

Successioni di funzioni

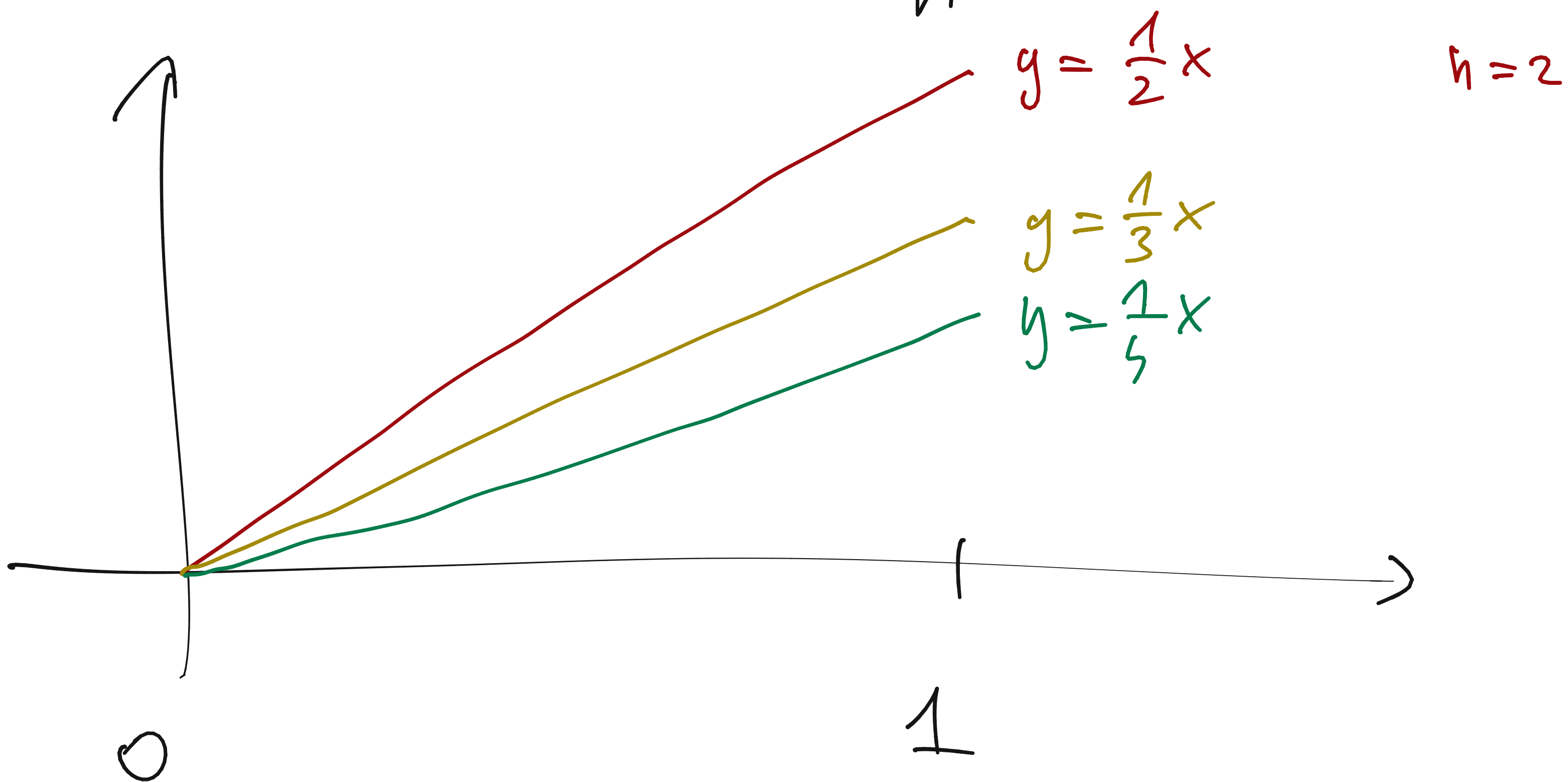
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$ un dominio aperto. Una successione di funzioni è una famiglia di funzioni $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dove $n \in \mathbb{N}$.

Definizione Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dove $E \subseteq \mathbb{R}^m$

Diciamo che f_n converge puntualmente ad una funzione $f: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ se $\forall x \in E$ la successione numerica $f_n(x) \in \mathbb{R}^k$ converge a $f(x) \in \mathbb{R}^k$.

Esempio 1 $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}$ Insieme di arrivo $k=1$ Insieme da cui partono tutte le funzioni della successione $E = [0, 1]$

e prendiamo $f_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
definite come $f_n(x) = \frac{1}{n}x$



Chiamo $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 0$
 $\forall x \in [0,1]$

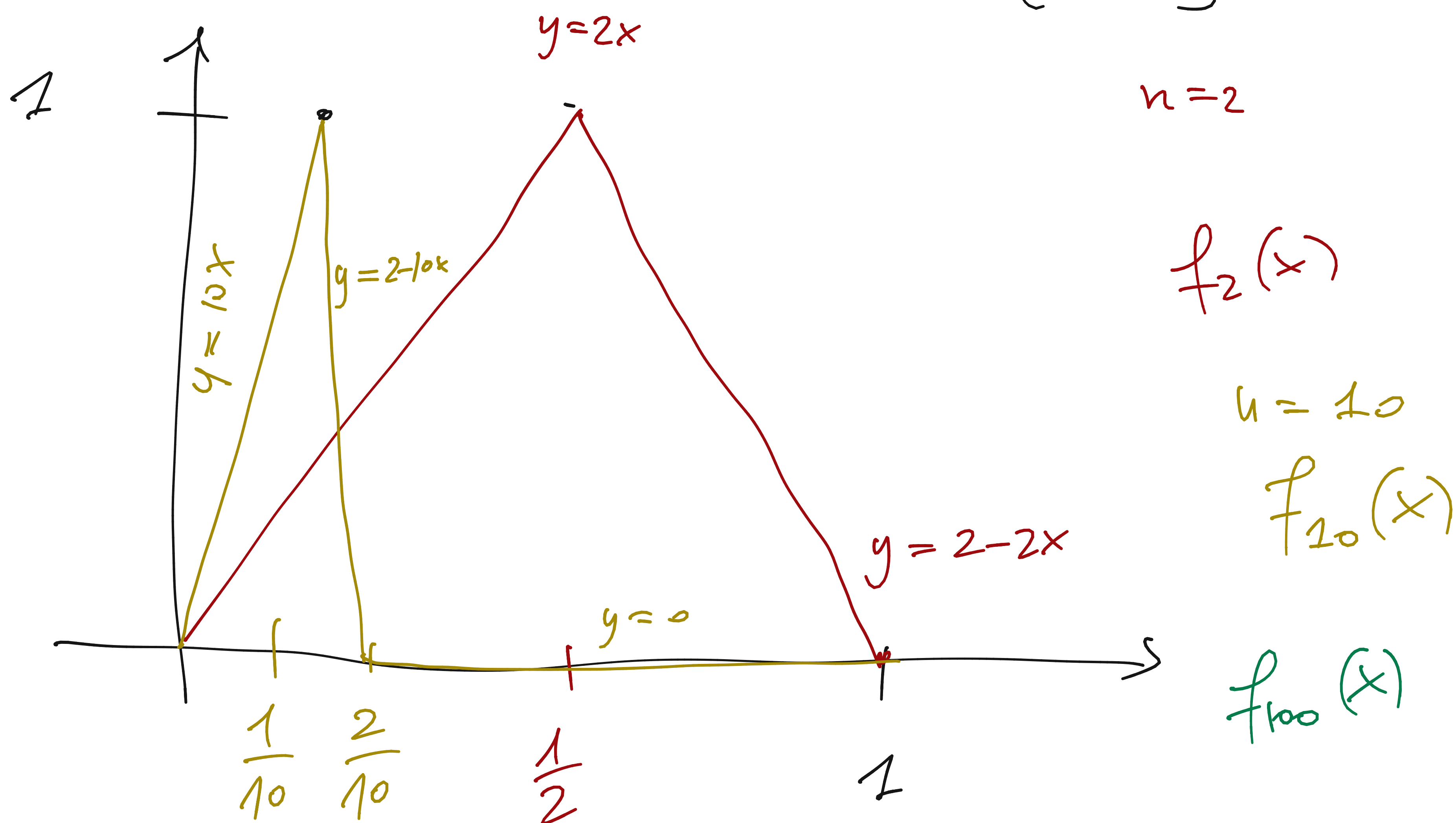
Allora $f_n \rightarrow f$ puntualmente.

$\forall x \in [0,1]$ accade che $f_n(x) \rightarrow f(x)$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = f(x)$$

Esempio 2: su $[0,1]$ considero la funzione:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2-nx & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$



$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Quindi:

$f_n \rightarrow f \equiv 0$ puntualmente

esercizio ($f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$)

