

# SERIE DI FOURIER

Una serie di Fourier è una serie di funzioni delle forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Se  $f$  è una funzione data  $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

possiamo trovare dei coefficienti  $a_0, a_k, b_k$   $k \geq 1$

tal che  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$  ?

Def.: Dato un intervallo  $[a, b)$  diremo che

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua a tratti se  $\exists$  una partizione di  $[a, b)$ ,  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  tal che  $f$  è continua su  $(t_{i-1}, t_i)$   $\forall i = 1, \dots, n$ .

Diremo che  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è  $C^1$  a tratti se  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  la funzione  $f$  è  $C^1((t_{i-1}, t_i))$

e inoltre esistono i limiti  $\lim_{x \rightarrow t_{i-1}^+} f(x) = f(t_{i-1}^+)$

e  $\lim_{x \rightarrow t_i^-} f(x) = f(t_i^-)$  e sono limiti  $\in \mathbb{R}$

ed esistono anche i limiti dei rapporti incrementali

$$f'(t_i^-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t_i + h) - f(t_i^-)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f'(t_{i-1}^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_{i-1} + h) - f(t_{i-1}^+)}{h} \in \mathbb{R}$$

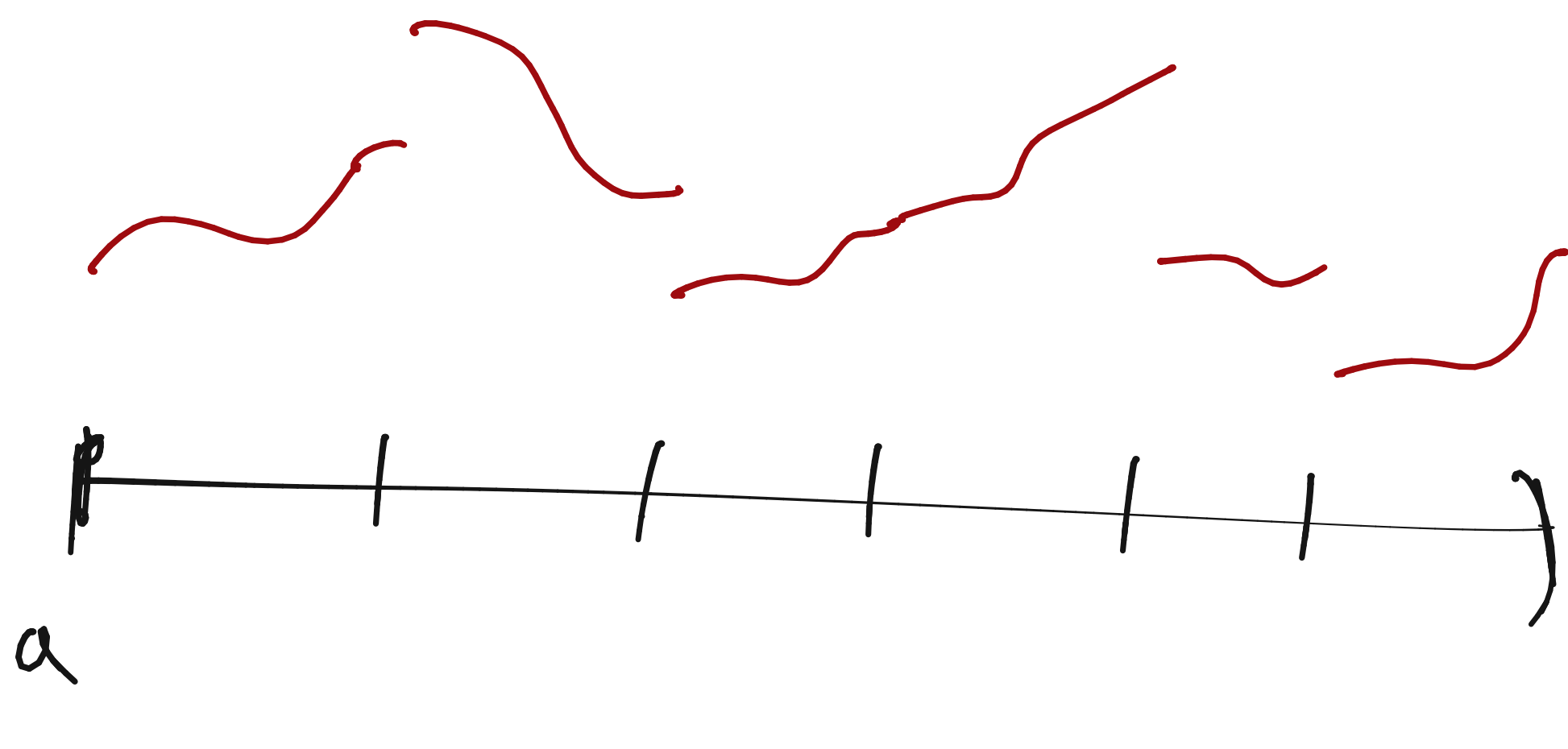
e

in fine

$f' : [t_{i-1}, t_i) \rightarrow \mathbb{R}$   $i$ -esima continua

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$C^1$  a tratti



$t_i$  punti di salto  
i punti di discontinuità di  $f$

dove  $f$  può essere discontinua, ma in tal caso le discontinuità sono di tipo salto.

Def.:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice periodica se  $\exists T > 0$

A.c.  $f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .  $T$  si dice periodo.

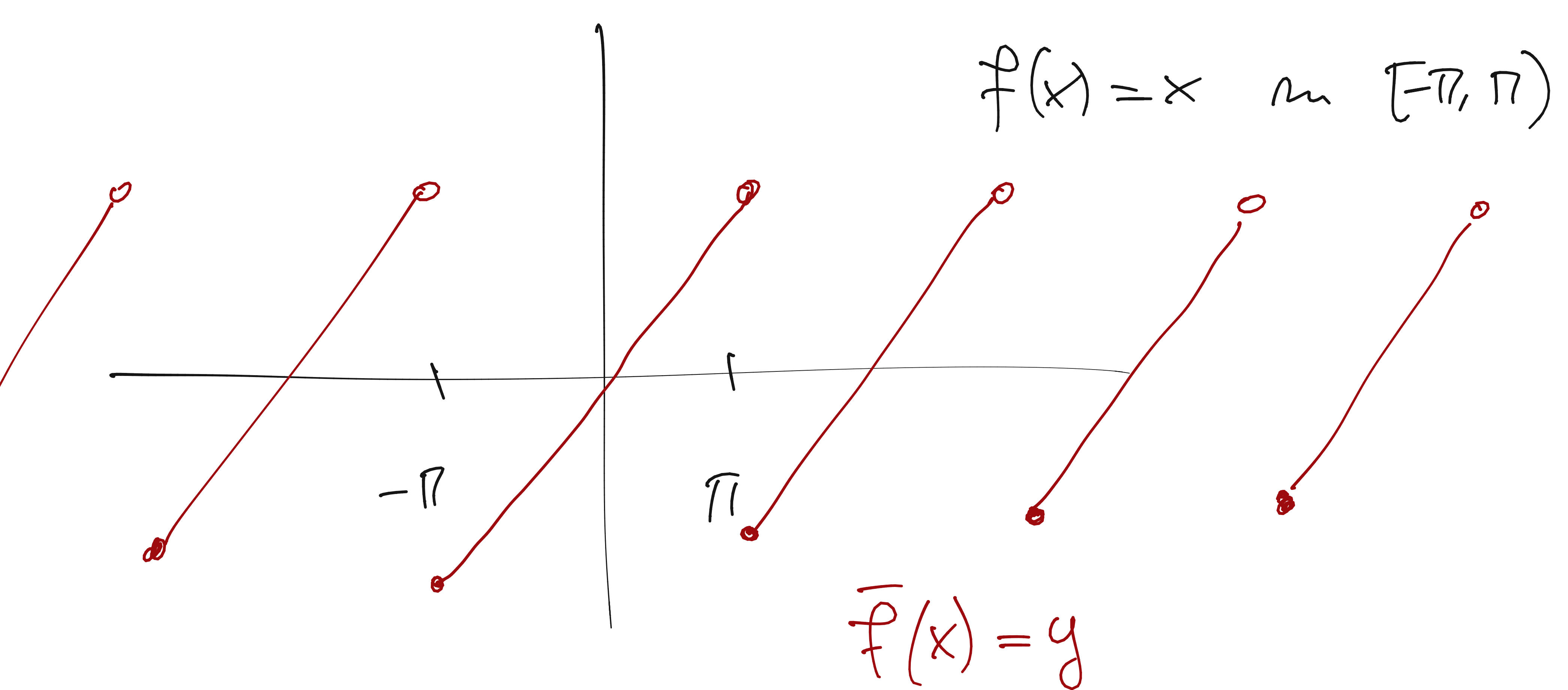
Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è periodica di periodo  $T > 0$  possiamo definire  $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$  e  $\tilde{f}$  risulterà periodica di periodo  $2\pi$ .

Se  $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo definire la sua estensione periodica di periodo  $2\pi$  come

$$\tilde{f}(x) := f(x - 2k\pi)$$

$$\text{se } x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Lemma 1: la funzione  $e_0 \equiv 1$  in  $[-\pi, \pi)$

$e_k = \cos kx$  in  $[-\pi, \pi)$

$e_{-k} = \sin kx$  in  $[-\pi, \pi)$

$k \geq 1$

validi sono le seguenti proprietà:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k^2 dx = \pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_0^2 dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k \cdot e_j dx = 0 \quad \text{se } k \neq j$$

esempi  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx dx = 0$  (verificare a caso)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

Inoltre

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k dx = \begin{cases} 2\pi & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \\ & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

esempio  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \, dx$

O.S.R.: Supponiamo  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Allora  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos hx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos hx \, dx$   
 $+ \sum_{k \geq 1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \cos hx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \cos hx \, dx \right)$   
 $= \pi a_h$

in modo analogo  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin hx \, dx = \pi b_h$

e  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \pi a_0$

Se la serie di Fourier converge a  $f(x)$  allora necessariamente i coefficienti  $a_0, a_k, b_k$  devono soddisfare

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \quad \forall k \geq 1$$

(\*)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0$$

I coefficienti  $a_0, a_k, b_k$  si chiamano coeff. di Fourier di  $f$  e si calcolano come sopra in  $(*)$

Per qual  $f(x)$  si ha che la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

converge esattamente ad  $f(x)$ ?

Lemma 2:  $\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt =$   
 $= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}$

Dim.: per induzione  $n=0$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ok

$n$  vale per  $n \Rightarrow$  vale per  $n+1$

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

Allora sommo  $\cos(n+1)t$  ad entrambi i membri e ottengo

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt + \cos(n+1)t = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} + \cos(n+1)t$$

$$= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) + 2 \cos(n+1)t \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

$$= \frac{\sin(n+1)t \cos \frac{t}{2} - \cos(n+1)t \sin \frac{t}{2} + 2 \cos(n+1)t \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) &= \sin\left((n+1)t - \frac{1}{2}t\right) \\ &= \sin(n+1)t \cos \frac{1}{2}t - \cos(n+1)t \sin \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(n+1)t \cos \frac{t}{2} + \cos(n+1)t \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

D

Proposizione (Inuguaglianza di Bessel)

Supponiamo  $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  funzione limitata integrabile secondo Riemann. Se  $a_0, a_k, b_k$  sono i miei coefficienti di Fourier, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

dim.:  $\forall n \geq 0$  deduciamo da

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Chiaramente si ha  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx$$

Calcoliamo  $2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_n(x) dx =$

$$= 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k f(x) \cos kx + b_k f(x) \sin kx dx$$

$$= 2 \left( \frac{a_0^2}{2} \pi + \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right)$$

$\downarrow$   $\pi a_k$                        $\downarrow$   $\pi b_k$

$$= 2\pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right)$$

Involuere  $\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)^2 dx$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^n a_k^2 (\cos kx)^2 + b_k^2 (\sin kx)^2 dx$$

+  $\int_{-\pi}^{\pi}$  doppi prodotti .. dx  $=$  ~~XX~~

doppi prodotti  $2 \cdot \frac{a_0}{2} \sum_{k \geq 1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$$+ 2 \sum_{k < j \leq n} a_k a_j \cos kx \cos jx$$

$$+ 2 \sum_{k < j \leq n} b_k b_j \sin kx \sin jx$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_k b_j \cos kx \sin jx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{dopp. prod.} = 0$$

$$(\text{**}) = \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \pi a_k^2 + \pi b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)^2 dx$$

La formula esprime allora direttamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 2\pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right)$$

$$= \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right)$$

mandando  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \quad \square$$

Teorema

Sia  $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  una

funzione  $C^1$  a tratti. Allora la serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dove  $a_0, a_k, b_k$  sono i coeff. di Fourier di  $f$ ,  
converge puntualmente a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

dove  $f(x^+) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x^+} f(\tilde{x})$

$$f(x^-) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x^-} f(\tilde{x})$$

NOTA se  $f(x)$  è continua in  $\bar{x}$

$$\Rightarrow S_n(\bar{x}) \rightarrow \frac{f(\bar{x}^+) + f(\bar{x}^-)}{2} = f(\bar{x})$$

se  $\bar{x}$  è un punto di salto allora

$$S_n(\bar{x}) \rightarrow \frac{f(\bar{x}^+) + f(\bar{x}^-)}{2} \quad \text{può non coincidere con } f(\bar{x})$$

Nel caso particolare in cui  $f$  è continua in tutto  $[-\pi, \pi)$  allora

$$S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$$

esempio prendiamo la funzione  $f(x) = x$  in  $[-\pi, \pi)$ , calcoliamo i coeff. di Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx \, dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} (-\cos kx) x \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} \cos kx \, dx$$

$$= \begin{matrix} k \text{ disp:} \\ \frac{2}{k} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} k \text{ pari} \\ -\frac{2}{k} \end{matrix}$$

$$\frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\text{Bessel} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{4}{k^2}$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} \geq \sum_{k \geq 1} \frac{4}{k^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

D

Ricordiamo le disuguaglianze di Bessel

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2$$

In particolare  $\sum_{k \geq 1} a_k^2$  e  $\sum_{k \geq 1} b_k^2$  converge

$\Rightarrow a_k, b_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$

detto ciò possiamo dimostrare il teorema:

Teorema Sia  $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^1$  e tutti:

limitata  $\Rightarrow S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$

(dove  $a_k, b_k, a_0$  coeff. di Fourier di  $f$ ) converge,  
per ogni  $x \in [-\pi, \pi)$ , alla funzione  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ .

Ricordiamo  $f(x^+) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x^+} f(\bar{x})$   $f(x^-) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x^-} f(\bar{x})$ .

Inizio dimostrazione

dim.:  $S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos Ky \cos Kx + \sin Ky \sin Kx \right] dy$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos Ky dy$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin Ky dy$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(y-x)) \right] dy =$$

Cambio di variabili  $t = y - x \Rightarrow$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt = \text{se } \bar{f} \text{ indica l'estensione } 2\pi\text{-periodica di } f \text{ su } \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = S_n(x)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \text{estendo l'integrale su funzione pari} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \dots dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \dots dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x^+) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x^+)}{2}$$

è analoga

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x^-) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{f(x^-)}{2}$$

Sommando le ultime 2 espressioni ho trovato

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x^-) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x^+) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

Sottraigo le due equazioni e ottengo

$$S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t dt$$

Se definiamo  $G(x,t) :=$

$$\begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2\sin\frac{t}{2}} & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\sin\frac{t}{2}} & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

l'espressione precedente diventa

$$S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x,t) \sin(n+\frac{1}{2})t dt$$

Oss.:  $G(x,t)$  è continua e tratti e limitata  
in  $[-\pi, \pi)$  e tratti e limitata

In fatti  $\bar{f}$  continua in  $[-\pi, 0)$  e  $(0, \pi)$

in  $\boxed{t=0}$   $G(x,t)$  assume limiti da dx e dx finiti

In fatti

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}(x+t) - f(x^+)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x^+)}{t} \cdot \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

$$= \bar{f}'(x^+) \cdot 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} G(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\bar{f}(x+t) - \bar{f}(x^-)}{t} \cdot \frac{t/2}{\sin \frac{t}{2}}$$

$$= \bar{f}'(x^-) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow G(x,t)$  è continua e tratti e limitata

in  $[-\pi, \pi) \Rightarrow$  integrabile

$$\left[ S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x,t) \sin \frac{t}{2} \cos nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x,t) \cos \frac{t}{2} \sin nt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( G(x,t) \sin \frac{t}{2} \right) \cos nt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( G(x,t) \cos \frac{t}{2} \right) \sin nt$$

Le funzioni continue sono continue e limitate in  $(-\pi, \pi) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( G(x, t) \sin \frac{t}{2} \right) \cos nt \, dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( G(x, t) \cos \frac{t}{2} \right) \sin nt \, dt \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$$

Quindi, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \longrightarrow 0$$

Ter-

Fine dimostrazione  $\square$

Oss.: Calcoliamo i coeff di Fourier della funzione  $f(x) = x$  in  $[-\pi, \pi)$

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \quad k \geq 1$$

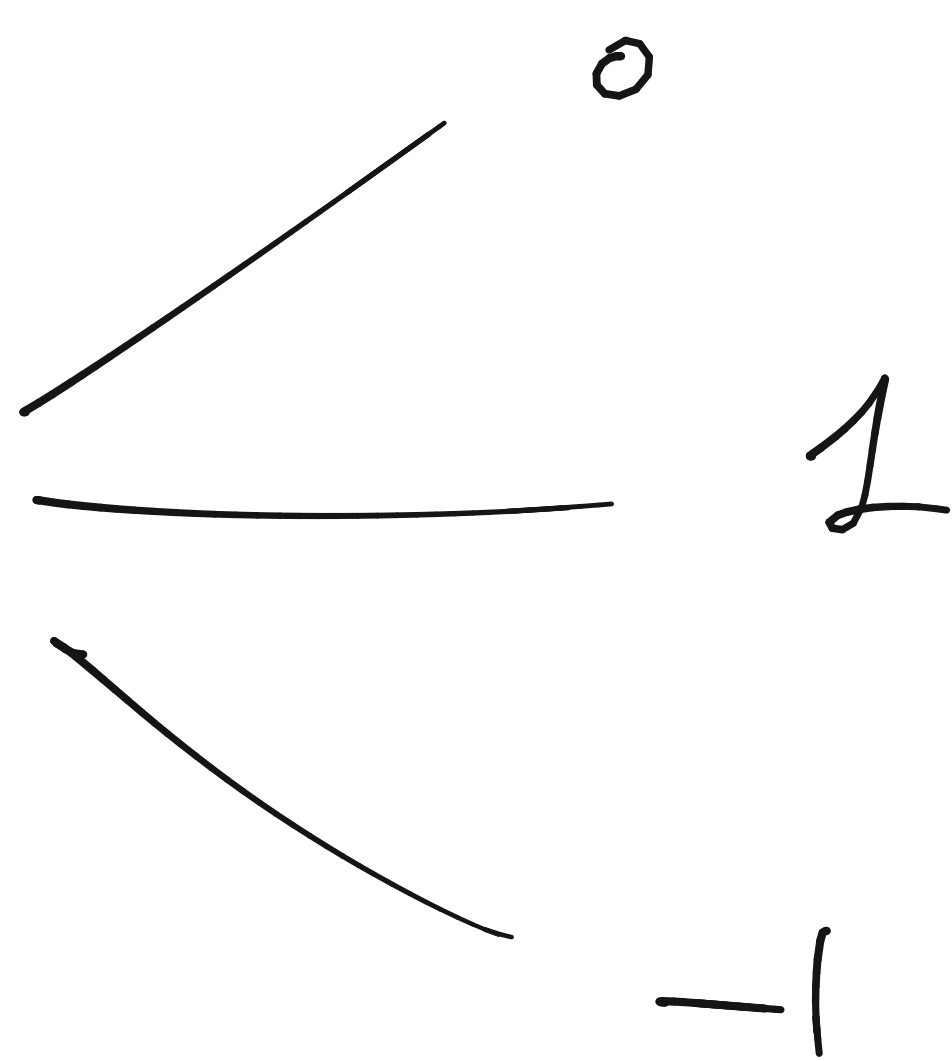
$\Rightarrow$  il teorema precedente afferma

$$\text{che } x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$x = \sum_{k \geq 1} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{k \geq 1} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$\sin \frac{k\pi}{2}$$



$k$  pari

$$k = 4h + 1$$

$$k = 4h + 3$$

abbiamo trovato che

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2j-1} (-1)^{j+1}$$

impari

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{4h+1} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2}{4h+3}$$

$$2h=j$$

✓

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2j+1}$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{2j+1}$$

$$2h+1=j$$

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{2}{2j-1}$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{2j-1}$$

Teorema

Sia  $f$  una funzione  $:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

di classe  $C^1$  e  $2\pi$ -periodica.

$S_n \rightarrow f$  su  $[-\pi, \pi)$  assolutamente

di conseguenza  $S_n \rightarrow f$  uniformemente su  $[-\pi, \pi)$

dim. Dobbiamo far vedere che

$$\sum_{k \geq 1} \|a_k \cos kx + b_k \sin kx\|_{\infty, [0, \pi)} \text{ è convergente.}$$

il fatto che  $S_n(x) \rightarrow f(x)$  ci dice anche che  $S_n \rightarrow f$  uniformemente.

$$\sum_{k \geq 1} \|a_k \cos kx + b_k \sin kx\|_{\infty, [0, \pi)} \leq$$

$$\sum_{k \geq 1} \|a_k \cos kx\|_{\infty} + \|b_k \sin kx\|_{\infty} \leq \sum_{k \geq 1} |a_k| + |b_k|$$

faciamo vedere che  $\sum_{k \geq 1} |a_k| + |b_k| < +\infty$ .

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx = \frac{1}{\pi k} \sin kx f(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$- \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx f'(x) dx$$

$$a_k = -\frac{1}{k} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx f'(x) dx \right)$$

$$= -\frac{1}{k} \beta_k$$

dove  $a_k$  e  $\beta_k$  sono i coeff. di Fourier di  $f'$ .

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx = \dots \quad (\text{indipendentemente})$$

$$b_k = \frac{1}{k} \alpha_k$$

$$\Rightarrow |\alpha_k| = \frac{1}{k} |\beta_k| \quad \text{e} \quad |b_k| = \frac{1}{k} |\alpha_k|$$

per la dis. di Bessel

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \leq \int_{-n}^n |f'(x)|^2 dx$$

quindi  $\sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2$  è convergente

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |\alpha_k| + |b_k| &= \sum_{k \geq 1} \frac{|\alpha_k|k}{k} + \frac{|b_k|k}{k} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{|\beta_k|}{k} + \frac{|\alpha_k|}{k} \end{aligned}$$

$$\text{se } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} |\alpha_k| + |b_k| &\leq \sum_{k \geq 1} \frac{|\beta_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2} + \frac{|\alpha_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

$< +\infty$

perché  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} < +\infty$

Fine dimostrazione



Esempio  $x^2$  in  $[-\pi, \pi)$  e calcolare i  
coeff. d. Fourier (esercizio)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3} \quad a_k = 4 \frac{(-1)^k}{k^2} \quad b_k = 0$$

Quindi la serie di Fourier per  $x^2$  è

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \geq 1} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx$$

Sostituendo  $x=0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \geq 1} \frac{4(-1)^k}{k^2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Sostituendo  $x=\pi \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Corollario la funzione  $f(x)=x$  soddisfa

i nei coeff. d. Fourier  $a_k, b_k, a_0$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k^2 + b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$$

dim. Parseval  $\Rightarrow$  uguaglianza.

detta Identità di Parseval.

Oss.  $f$  non soddisfa le hp dell'ultimo teorema  
 $f \in C^1$ ,  $2\pi$ -periodica su  $\mathbb{R}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(x)|^2 dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m a_k^2 + b_k^2 \right)$$

$S_m \rightarrow f$  unif.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right)$$

identita d. Parseval