

Supponiamo di avere $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^h$ aperti
e supponiamo ci sia una mappa

$\Phi : A \rightarrow B$ che soddisfa le seguenti proprietà

-) Φ è di classe $C^1(A, B)$
-) Φ è biunivoca
-) $\det(\nabla \Phi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A$

oss: $\nabla \Phi(x) = \begin{pmatrix} \nabla \Phi_1(x) \\ \nabla \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \nabla \Phi_h(x) \end{pmatrix}$

dove $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_h)$

$$\nabla \Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \Phi(x) \in \mathbb{R}^{h \times n}$$

$$\det(\nabla \Phi(x)) \in \mathbb{R}$$

Teorema: Supponiamo $A, B \subseteq \mathbb{R}^h$ aperti limitati
e supponiamo $\Phi : A \rightarrow B$ funzione che soddisfa
le 3 condizioni sopra. Sia $f : B \rightarrow \mathbb{R}$
limitata integrabile secondo Riemann su

B. Allora se indichiamo con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le variabili in $A \subseteq \mathbb{R}^h$ e con $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le variabili nell'insieme B

$$\int_B f(y) dy = \int_A f \circ \Phi(x) |\det D\Phi(x)| dx$$

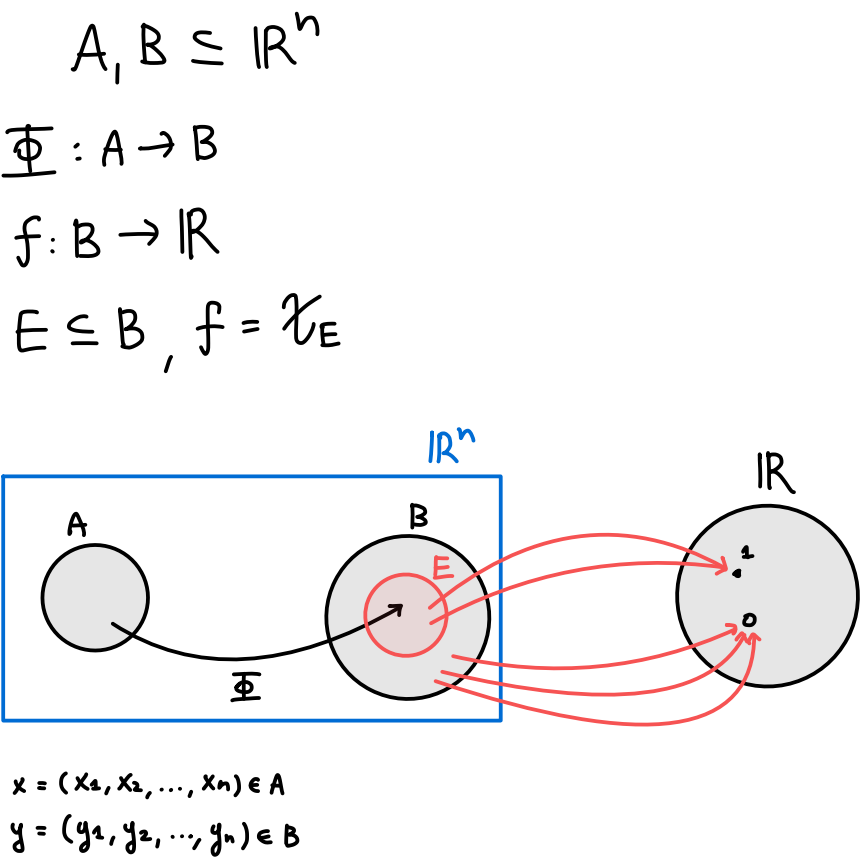
OSS.: Nel caso particolare in cui $f = \chi_E$ dove $E \subseteq B$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue - Jordan

$$\int_B \chi_E(y) dy = \int_A \chi_E(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx$$

||

$$\int_E 1 dy = m(E) \qquad \leftarrow \text{questo è il primo integrale}$$

$$\chi_E(\Phi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Phi(x) \in E \\ 0 & \text{se } \Phi(x) \notin E \end{cases}$$



$$= \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(E) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(E) \end{cases}$$

$$= \chi_{\Phi^{-1}(E)}(x)$$

il secondo integrale è $\int_A \chi_{\Phi^{-1}(E)}(x) |\det \nabla \Phi(x)| dx$

Dato che la funzione precedente era la funzione caratteristica della retroimmagine dell'insieme che viene mandato in 1, allora basterebbe integrare solamente sulla retroimmagine di tale insieme, infatti, integrando su altri punti, integreremmo la funzione nulla

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

Abbiamo trovato la seguente formula

$$\int_E 1 dx = m(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

detta anche formula dell'area

$$\Phi: \Phi^{-1}(E) \rightarrow E \text{ biunivoca}$$

Teorema 2 (del cambio di variabili)

Supponiamo $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue e Φ come nel teo precedente

Se $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann

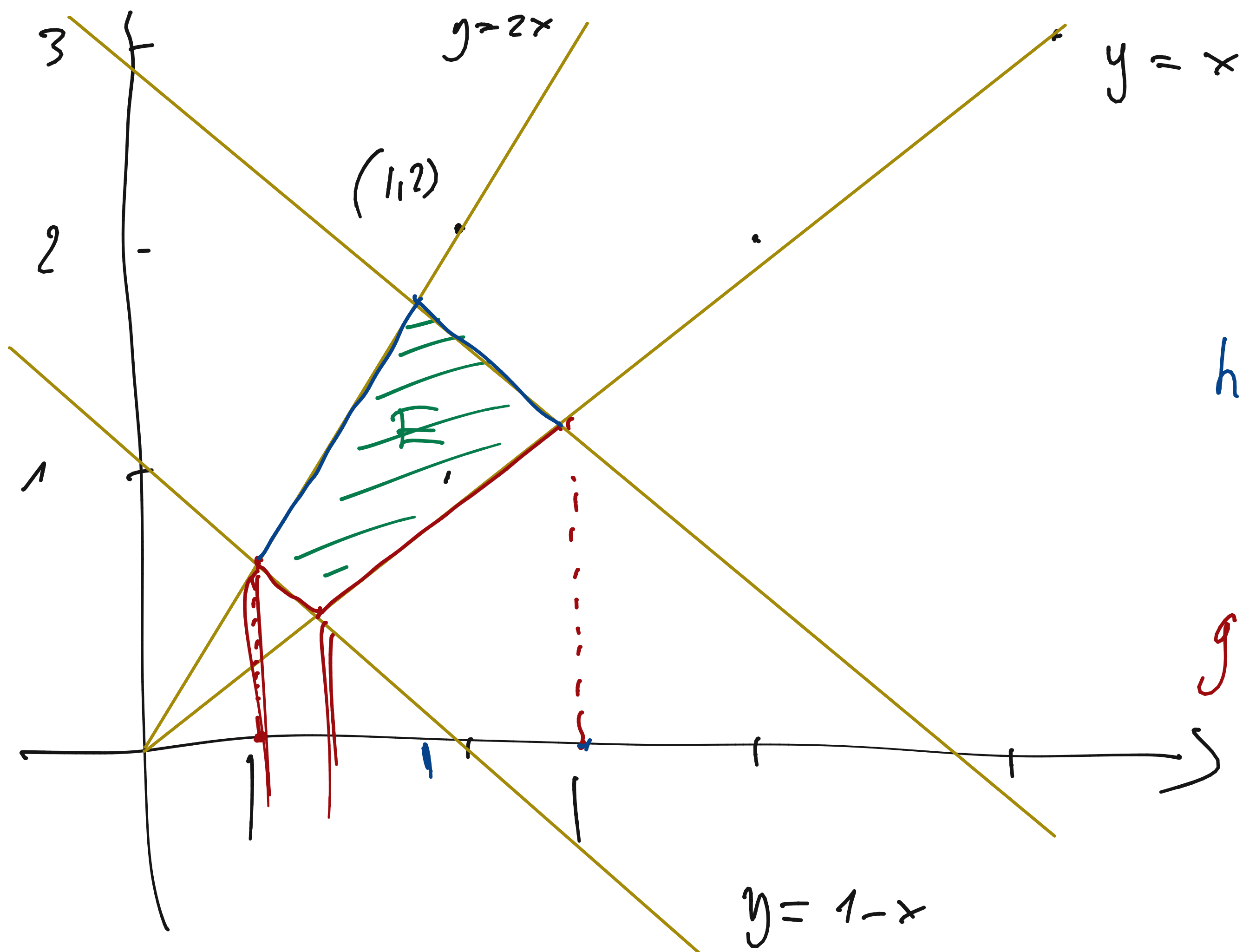
allora

$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

Esercizio: Prendiamo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x, 1 < x+y < 3\}$

e consideriamo la funzione $f(x, y) = \frac{1}{2x+y}$

Calcolare $\int_E f(x, y) dx dy$



$$1-x < y < 3-x$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \frac{1}{3} \leq x < 1 \\ 3-x & 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{1-x}^{2x} \frac{1}{2x+y} dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_x^{2x} \frac{1}{2x+y} dy dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_x^{3-x} \frac{1}{2x+y} dy dx$$

Calcolo per caso.

Risolviamo lo stesso integrale con un cambio di

variabili. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, 1 < x+y < 3 \}$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \frac{y}{x} < 2, 1 < x+y < 3 \right\}$$

impongo $u = \frac{y}{x}$ $v = x+y$ in modo da

il dominio E diventa un rettangolo
nelle nuove variabili

$$\text{dalla 'eq. per } u = \frac{y = ux}{\quad} \Rightarrow v = x + ux \Rightarrow x = \frac{v}{1+u}$$

$$\Rightarrow y = \frac{uv}{1+u}$$

$$\Phi(u, v) : R = (1, 2) \times (1, 3) \longrightarrow E$$

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) = (x, y) \\ &= \left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u} \right) \end{aligned}$$

Formula di cambio di variabili $\Rightarrow$

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u, v)) |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$= \int_R f\left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u}\right) |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$f = \frac{1}{2x+y}$$

$$= \int_R \frac{1}{2\left(\frac{v}{1+u}\right) + \frac{uv}{1+u}} |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$= \int_R \frac{1+u}{2v+uv} |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u} \right) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{uv}{1+u} \right)$$

$$\nabla \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v(1+u) - uv}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla \Phi(u, v)) = \frac{-uv}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^3}$$

$$= -\frac{v(1+u)}{(1+u)^3} = -\frac{v}{(1+u)^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int \frac{1+u}{2v+uv} \cdot \left| -\frac{v}{(1+u)^2} \right| du dv$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \frac{1+u}{2v+uv} \cdot \frac{v}{(1+u)^2} dv du$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{(2+u)(1+u)} dv du$$

$$= \int_1^2 \left(\dots \right) v \Big|_1^3 du$$

$$= 2 \int_1^2 \left(\dots \right) du$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{2+u - (1+u)}{(2+u)(1+u)} du = 2 \int_1^2 \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} du$$

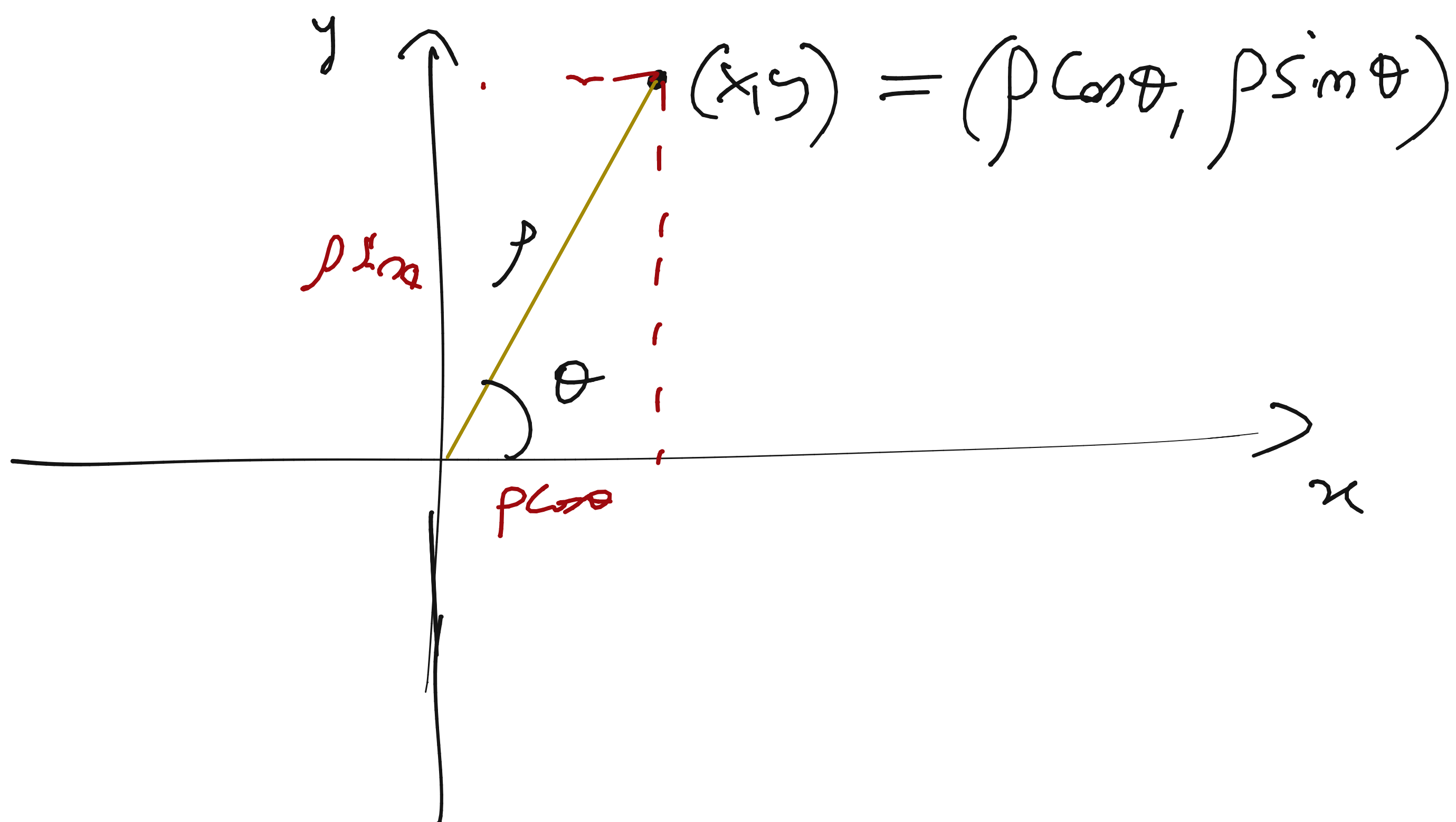
$$= 2 \left(\log(1+u) - \log(2+u) \right) \Big|_{u=1}^{u=2}$$

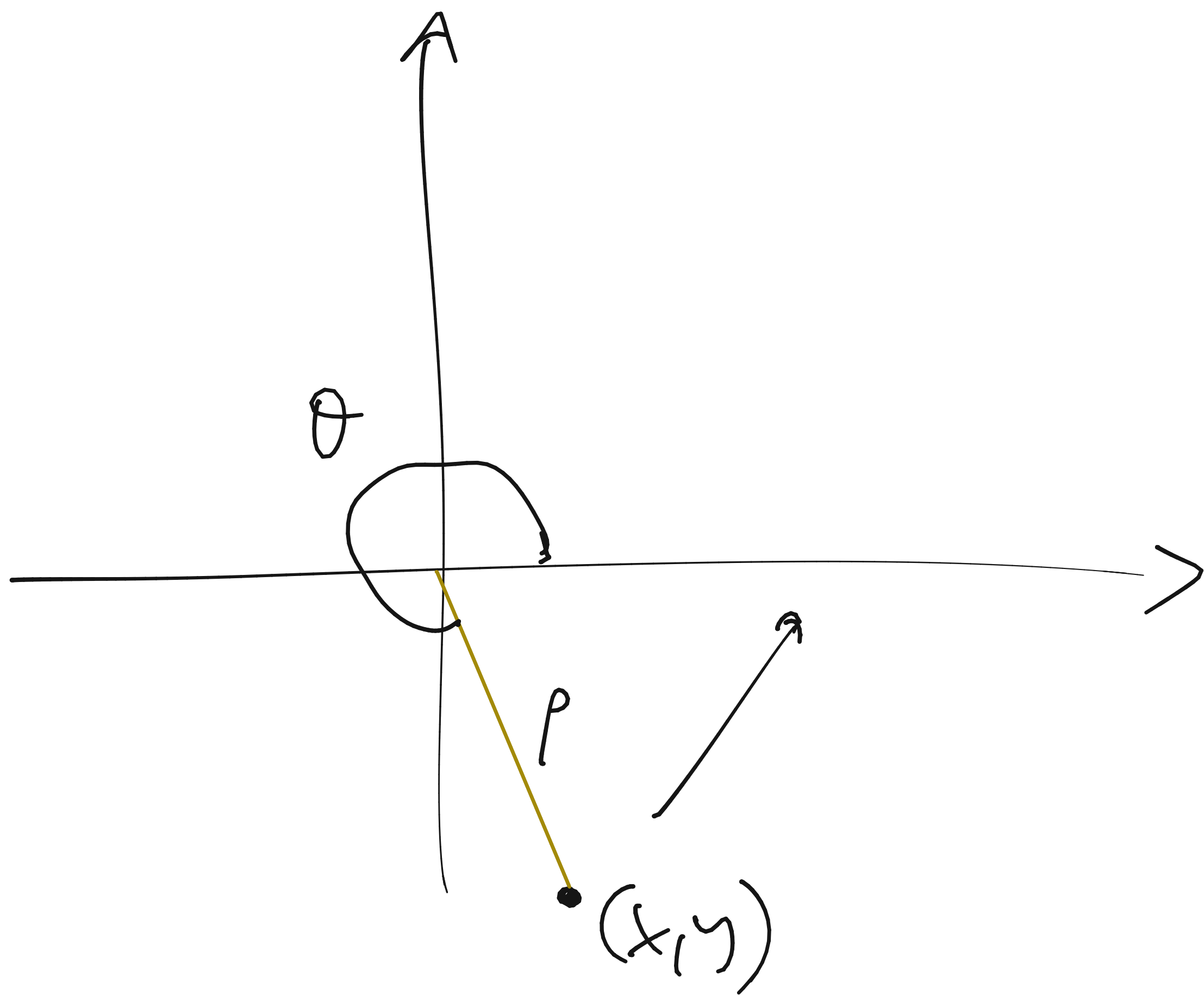
$$= 2 \left(\log 3 - \log 4 - \log 2 + \log 3 \right)$$

Coordinate Polari Consideriamo $\mathbb{R}^2$

e ogni punto $(x, y) \neq (0, 0)$ può essere identificato univocamente con due valori.

Il primo ρ ci dice quanto (x, y) dista dall'origine $\left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ e il secondo valore θ ci dà la direzione in cui si trova il punto (x, y) , θ = angolo formato tra il vettore (x, y) e l'asse positivo dell' x .





$$\rho > 0 \quad \rho \in (0, +\infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Esiste una mappa $\Phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\Phi(\rho, \theta) = (x, y) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Supponiamo di avere un dominio E in cui vogliamo integrare una funzione f

$$\int_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \underbrace{(\det \nabla \Phi(\rho, \theta))}_{\substack{d\rho \\ d\theta}} \, d\rho \, d\theta$$

quanto vale $\nabla \Phi(\rho, \theta)$?

$$\nabla \Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

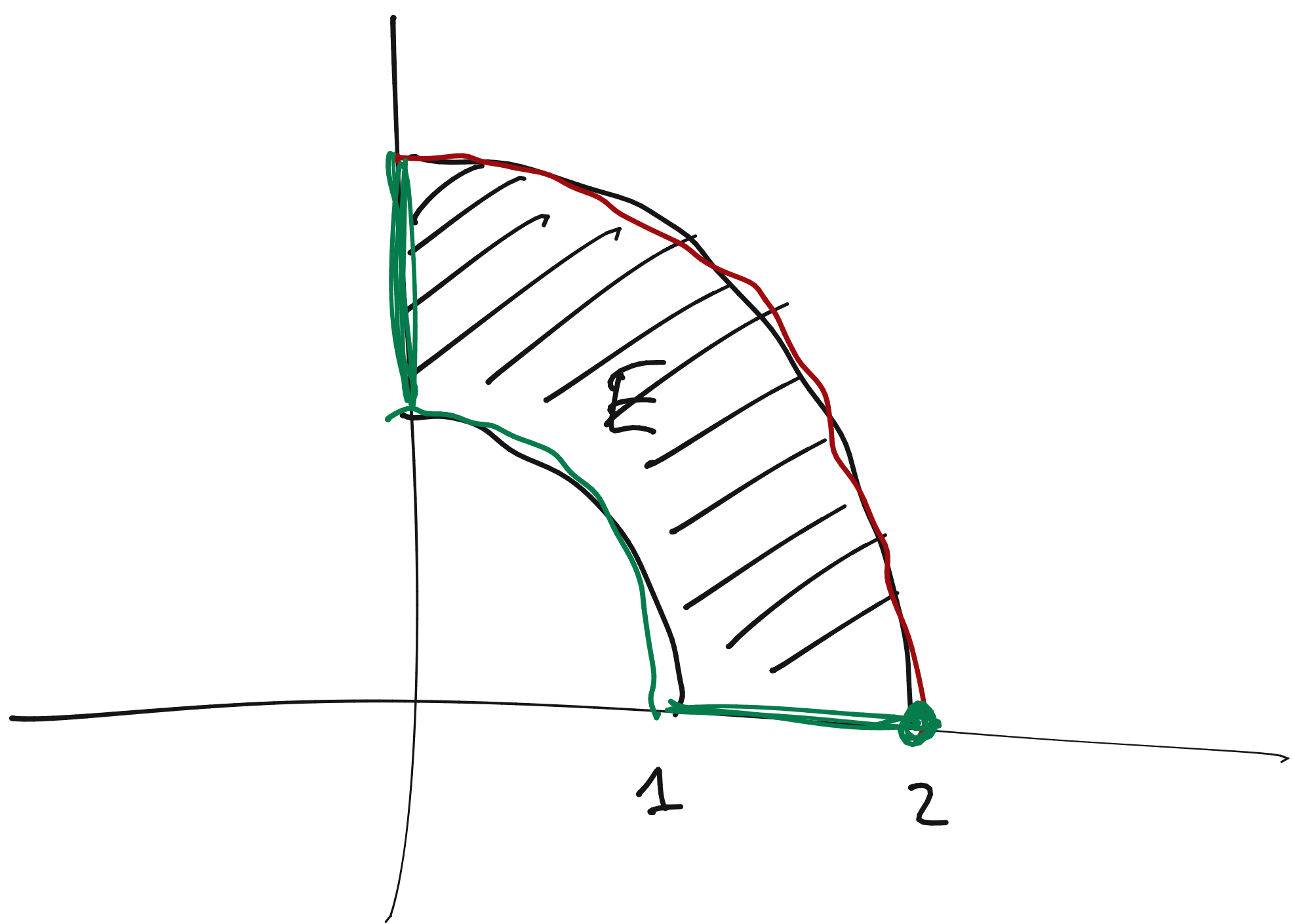
$$\begin{aligned}
 \left| \det \nabla \Phi(\rho, \theta) \right| &= \rho \cos^2 \theta - (-\rho \sin^2 \theta) \\
 &= \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

Le formule di cambio di variabili in coordinate polari e

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

Esempio Calcolare l'integrale di $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

sul dominio $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.t. } \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right\}$



$$\Downarrow \\
 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$$

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$$

$$E \rightarrow x \in (0, 2) \quad \underline{g(x)} \leq y \leq \underline{h(x)}$$

Pero in coordinate polari

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 2$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \pi/2$$

$$\Phi^{-1}(E) = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} 1 d\theta d\rho = \int_1^2 \frac{\pi}{2} d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

im $\mathbb{R}^3$ Koordinaten zylindrisch &
Koordinaten sferisch.

Le coordinate polari sono definite in modo che

$$\rho \cos \theta = x$$

$$\rho \in (0, +\infty)$$

$$\rho \sin \theta = y$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

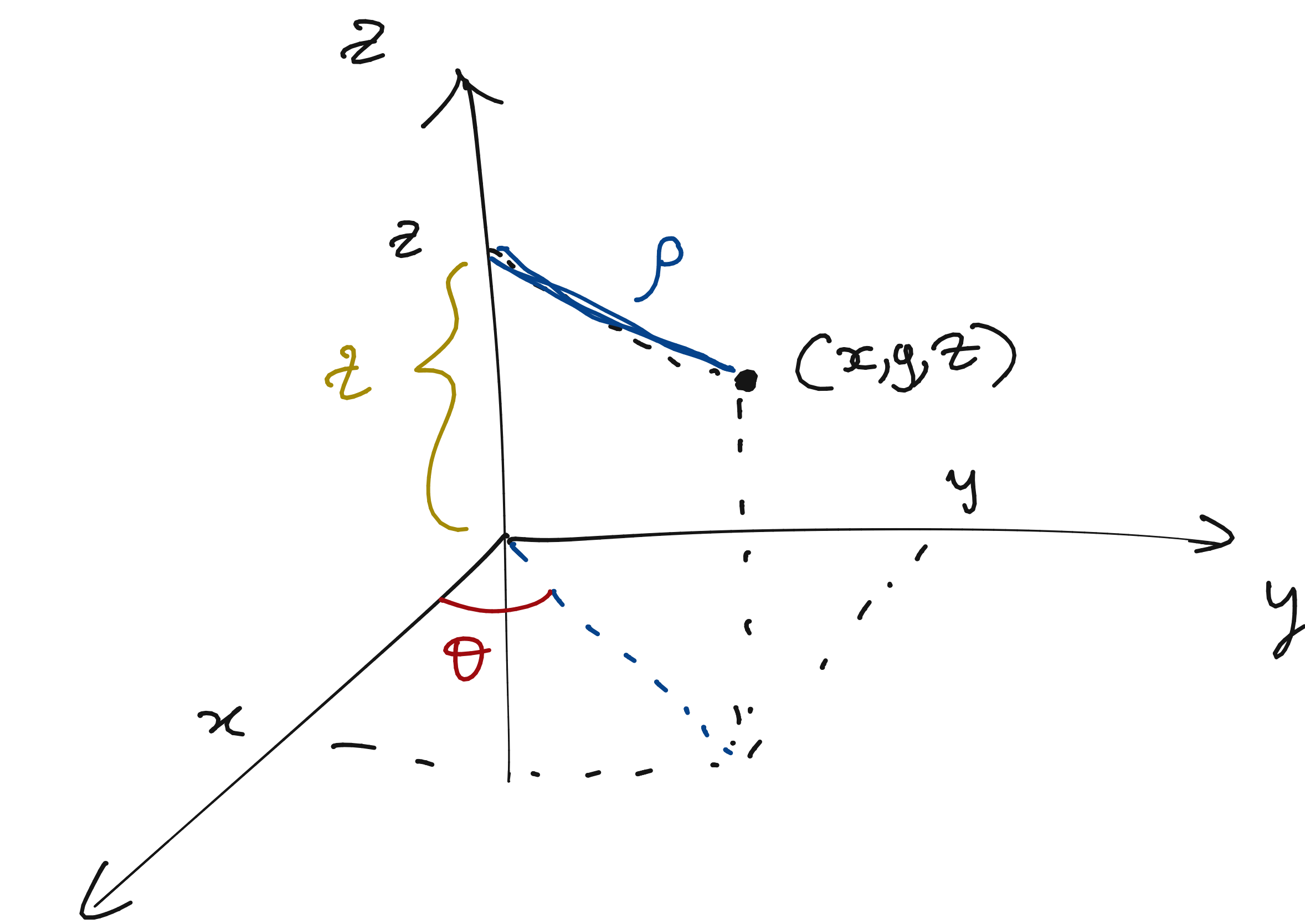
Coordinate cilindriche sono date da (ρ, θ, z) e sono legate alle coordinate di $\mathbb{R}^3$ delle relazioni

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$



Le mappe di cambio di variabile e

$$\Phi : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$$

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

$$\Rightarrow \nabla \Phi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$$

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

$$\det(\nabla \Phi(\rho, \theta, z)) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \cdot 1 = \rho$$

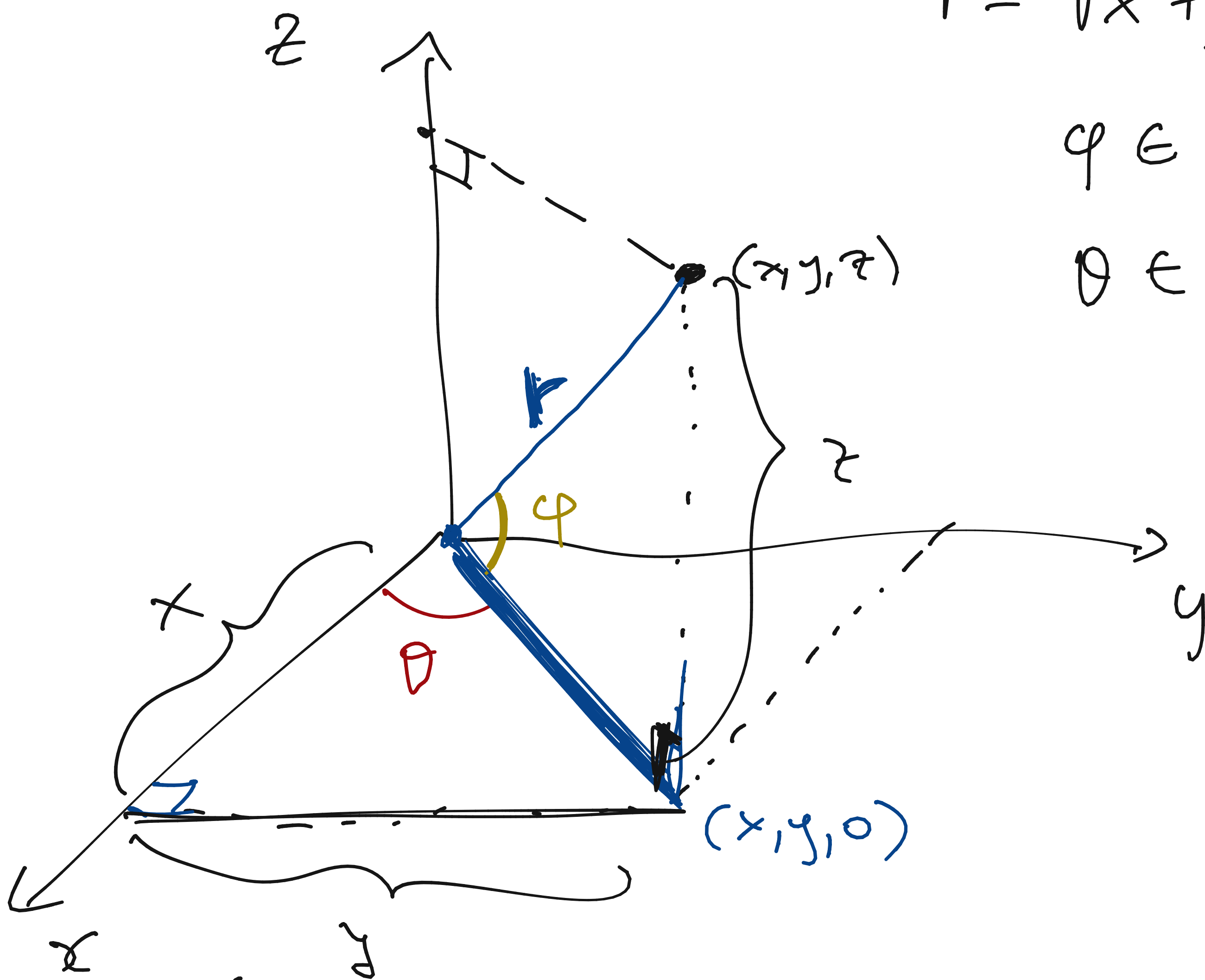
Coordinate sferiche

Anche in questo caso
usiamo queste coordinate per descrivere punti
in $\mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{axe } z \}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



Def: $(r, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

$(x, y, 0)$ ha lunghezza $r \cos \varphi$
 il vettore $(x, 0, 0)$ ha lunghezza $r \cos \varphi \cdot \cos \theta$

quindi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

La mappa di cambio di variabile è

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$$

$$\nabla \Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla \Phi) = \sin \varphi \cdot \left[r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta \right]$$

$$+ r \cos \varphi \left[r \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \right]$$

$$= r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$+ r^2 \cos^2 \varphi \cos \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= r^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \cos \varphi$$

$$= r^2 \cos \varphi [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] = r^2 \cos \varphi$$

Integrali impropri

Fino a adesso abbiamo definito l'integrale solo per funzioni limitate e su domini limitati.

Def.: Supponiamo f funzione ≥ 0 ^{limitata} definite su $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con E illimitato. Allora f si dice integrabile in senso improprio su E se $\forall R > 0$ f risulta integrabile secondo Riemann su $E \cap B_R(0)$ e inoltre esiste finito il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) dx$$

In tal caso definiamo $\int_E f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) dx$

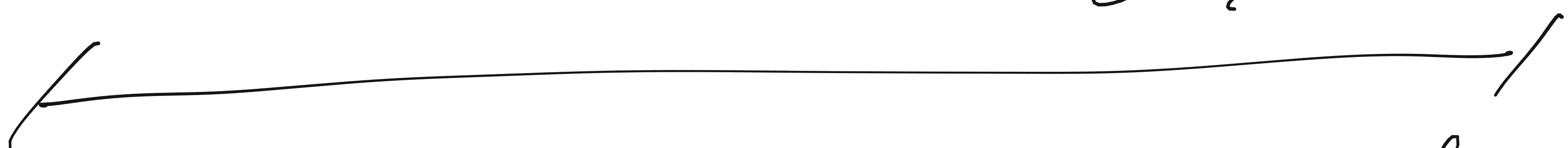
Nel caso in cui ho una funzione illimitata su un dominio E limitato si usa la seguente definizione:

Def.: Supponiamo E limitato ed $f \geq 0$ su E . Supponiamo $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$

e supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ f rimanga
 limitata su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})$. Allora f si dice
 integrabile in senso improprio su E se
 f è integrabile su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x}) \quad \forall \varepsilon > 0$ e
 $\exists$ finito il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$

In tal caso diremo che

$$\int_E f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx.$$



Con intermedi può accadere che
 esistano un numero finito di p.li $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
 $\bar{x}_m$ tali che $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}_i} f(x) = +\infty \quad \forall i = 1, \dots, m$

Allora $\int_E f(x) dx$ con E limitato

si definisce $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_1) \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_2) \setminus \dots \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_m)} f(x) dx$

Se inoltre E è illimitato
 posso definire l'integrale improprio di f su E
 come $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(E \setminus \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(\bar{x}_i)) \cap B_{1/\varepsilon}(0)} f(x) dx$

Def.: per ogni funzione f definiamo
la sua parte positiva f^+ e la sua parte
negativa f^- con

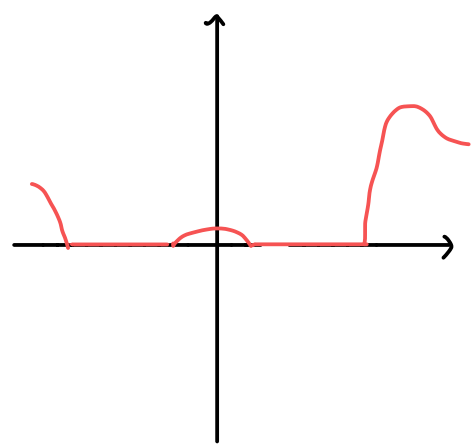
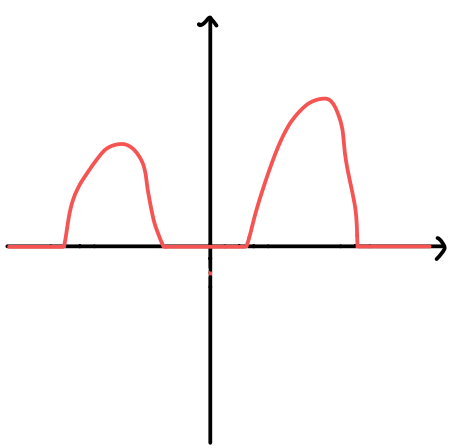
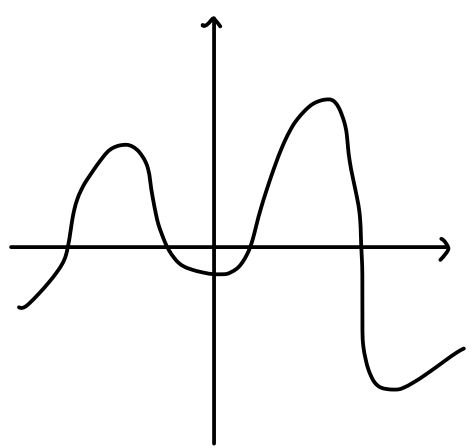
$$f^+(x) = \max \{ f(x), 0 \} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max \{ -f(x), 0 \} = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Supponendo di prendere
una funzione qualsiasi

La sua parte positiva:

La sua parte negativa



$$\Rightarrow f^+ \geq 0 \quad \text{e} \quad f^- \geq 0$$

e inoltre

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Def.: Integrale improprio per funzioni qualsiasi

Supponiamo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f
è integrabile in senso improprio su E se e solo se
 f^+ ed f^- sono integrabili in senso improprio
su E e in tal caso

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx$$

Esempio

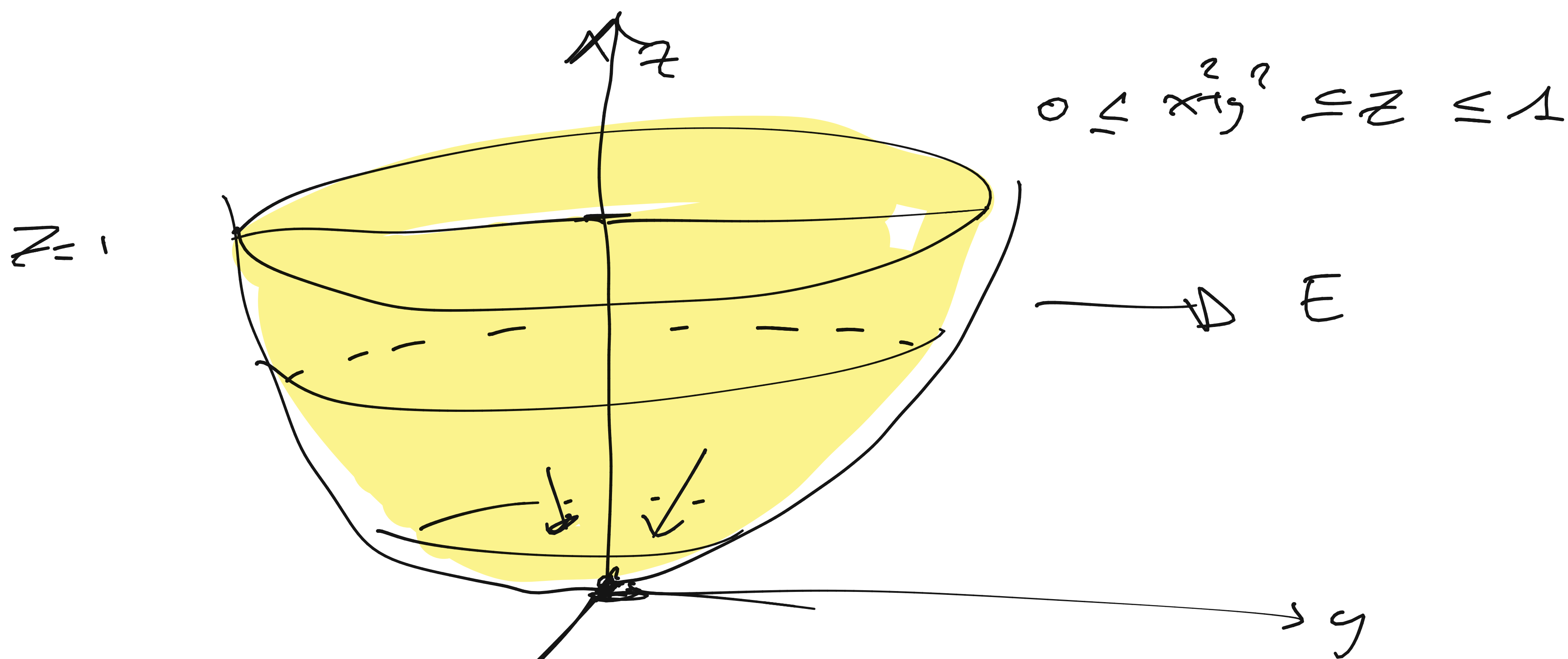
Trendisco il dominio E

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$

e considero la funzione $f(x, y, z) = z^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

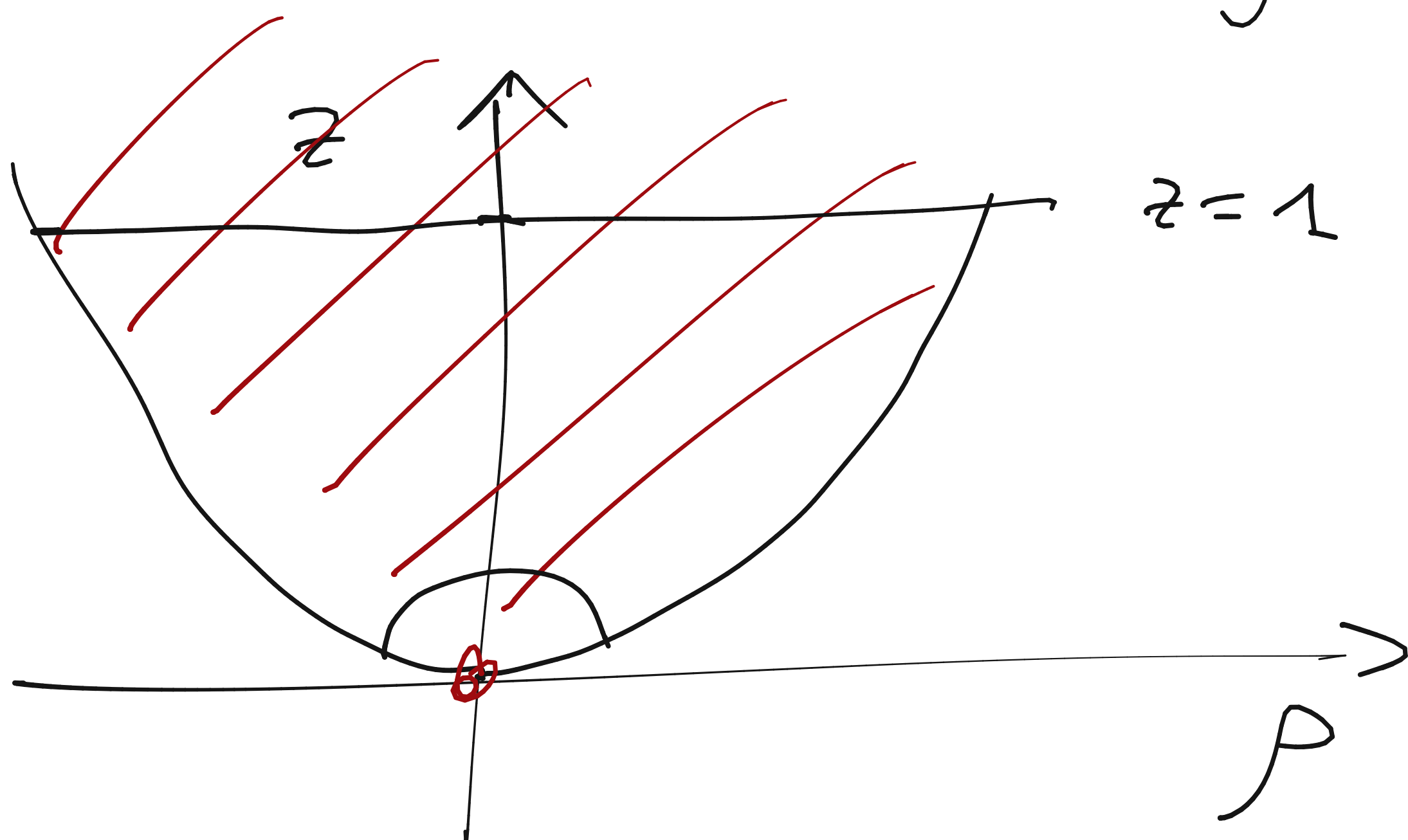
Determinare per quali valori di α la funz. f risulta integrabile in senso improprio su E .

Oss.: z^α La funzione risulta essere un esponentiale $\alpha \geq 0$ risulta essere
funzione continua e limitata su E .



Passo in coordinate cilindriche

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \leq z \leq 1$$



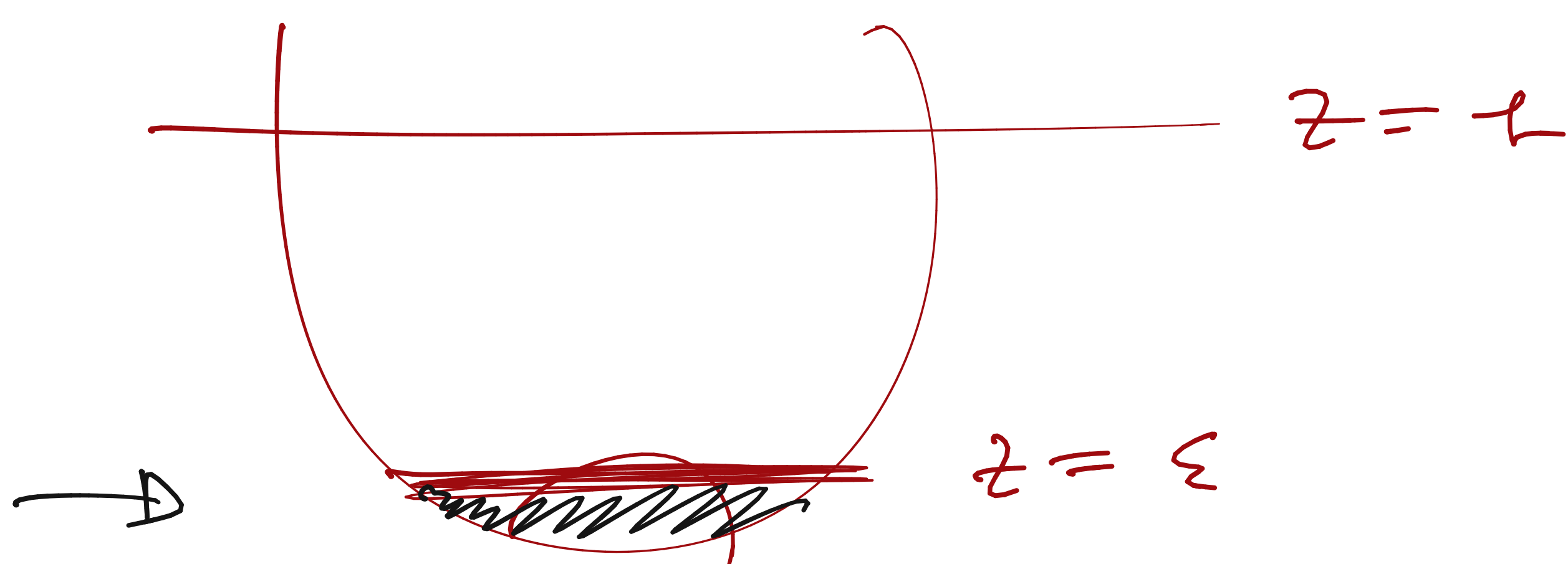
Se $\alpha < 0$ la funzione $f(x, y, z) = z^\alpha = \frac{1}{z^{-\alpha}}$

tende a $+\infty$ quando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$
 quindi per rispondere al quesito devo
 calcolare un integrale improprio

$$\int_{E \setminus B_\varepsilon(0)} z^\alpha dx dy dz$$

$$E \setminus B_\varepsilon(0)$$

← invece di fare
questo



facile questo

$$D_\varepsilon = \{ (x, y, z) : z \in (0, \varepsilon) \}$$

$$\int_{E \setminus D_\varepsilon} z^\alpha dx dy dz$$

di cui calcolare $E \setminus D_\varepsilon$?

$$E = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$

$$D_\varepsilon = \{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \varepsilon \}$$

$$\Rightarrow E \setminus D_\varepsilon = \left\{ (x, y, z) : \varepsilon < z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \right\}$$

In coordinate cilindriche

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

$$\int_{E \setminus D_\varepsilon} z^\alpha dx dy dz = \int_{\Phi^{-1}(E \setminus D_\varepsilon)} z^\alpha |\det D\phi| dy d\theta dz$$

$$\Phi^{-1}(E \setminus D_\varepsilon) = \left\{ (p, \theta, t) : \begin{array}{l} \varepsilon \leq z \leq 1 \\ 0 < \rho \leq \sqrt{z} \end{array} \right\}$$

$$\left| \det D\phi \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{E}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z^2 \rho \, d\rho d\theta \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} z^2 \left(\frac{p^2}{2} \right)^{p=\sqrt{z}} d\theta dz$$

$$= \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} \frac{z^{\alpha+1}}{2} d\theta dz = \int_{\varepsilon}^1 \pi z^{\alpha+1} dz$$

$$\alpha = -2 \quad \longrightarrow \quad \int_{\gamma} \pi z^{-1} dz = \pi (\log 1 - \log z)$$

$$\alpha \neq -2 \quad \rightarrow \quad \int_{\gamma} \pi z^{\alpha+1} dz = \pi \frac{1}{\alpha+2} z^{\alpha+2} \Big|_{\gamma} \quad \sim$$

$$= \frac{\pi}{\alpha+2} \left(1 - \varepsilon^{\alpha+2} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi \int_{\epsilon}^1 z^{\alpha+1} dz =$$

$$= \text{Se } \boxed{\alpha = -2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi (-\log \varepsilon) = +\infty$$

f NON INTEGRABILE

$$\text{Se } \boxed{\alpha \neq -2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{(\alpha+2)} (1 - \varepsilon^{\alpha+2}) = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha+2} & \alpha > -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

f ∈ INTEGRABILE se α > -2
 e NON ∈ INTEGRABILE se α ≤ -2

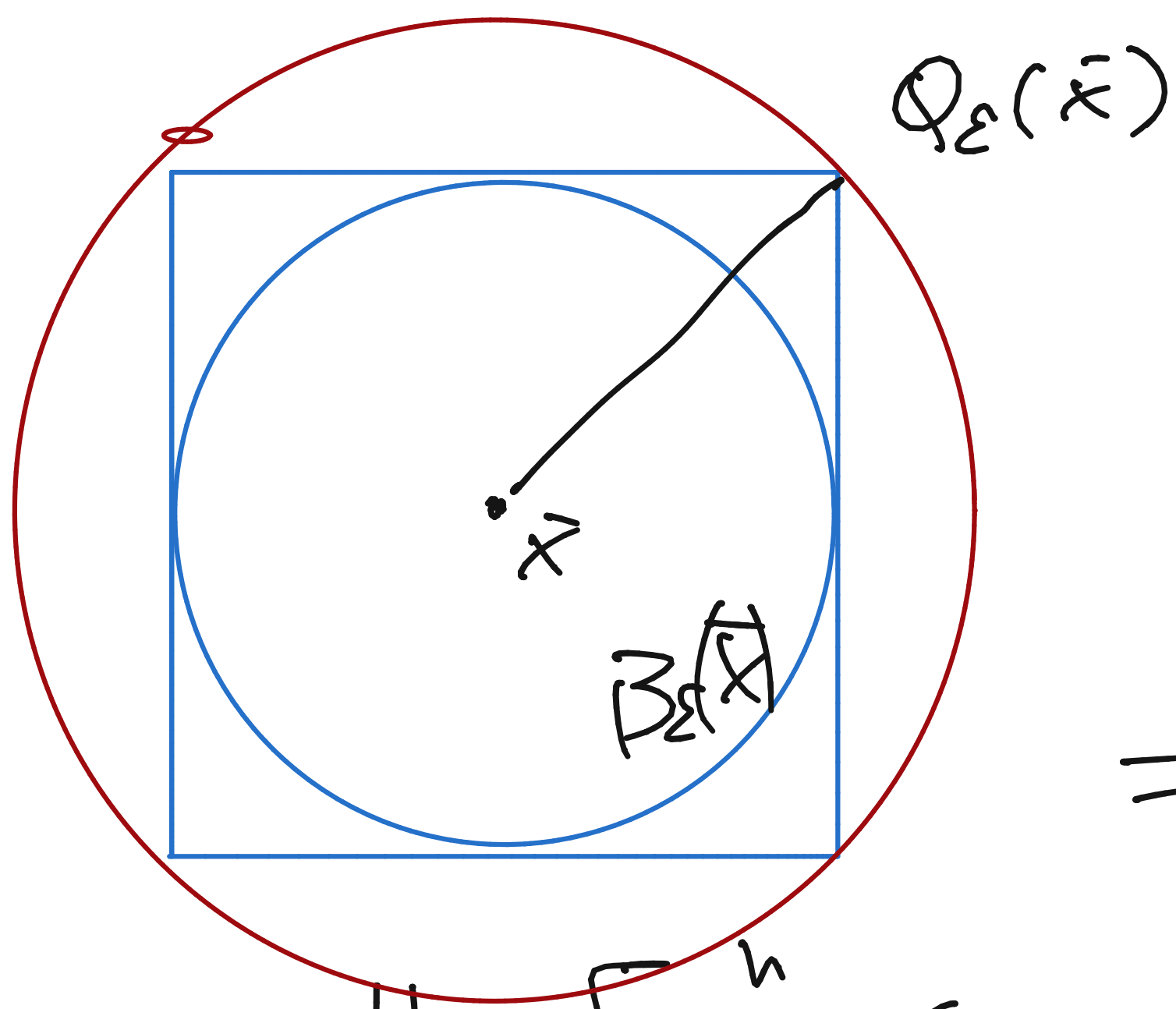
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \stackrel{?}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus D_\varepsilon} f(x) dx$$

Definizione per $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
 definiamo il cubo centrato in $\bar{x}$ e con lato 2ε
 l'insieme

$$Q_\varepsilon(\bar{x}) = (\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_1 + \varepsilon) \times (\bar{x}_2 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon) \times \dots \times (\bar{x}_n - \varepsilon, \bar{x}_n + \varepsilon)$$

Oss. Le palle di raggio ε centrate in $\bar{x}$
 e contenute in $Q_\varepsilon(\bar{x})$.

$$B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x})$$



facciamo vedere che $\forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$

si ha $x \in Q_\varepsilon(\bar{x})$

se $x \in B_\varepsilon(\bar{x})$

$$\Rightarrow \|x - \bar{x}\| < \varepsilon$$

$$\|x - \bar{x}\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_i \in (\bar{x}_i - \varepsilon, \bar{x}_i + \varepsilon) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$x \in Q_\varepsilon(\bar{x})$$

OSS.: $Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$

$$\text{Se } x \in Q_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow x \in B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

in fatti se $x \in Q_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon$
 $\forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i|^2 < n\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|\bar{x} - x\| < \sqrt{n}\varepsilon \Rightarrow x \in B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

Se $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ } $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo calcolare
 l'integrale improprio di f su E limitato

$$\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \right]$$

dim.: Anzitutto osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \text{ esiste sempre}$$

esiste perché la funzione $\bar{I}$ monotona non crescente.

$$\varepsilon \rightarrow \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$$

⚡ infatti se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B_{\varepsilon_2}(\bar{x}) \supseteq B_{\varepsilon_1}(\bar{x})$

$$\Rightarrow E \setminus B_{\varepsilon_2}(\bar{x}) \subseteq E \setminus B_{\varepsilon_1}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \int_{E \setminus B_{\varepsilon_2}(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus B_{\varepsilon_1}(\bar{x})} f(x) dx$$

perché $f \geq 0$

$$\left[\begin{aligned} &\text{se } A \subseteq B \text{ e } f \geq 0 \quad \int_B f(x) dx \geq \int_A f(x) dx \\ &\text{perché } \int_B f(x) dx - \int_A f(x) dx = \int_{B \setminus A} f(x) dx \geq 0 \end{aligned} \right]$$

il fatto che $\varepsilon \rightarrow \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$ è monotona

implica l'esistenza del limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$.

$$\text{Supponiamo che } B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

questo implica che

$$\int_{E \setminus B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$$

Osservo ANCHE che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_{\varepsilon\sqrt{n}}(\bar{x})} f(x) dx \quad (*)$$

il teorema di Lebesgue dice che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = (*)$$

Teorema Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una funzione definita su E limitato e misurabile secondo P-J. e sia $\bar{x} \in \bar{E}$ un punto tale che $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$. Supponiamo

$\forall \varepsilon > 0$ $f|_{\bar{E}}$ integrabile secondo Riemann su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})$. Allora $f|_{\bar{E}}$ integrabile in senso improprio su E e vale

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \text{ esiste finito.}$$

Oss.: Se R_ε è una figura piana
 una regione tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } R_\varepsilon = 0$
 e $\exists c, C > 0$ costanti tali che

$$B_{c\varepsilon}(\bar{x}) \subseteq R_\varepsilon \subseteq B_{C\varepsilon}(\bar{x})$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

Allora f è integrabile in senso improprio
 su E se e solo se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus R_\varepsilon} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

In modo analogo posso trattare integrali su
 domini illimitati. Se R_ε è una figura
 piana per cui $\text{diam}(R_\varepsilon) \rightarrow +\infty$
 quando $\varepsilon \rightarrow \infty$ e $\exists c, C > 0$ tali che

$$B_{c\varepsilon}(0) \subseteq R_\varepsilon \subseteq B_{C\varepsilon}(0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{allora}$$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ funzione limitata su
 dominio E illimitato, f è integrabile in
 senso improprio su E se e solo se $\exists$ finito
 il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{E \cap R_\varepsilon} f(x) dx$ e tale limite
 coincide con $\int_E f(x) dx$.