ed  $h$  sono limitate e  
 integrabili secondo Riemann allora  $E$   
 è un rettangolo misurabile secondo Peano-Jordan

Come conseguenza del teorema enunciato prima  
 prendiamo  $d \in \mathbb{R}$  t.c.  $h(x) < d \quad \forall x \in [a, b]$   
 e prendiamo  $c \in \mathbb{R}$  t.c.  $g(x) > c \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, g(x) \leq y < h(x) \}$$

è misurabile ed è contenuto in  $R = [a, b] \times [c, d]$

Se  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile  $\Rightarrow$

$f$  è integrabile su  $E \Rightarrow$  posso calcolare

$$\int f(x, y) dx dy$$

$E$

Un metodo per calcolare l'integrale ci lo  
 fornisce il teorema di Fubini.

Dimostrazione del prossimo teorema

CASO PARTICOLARE

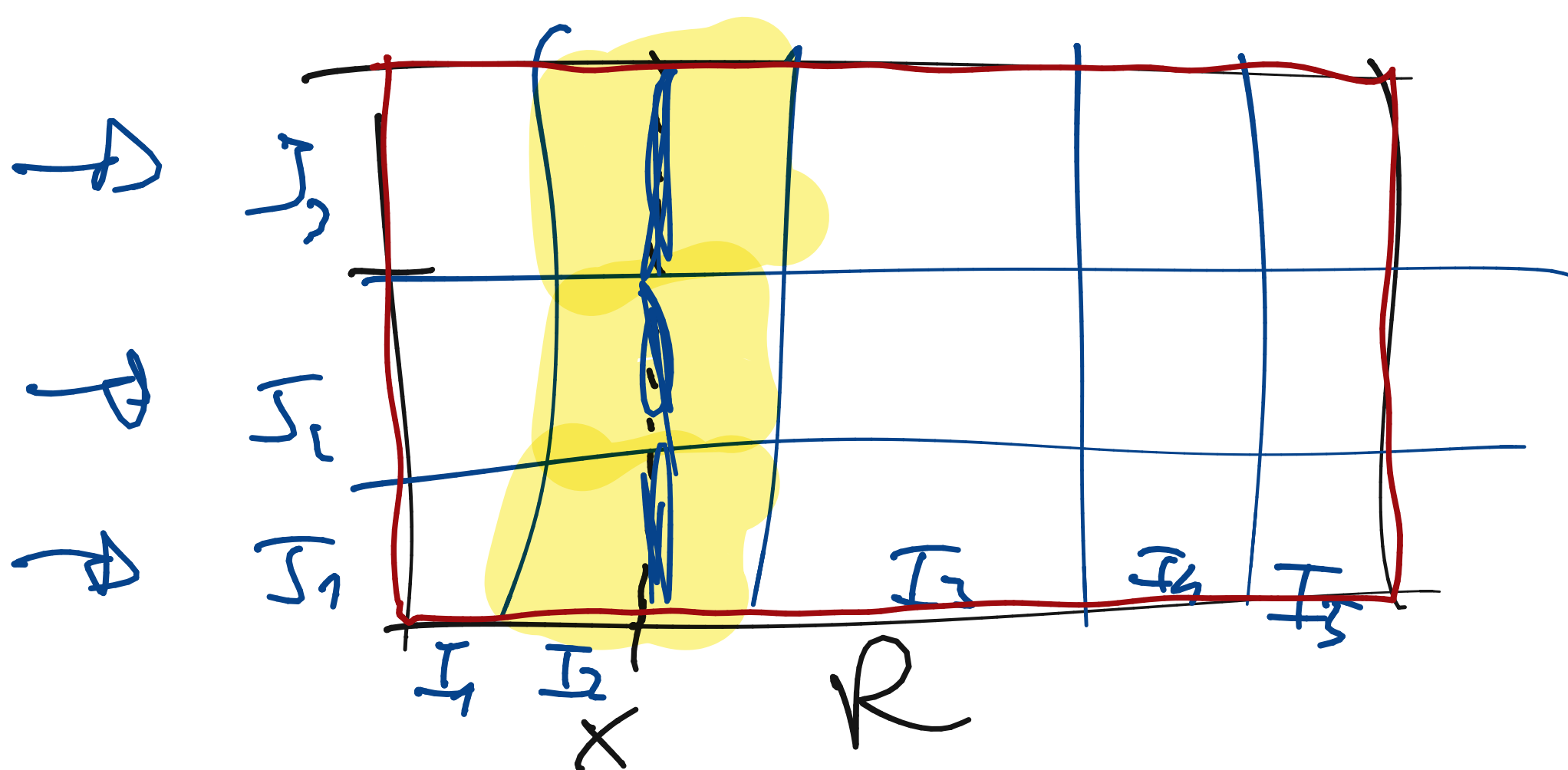
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

$\varphi$  funzione semplice su  $R$

dove  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

$$R_{ij} = [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]$$

$$= I_i \times J_j$$



per  $x \in [e, b)$  fissato considero la funzione

$$y \in [c, d) \mapsto \varphi(x, y)$$

è una funzione semplice.

Infatti:  $x \in I_2$

$$\varphi(x, y) = \lambda_{2j} \quad \text{se } y \in J_j$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$= \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} = \begin{cases} \lambda_{21} & \text{se } y \in J_1 \\ \lambda_{22} & \text{se } y \in J_2 \\ \lambda_{2j} & \text{se } y \in J_j \end{cases}$$

Posso integrare questa funzione semplice  
sull'intervallo  $[c, d)$

$$\begin{aligned} \int_{[c, d)} \varphi(x, y) dy &= \int_{[c, d)} \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} dy = \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} (y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

(nel caso in cui  $x \in I_2$ )

In generale se  $x \in I_i \Rightarrow$

$y \mapsto \varphi(x, y)$  è semplice su  $[c, d)$

e può essere integrato, l'integrale viene

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1})$$

Ma ecco che questo integrale dipende da dove ho preso le  $x \in [a, b)$ , posso vedere

$\int_c^d \varphi(x, y) dy$  come una funzione della variabile  $x$ .

La funzione  $[a, b) \ni x \mapsto \int_c^d \varphi(x, y) dy$  assume i valori  $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1})$  quando  $x \in I_i$

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \chi_{I_i}^{(x)}$$

è una funzione semplice, come tale può essere integrato su  $[a, b)$

$$\int_a^b \left( \int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} m(R_{ij})$$

$$= \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Teorema in fondo al PDF

Teorema Se  $\varphi: R \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione semplice allora  $\int_R \varphi(x,y) dx dy$

coincide con l'integrale doppio

$$\int_a^b \left( \int_c^d \varphi(x,y) dy \right) dx = \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Dim.: appena fatta.

Teo (Fubini) "per funzioni qualsiasi"

Sia  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  funzione limitata integrabile secondo Riemann. e supponiamo che  $\forall x \in [a,b]$  fissata la funzione  $y \mapsto f(x,y)$  sia integrabile secondo Riemann nell'intervallo  $[c,d]$ ,

Allora

•) La funzione  $F(x) := \int_c^d f(x,y) dy$

è una funzione  $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  ed è integrabile secondo Riemann

$$\bullet) \int_R f(x,y) dx dy = \int_a^b F(x) dx \\ = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

Dim.:  $f$  è integrabile in  $R$ .  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$\exists \varphi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^- \text{ t.c. } \int_R \varphi(x,y) dx dy - \int_R \psi(x,y) dx dy < \varepsilon$$

Fissiamo  $x \in [a,b)$  e calcoliamo gli integrali di  $\varphi, \psi, f$  in  $[c,d)$ . Sappiamo che

$$\psi(x,y) \leq f(x,y) \leq \varphi(x,y) \quad \forall y \in [c,d)$$

$$\int_c^d \psi(x,y) dy \leq \int_c^d f(x,y) dy \leq \int_c^d \varphi(x,y) dy$$

Ora osserviamo che  $\int_c^d \psi(x,y) dy$  e  $\int_c^d \varphi(x,y) dy$  sono funzioni

della variabile  $x \in [a,b)$

$$\int_c^d \psi(x,y) dy \leq F(x) \leq \int_c^d \varphi(x,y) dy \quad \forall x \in [a,b)$$

$$\Rightarrow \text{facciamo l'integrale in } [a,b) \Rightarrow \int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx - \int_a^b \int_c^d \psi(x,y) dy dx$$

$$= \int_R \varphi(x,y) dx dy - \int_R \psi(x,y) dx dy \leq \varepsilon$$

quindi abbiamo scoperto che  $\forall \varepsilon > 0$  posso trovare  
 due funzioni, implici  $\Phi$  e  $\Psi$  in  $[a,b]$   
 tali che  $\int_a^b \Phi dx - \int_a^b \Psi dx \leq \varepsilon$  e

$$\Phi \geq f \geq \Psi \Rightarrow \text{zintra da } f \text{ integrabile in } [a,b]$$

Il primo punto del teorema è dimostrato.

Ora dalla  $(*) \Rightarrow$  otteniamo che  $\int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx$

$$\Rightarrow \int_R \varphi(x,y) dx dy \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Alla stessa tempo mi ricordo che

$$\int_R \varphi(x,y) dx dy \leq \int_R f(x,y) dx dy \leq \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

perché

$$\int \varphi(x) dy - \int \varphi(x) dx dy \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$  per arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$  trovo che necessariamente

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow$  il punto 2 segue

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

□

In modo analogo possiamo calcolare l'integrale di una funzione  $f$  su un dominio normale.

Se per esempio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile e  $E \subseteq \mathbb{R}$  normale rispetto all'asse  $y$

$$\text{Allora } \int_{\mathbb{R}} \chi_E f(x,y) = \int_E f(x,y) \quad \text{per cui}$$

calcoleremo col teorema di Fubini

(cambio di variabili e ipotesi del  
teorema)

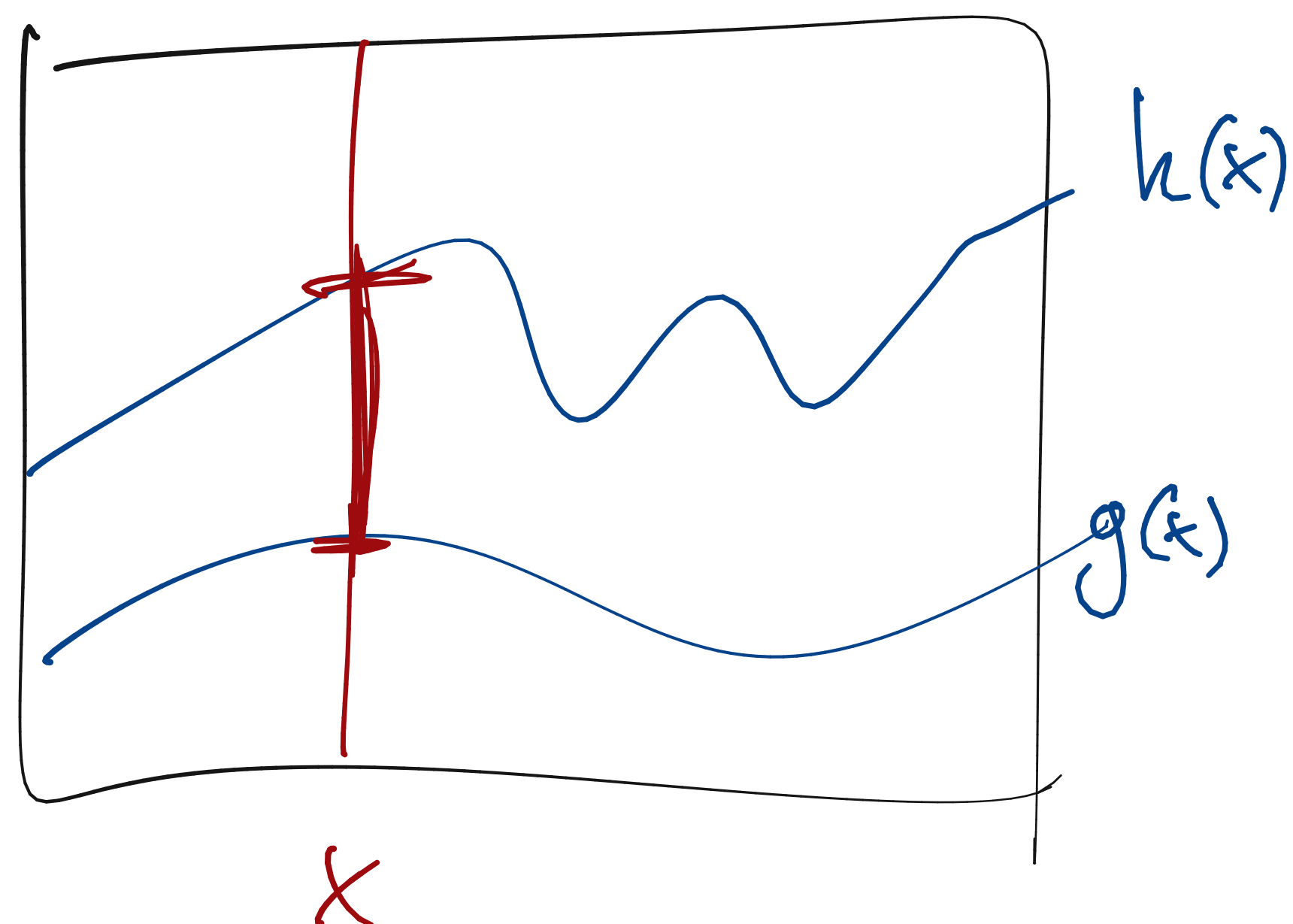
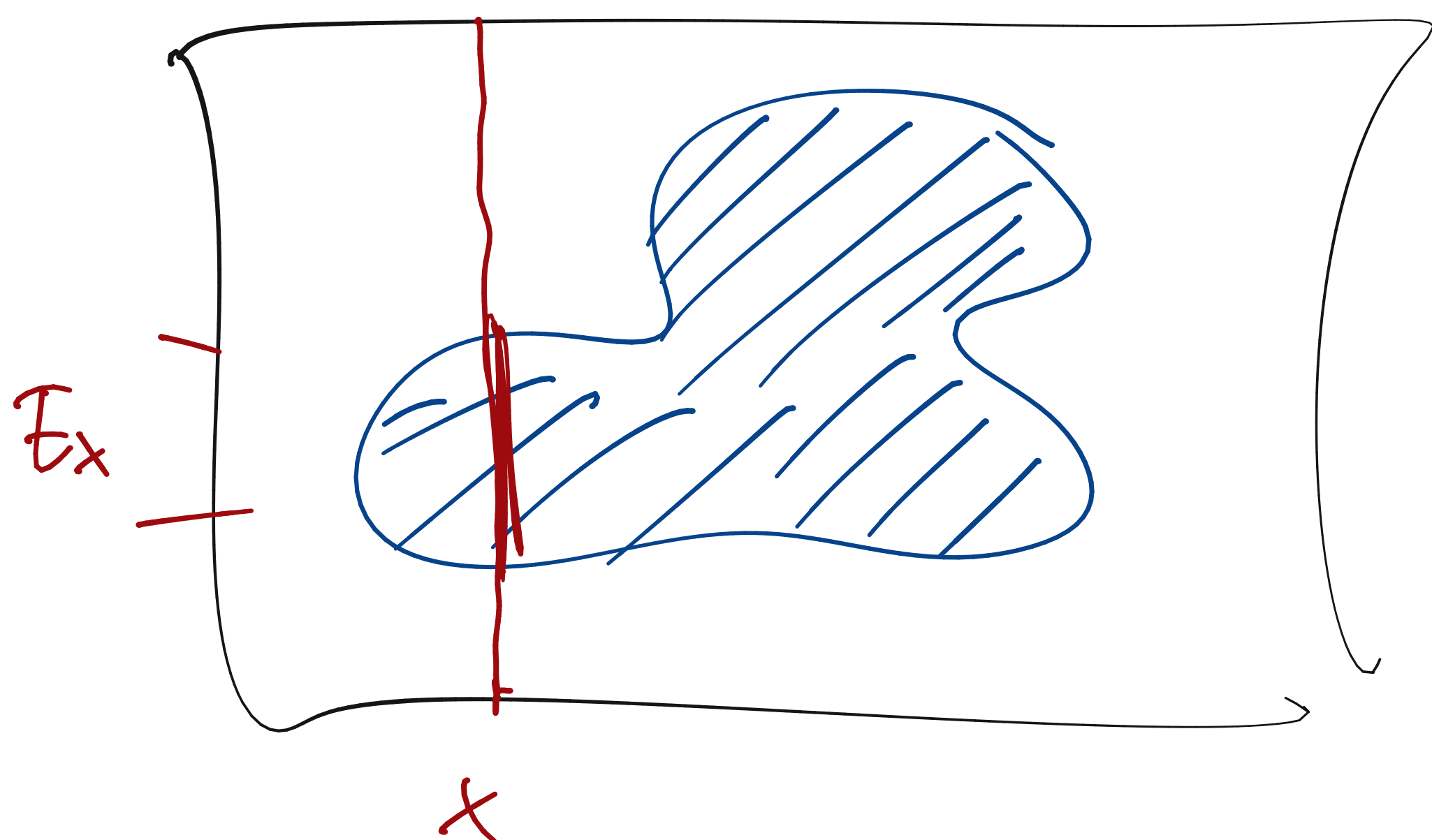
$$\int_R \chi_E f \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \chi_E(x,y) \, dy \, dx$$

$E$  è normale  $\Rightarrow E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x \in [a,b] : g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$   
ad  $x$  fissata

$$f(x,y) \chi_E(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin E \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x,y) & \text{se } y \in E_x \\ 0 & \text{se } y \notin E_x \end{cases}$$

dove  $E_x = \{y \in [c,d] : (x,y) \in E\}$



$\Rightarrow$  enucleo  $E$  normale

$$E_x = \{y \in (g(x), h(x))\}$$

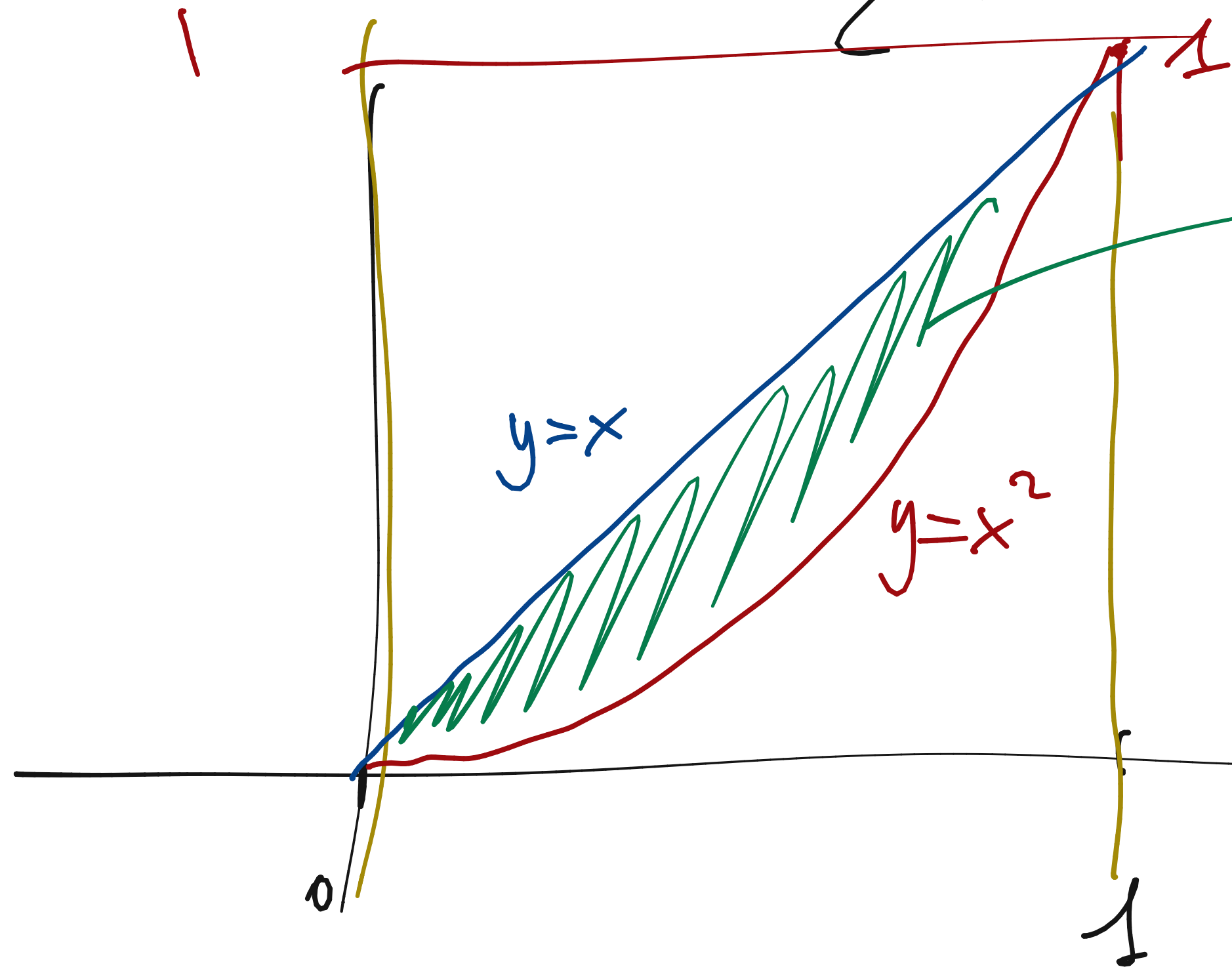
$$\Rightarrow f(x,y) \chi_E(x,y) = f(x,y) \chi_{E_x}(y)$$

$$= \begin{cases} f(x,y) & g(x) < y < h(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) \chi_{E_x}(y) dy dx$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy dx$$

Esempio  $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1) \ x^2 \leq y \leq x\}$



$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = ?$$

Teo Fubini

$\Rightarrow$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x f(x,y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left( \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{7-5}{70} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$$

Teorema (di Fubini in più di 2 variabili): D

Supponiamo  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$  con  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  un  
rettangolo

$$R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

Supponiamo  $f$  sia integrabile su  $R$ .  
Le funzioni  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soddisfano le seguenti

Condizioni: Fissiamo  $x_2, \dots, x_n$  allora

$x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è integrabile in  $(a_1, b_1)$   
 $\forall x_2, \dots, x_n$  fissi. Allora se diciamo

$$R_{n-1} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

abbiamo che

$$F_1(x_2, x_3, \dots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$$

è integrabile in  $R_{n-1}$  e

$$\int_{R_{n-1}} F_1 dx_2 \dots dx_n = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Se adesso  $x_2 \mapsto F_1(x_2, x_3, \dots, x_n)$  è  
integrabile  $\forall x_3, x_4, \dots, x_n$  fissi allora

$$F_2(x_3, \dots, x_n) = \int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2, \dots, x_n) dx_2$$

è integrabile in  $R_{n-2} = [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\int_{R_{n-2}} F_2(x_3, \dots, x_n) = \int_{R_{n-1}} F_1(x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

In generale se

$$x_i \mapsto F_{i-1}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ è integrabile}$$

in  $[a_i, b_i]$   $\forall i = 1, \dots, n-1$

Allora

$$\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$
$$= \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) \right) dx_n$$

Se  $f$  è continua su  $R$  le ipotesi precedenti  
sono sempre soddisfatte

$\Rightarrow f$  continua su  $R \Rightarrow$   
vale la formula generale



## Teorema

Se  $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione semplice allora  $\int_R \varphi(x, y) dx dy$  coincide con l'integrale doppio  $\int_a^b \left( \int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \int_R \varphi(x, y) dx dy$

## Dimostrazione

Sia  $\varphi$  una funzione semplice su  $R$ :  $\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$  dove  $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1}) = I_i \times J_j$ .

Per  $x \in [a, b)$  fissato considero la funzione  $y \in [c, d) \mapsto \varphi(x, y)$  che è una funzione semplice. Infatti se  $x \in I_2$ ,  $\varphi(x, y) = \lambda_{2j}$  se  $y \in J_j$ ,  $j \in 1, \dots, m$  e

$$\sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} = \begin{cases} \lambda_{21} & \text{se } y \in J_1 \\ \lambda_{22} & \text{se } y \in J_2 \\ \lambda_{23} & \text{se } y \in J_3 \end{cases}$$

Posso integrare questa funzione semplice nell'intervallo  $[c, d)$ :

$$\int_{[c, d)} \varphi(x, y) dy = \int_{[c, d)} \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} dy = \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} (y_j - y_{j-1}) \text{ (nel caso in cui } x \in I_2).$$

In generale se  $x \in I_i \implies y \mapsto \varphi(x, y)$  è semplice su  $[c, d)$  e può essere integrata, l'integrale viene

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}).$$

Mi accorgo che questo integrale dipende da dove ho preso la  $x \in [a, b)$ , posso vedere  $\int_c^d \varphi(x, y) dy$  come una funzione della variabile  $x$ .

La funzione  $x \in [a, b) \mapsto \int_c^d \varphi(x, y) dy$  assume i valori  $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1})$

quando  $x \in I_i$ .

$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \chi_{I_i}(x)$  è una funzione semplice e

come tale può essere integrata su  $[a, b)$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) (x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \cdot m(R_{ij}) = \int_R \varphi(x, y) dx dy. \quad \square \end{aligned}$$