

CURVE in $\mathbb{R}^n$

Definizione di curva

Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1([a, b])$

— γ' è continua in (a, b)

$$- \exists \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} = \gamma'(a^+)$$

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(b)}{t - b} = \gamma'(b^-)$$

$$- \gamma'(t) = \begin{cases} \gamma'(a^+) & t = a \\ \gamma'(t) & t \in (a, b) \\ \gamma'(b^-) & t = b \end{cases}$$

γ' è continua in $[a, b]$

Definizione regolarità di una curva

Diremo che $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare se

$$\gamma \in C^1([a, b]) \text{ e } \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Oss.: $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ quindi $\gamma'(t) \neq 0$ significa

$$\gamma'(t) \neq (0, 0, \dots, 0) \iff \|\gamma'(t)\| \neq 0.$$

Definizione curva regolare a tratti

Diremo che $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva

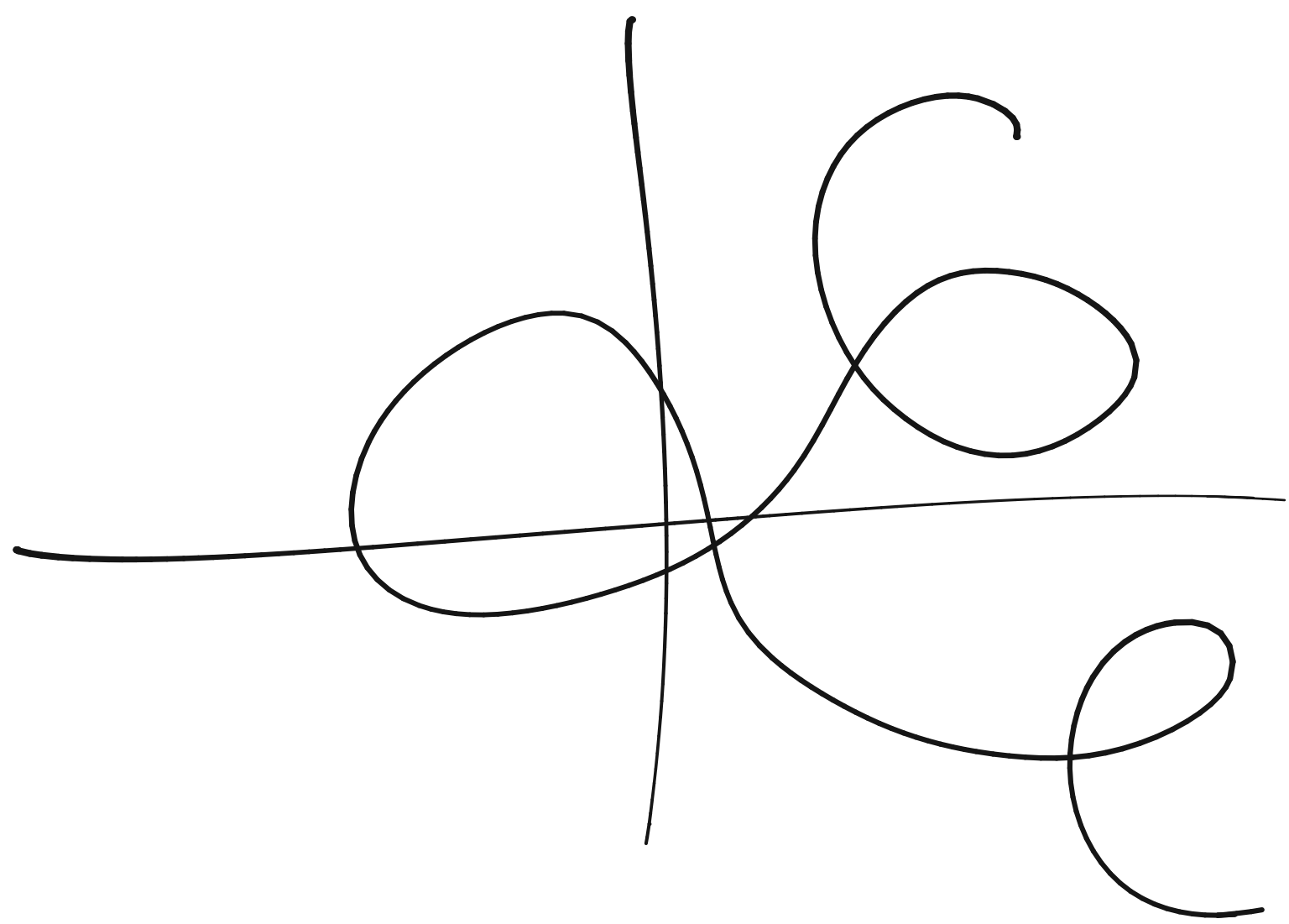
regolare a tratti se $\exists t_0 = a < t_1 < t_2 \dots < t_k$

tal che γ è regolare in $[t_i, t_{i+1}] \quad \forall i = 0, \dots, k-1$

e γ è continua in $[a, b]$.

OSS.: γ si chiama curva $\gamma([a, b])$ rappresentata
una curva in $\mathbb{R}^n$

$\gamma([a, b])$ prende nome di "sostegno" di γ



Se γ è regolare
 $\gamma'(t)$ rappresenta il vettore
tangente a γ nel punto
 $\gamma(t)$

In particolare se definisco

$$r(s) = \gamma(t) + s \gamma'(t)$$

per $s \in \mathbb{R}$

l'insieme di $r(s)$

è una retta in forma

parametrica ed è

tangente al sostegno di γ

nel punto $\gamma(t)$

NOTA

γ è una curva dove il dominio $[a, b] = \mathbb{R}$

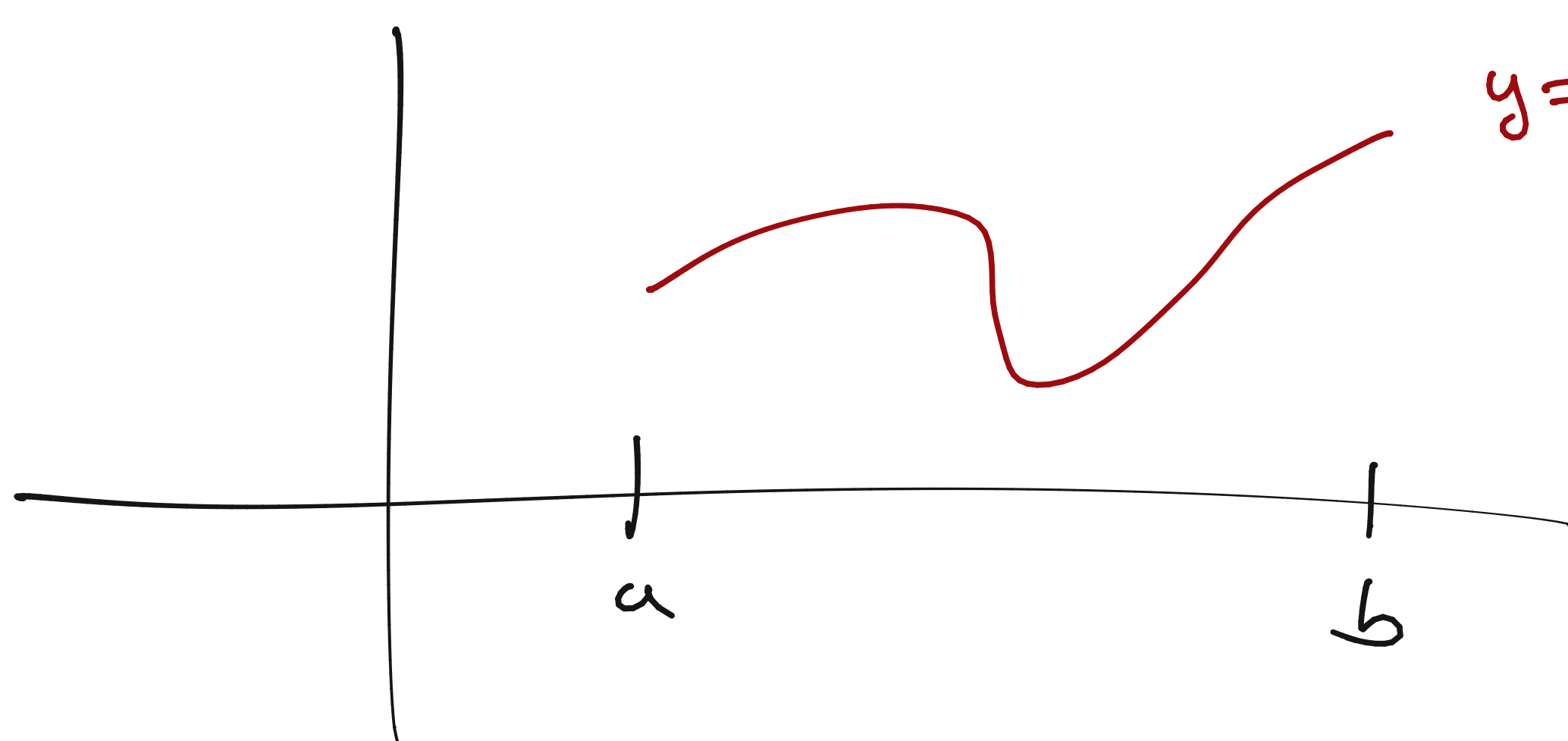
$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

In particolare $r'(s) = \frac{d}{ds} (x(t) + s x'(t))$
 $= x'(t)$

Esempio Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
 di classe $C^1([a, b])$. Allora possiamo definire

$\gamma(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$\gamma(t) = (\overset{\text{Componenti della curva}}{t}, f(t)) \quad \forall t \in [a, b]$



$y=f(x)$ = coincide con
 il sostegno della curva
 γ ,

$\gamma(t) = (t, f(t))$

$x=t \quad y=f(t)$

$\Rightarrow (x, y) \in \gamma([a, b])$ e

$(x, y) = (x, f(x))$

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma(t) = (t, f(t))$

$\gamma'(t) = (1, f'(t))$

Prima osservazione γ è regolare infatti $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

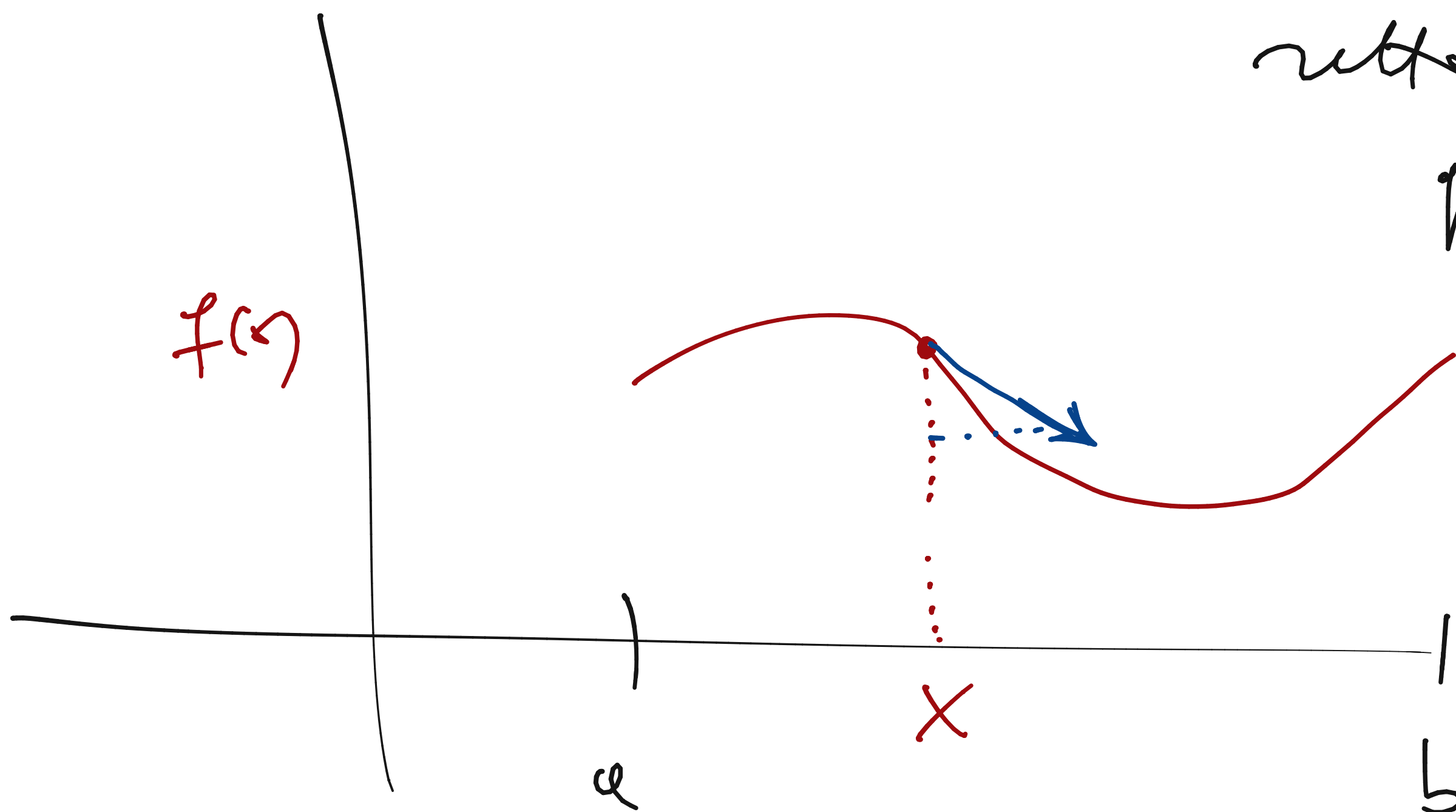
$\gamma \in C^1([a, b])$

Controllare a come

Seconda osservazione 2° oss.: prendiamo $t=x$ e $\gamma'(t) = (1, f'(t))$
 $\gamma'(x) = (1, f'(x))$ e il vettore tangente a γ

$$\text{in } \gamma(x) = (x, f(x))$$

il coeff. angolare della
retta tangente al
grafico $y = f(x)$
nel punto $(x, f(x))$
dove esiste per
a $f'(x)$



Se v è tangente al
grafico in $(x, f(x))$

$$f'(x) = \frac{v_2}{v_1}$$

me $v = (v_1, v_2)$
 $v = \gamma'(x) = (1, f'(x))$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{f'(x)}{1} = f'(x)$$

quindi $\gamma'(x)$ in effetti è il vettore
tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$

$\Rightarrow \gamma'(x)$ è tangente alla curva γ nel
punto $\gamma(x)$

Esempio $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come

$$\gamma(t) = (t^3, t^2)$$

γ è di classe $C^1([-1, 1])$

MA $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ si annulla per $t=0$

$\Rightarrow \gamma'(0) = (0, 0)$ ($\Rightarrow \gamma$ non è regolare)

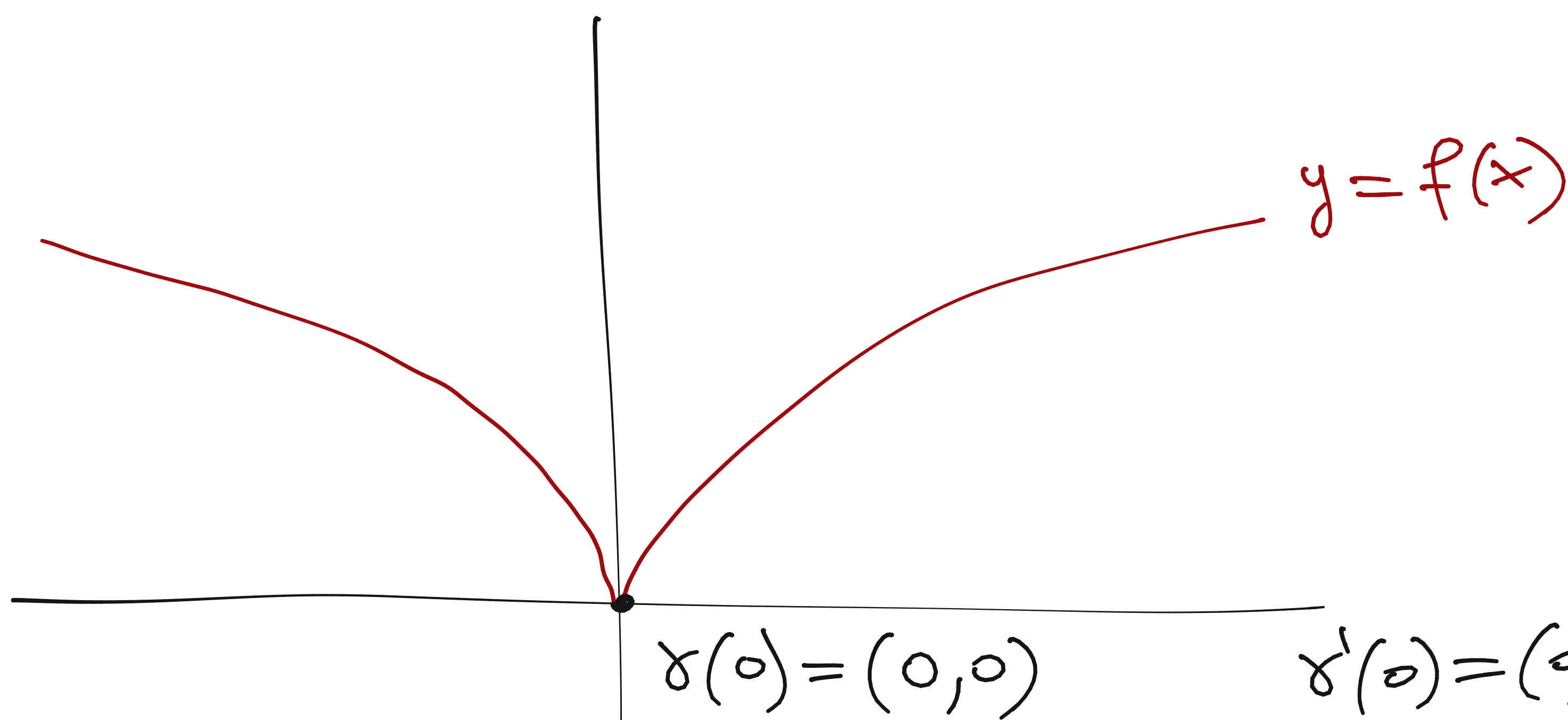
Disegniamo il sostegno di γ

$$x := t^3 = \gamma_1(t)$$

$$y := t^2 = \gamma_2(t) = x^{2/3}$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x, x^{2/3})$$

ovvero γ percorre il grafico di $f(x) = x^{2/3}$



$\gamma'(0) = (0,0)$
in questo punto il sistema
di γ forma una cuspidale

esempio $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (t^2, |\sin t^2|)$

in $t=0$ γ risulta derivabile perché
 $|\sin t^2|$ è derivabile in $t=0$

$$2t \frac{\sin t^2}{|\sin t^2|} \cos t^2 \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0$$

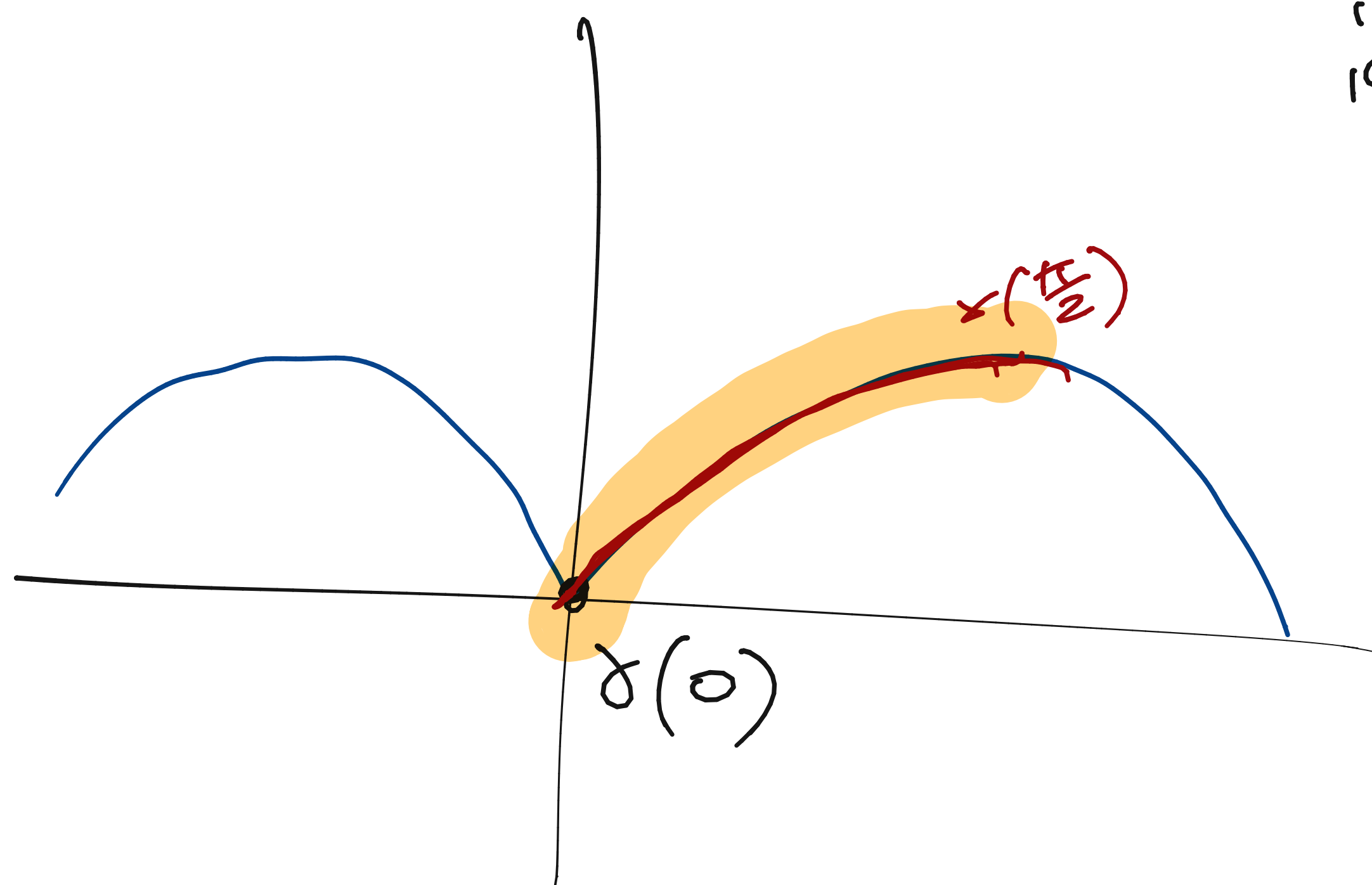
$$\gamma'(0) = (0,0) \quad \gamma'(t) = \left(2t, \frac{2t \sin t^2 \cos t^2}{|\sin t^2|} \right)$$

γ non è regolare

poniamo $x = t^2 = \gamma_1(t)$

$$\gamma_2(t) = |\sin t^2| = |\sin x| = y$$

$\gamma(x) = (x, |\sin x|)$ ha sostegno il grafico
di $|\sin x|$



$$\text{in } t \rightarrow \infty \quad x = t^2 \rightarrow \infty$$

$$y = |\sin x| = 0$$

$$\gamma: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = \left(t^2, |\sin t^2|\right)$$

$x > 0$ γ è pari

$\gamma: \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ parametrizza il pezzo rosso di grafico

$\gamma\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ La curva γ avendo per lo stesso sostegno in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow$ percorre lo stesso 2 volte.

per $t \leq 0$ si avvicina a $(0,0) = \gamma(0)$ e poi torna indietro su se stessa per $t > 0$ ripercorrendo e ritracciando il grafico precedente.

Lemma: Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare. Allora $\forall t \in (a,b) \exists$ un intorno I di t , $I \subseteq (a,b)$ tale che il sostegno di γ sull'intervallo I coincide con il grafico di una funzione f della variabile x oppure con il grafico di una funzione g di y .

dim.: γ è regolare quindi $\gamma'(t) \neq 0$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \quad \cdot \quad \gamma_1'(t) \neq 0 \quad \circ \quad \gamma_2'(t) \neq 0$$

Supponiamo $\gamma_1'(t) \neq 0$ e supponiamo > 0
(se < 0 dimostrazione analoga)

È un intorno di t , $I = (t-h, t+h)$, tale
che $\gamma_1'(s) > 0 \quad \forall s \in I$

γ_1 risulterà essere strettamente crescente in I ,
inoltre γ_1 è di classe C^1 quindi

$\gamma_1: I \rightarrow \mathbb{R}$ sarà invertibile, Sia $S: \gamma_1(I) \rightarrow I$
la funzione inversa che risulterà continua e
derivabile con $S'(x) = \frac{1}{\gamma_1'(S(x))} \quad \forall x \in \gamma_1(I)$

$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ avrà sostegno che coincide
con il sostegno della curva $\gamma \circ S: \gamma_1(I) \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\gamma \circ S(x) = (\gamma_1(S(x)), \gamma_2(S(x)))$

Essendo $S = \gamma_1^{-1} \Rightarrow \gamma_1(S(x)) = x$

$\gamma \circ S(x) = (x, \gamma_2(S(x)))$ definisco $f(x) = \gamma_2(S(x))$

$\gamma \circ S(x) = (x, f(x)) \Rightarrow \gamma \circ S$ è la curva con
sostegno il grafico di f
in $\gamma_1(I)$

$\Rightarrow \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha sostegno il grafico di f
nell'intervallo $\gamma_1(I)$.

Ora se $\gamma_1'(t) = 0 \Rightarrow \gamma_2'(t) \neq 0$

in questo caso $\exists J = (t-k, t+k)$ A.C.

$\gamma_2'(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$. Se $\gamma_2'(t) > 0 \quad \forall t \in J$

definisco $S: \gamma_2(J) \rightarrow J$ la funzione inversa
di $\gamma_2: J \rightarrow \gamma_2(J)$. Pongo

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

$$\gamma(s(y)) = (\gamma_1(s(y)), \gamma_2(s(y))) = (\gamma_1(s(y)), y)$$

$$\forall y \in \gamma_2(J) \Rightarrow \text{si ponga } g(y) = \gamma_1 \circ s(y)$$

ho che

$$\gamma(s(y)) = (g(y), y) \quad \text{che ha come sostegno}$$

il grafico $x = g(y)$ della funzione g .

Fine dimostrazione

Corollario per quanto osservato prima

se $\gamma = (x, f(x))$ allora $\gamma'(x)$ coincide

col vettore tangente a γ nel punto $\gamma(x)$

se γ è regolare allora $\forall t \in (a, b)$

$\exists I$ intorno di t tale che $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$

è delle forme $(x, f(x))$ oppure $(g(y), y)$

$\Rightarrow \gamma'(t)$ coincide col tangente a γ nel
punto $\gamma(t)$.

Def.: Siano $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h$ e $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^h$ due curve. Diremo che γ e σ sono equivalenti se $\exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ di classe $C^1([a, b])$ e bigettiva, tale che $p'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$ e

$$\gamma(t) = \sigma(p(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

La f. $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ può essere vista come un cambio di variabile (oppure come riparametrizzazione di γ)

Oss.: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h$ è una curva "parametrica" perché dipende dal parametro t .

s. $\{x^2 + y^2 = 1\}$ = circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

γ è una curva parametrica la cui sostegno è $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

Def.: Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h$ una curva regolare, allora definisco

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in (a, b)$$

si chiama vettore tangente a γ nel punto $\gamma(t)$.

Lemma Se γ è regolare ed γ' equivalente a σ allora

(i) Se $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ γ' crescente $\Rightarrow$

$$\tau_\gamma(t) = \tau_\sigma(p(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

(ii) Se $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ γ' decrescente $\Rightarrow$

$$\tau_\gamma(t) = -\tau_\sigma(p(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Inizio dimostrazione

Dim.: Supponiamo $p' > 0$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{ma anche } \gamma(t) = \sigma(p(t))$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) = \sigma'(p(t)) p'(t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \|\sigma'(p(t))\| p'(t)$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\sigma'(p(t)) p'(t)}{\|\sigma'(p(t))\| p'(t)} = \frac{\sigma'(p(t))}{\|\sigma'(p(t))\|} = \tau_\sigma(p(t))$$

Se invece $p' < 0$ avrei avuto

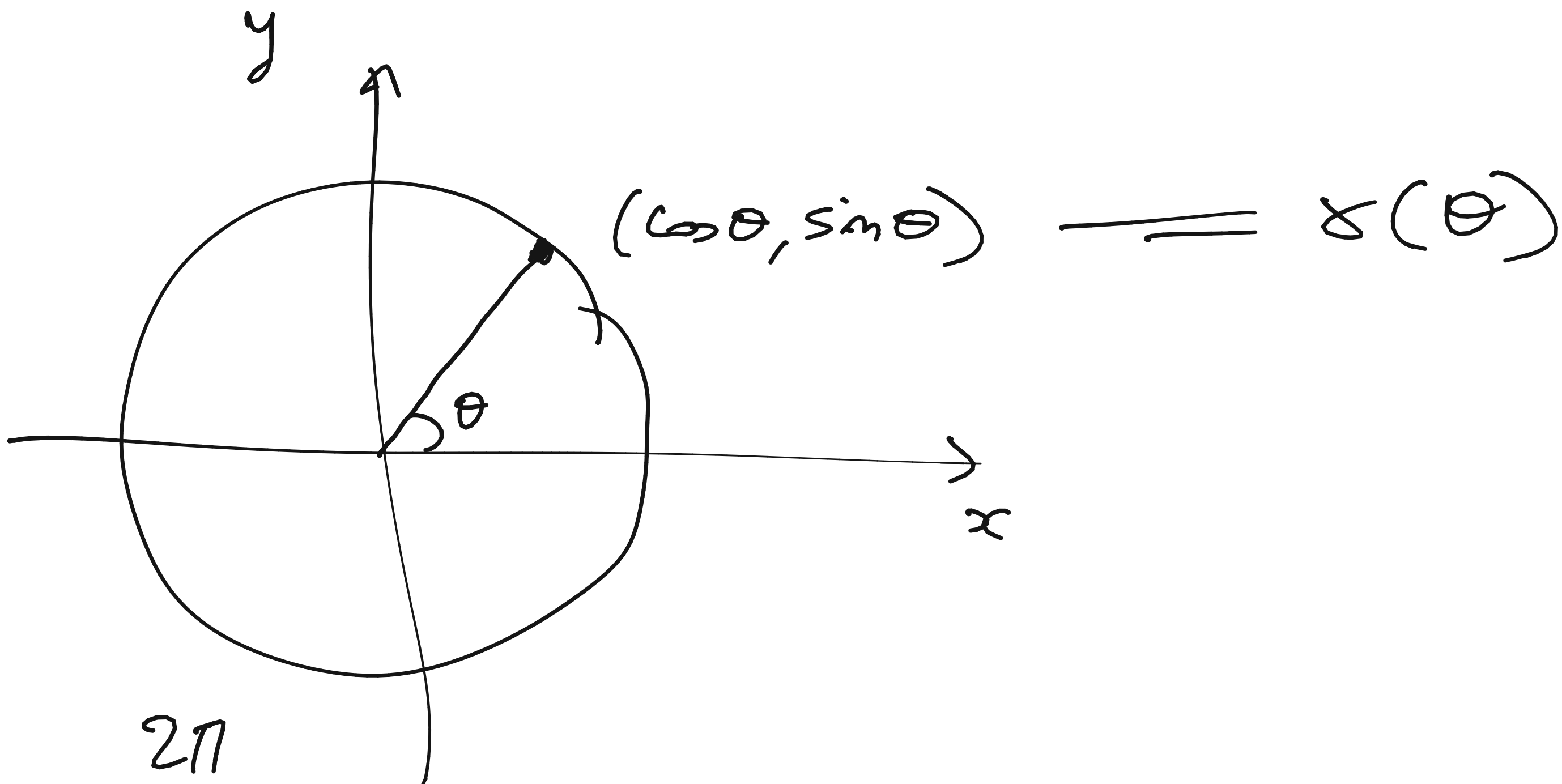
$$\begin{aligned} \tau_\gamma(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\sigma'(p(t)) p'(t)}{\|\sigma'(p(t))\| |p'(t)|} = - \frac{\sigma'(p(t))}{\|\sigma'(p(t))\|} = \\ &= -\tau_\sigma(p(t)) \end{aligned}$$

□

Def.: Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare
Allora la lunghezza di γ è il valore

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

esempio prendiamo la curva $\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$
data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt \quad \text{dove}$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

esempio 2 $\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $P, Q \in \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = P + t(Q - P)$$

$r(t) = P + t(Q - P)$ è la retta parametrica
passante per P e direzione il vettore $Q - P$

$$r(1) = Q \quad r(0) = P$$

Se $t \in [0, 1)$ $\Rightarrow \gamma(t)$ è un punto
sulla retta passante per P e Q

me compreso tra P e Q

$\gamma(t)$ parametrizza il segmento $\overline{PQ}$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\gamma'(t) = Q - P \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \|Q - P\|$$

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|Q - P\| dt = \|Q - P\|$$

$= \text{lung. del segmento } \overline{PQ}$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\} = P$$

γ è una parametrizzazione di P

e γ dipende da un parametro t

$\gamma(t)$ si muove tutta la curva P

$\Rightarrow \gamma$ è una corrispondenza biunivoca tra
il suo dominio $[a, b]$ e il sostegno della
curva

Proposizione Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^h$ una
curva regolare allora

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \geq \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$$

$\gamma(b)$ è il punto finale della curva

$\gamma(a)$ è il punto iniziale

Dim.:

Primo caso

1° caso

$\gamma(a) = \gamma(b)$

è ovvio perché

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \geq 0 = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$$

Secondo caso

2° caso

$\gamma(a) \neq \gamma(b)$

b

$$\Rightarrow \gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt$$

Se $v \in \mathbb{R}^n$ allora

$$\begin{aligned}
 \bullet (\gamma(b) - \gamma(a)) \cdot v &= v \cdot \int_a^b \gamma'(t) dt = \\
 &= \int_a^b \gamma'(t) \cdot v dt \leq \\
 &\leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \|v\| dt \\
 &= \|v\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt
 \end{aligned}$$

essendo vero $\forall v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ è vero $v = \gamma(b) - \gamma(a)$

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2 \leq \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \cdot \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

divido ambo i membri per $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \neq 0$

ottenendo la tesi.

Fine dimostrazione

□

$$\left(\int \gamma'(t) dt \right) = \begin{pmatrix} \int_a^b \gamma'_1(t) dt \\ \int_a^b \gamma'_2(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b \gamma'_n(t) dt \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 V \cdot \int \gamma'(t) dt &= \sum_{i=1}^n V_i \int_a^b \gamma_i'(t) dt \\
 &= \int_a^b \sum_{i=1}^n V_i \gamma_i'(t) dt \\
 &= \int_a^b V \cdot \gamma'(t) dt
 \end{aligned}$$

oss.: se $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt$

la proposizione precedente è equivalente

$$\left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Lemma 2 Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 con γ e σ equivalenti $\Rightarrow L(\gamma) = L(\sigma)$

Inizio dimostrazione

dim.: $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, inoltre

σ e γ equiv. e $\gamma \Rightarrow \exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ A.C.

$\gamma(t) = \sigma(p(t)) \quad \forall t \in [a, b] \Rightarrow$

$\gamma'(t) = \sigma'(p(t)) \cdot p'(t)$

• Supponiamo $p'(t) > 0$

$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\sigma'(p(t)) p'(t)\| dt$

$= \int_a^b \|\sigma'(p(t))\| p'(t) dt = \int_c^d \|\sigma'(s)\| ds$
 $(s = p(t))$
 $ds = p'(t) dt$

$$= \int_c^d \|\sigma'(s)\| ds$$

$$= L(\sigma)$$

$$p(a) = c$$

$$p(b) = d$$

Supponiamo $p'(t) < 0 \Rightarrow \left| p'(t) \right| = -p'(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} p(a) = d \\ p(b) = c \end{array} \right.$

$$L(\sigma) = \int \|\sigma'(p(t)) p'(t)\| dt$$

$$= - \int_a^b \|\sigma'(p(t))\| p'(t) dt$$

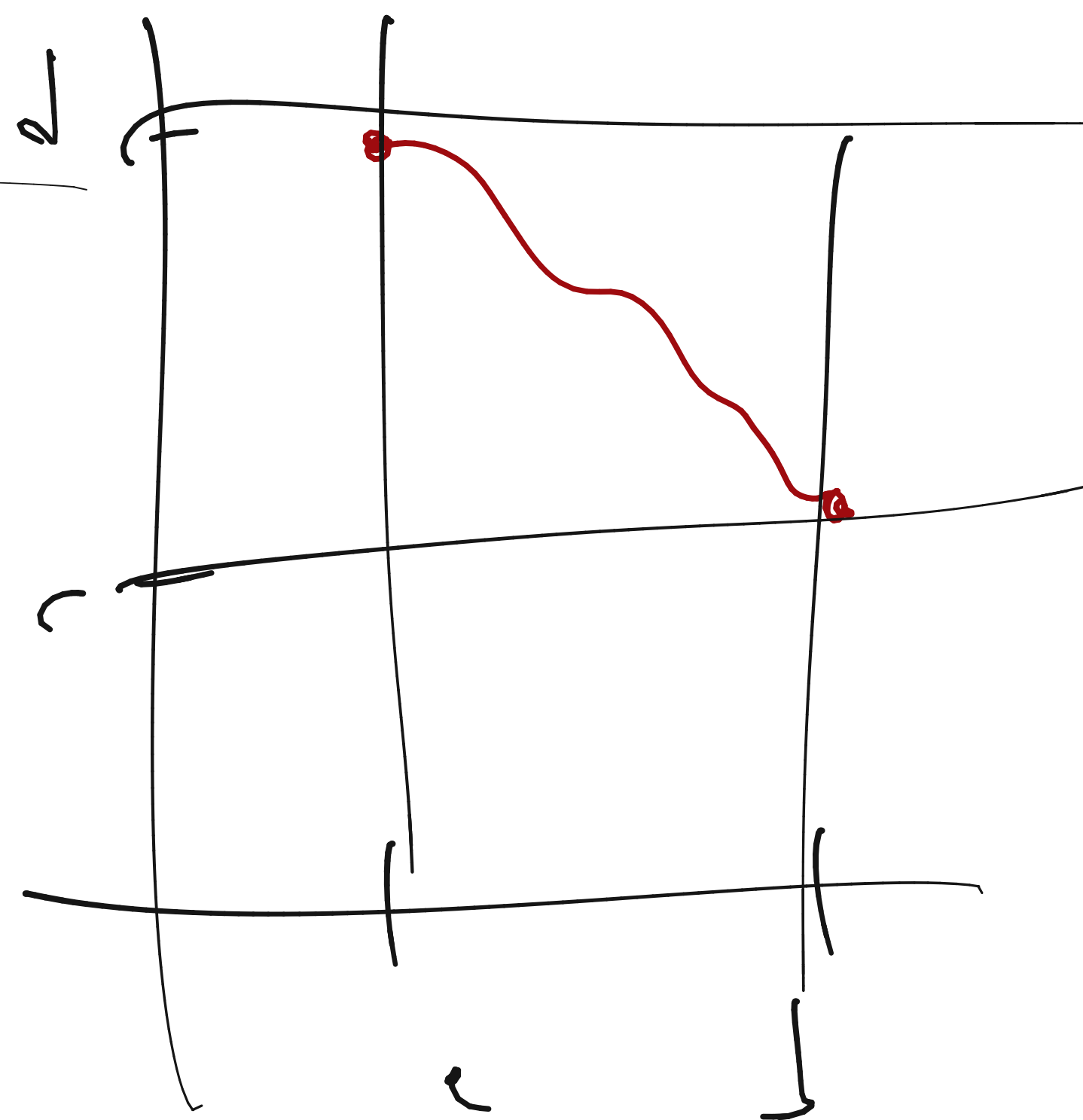
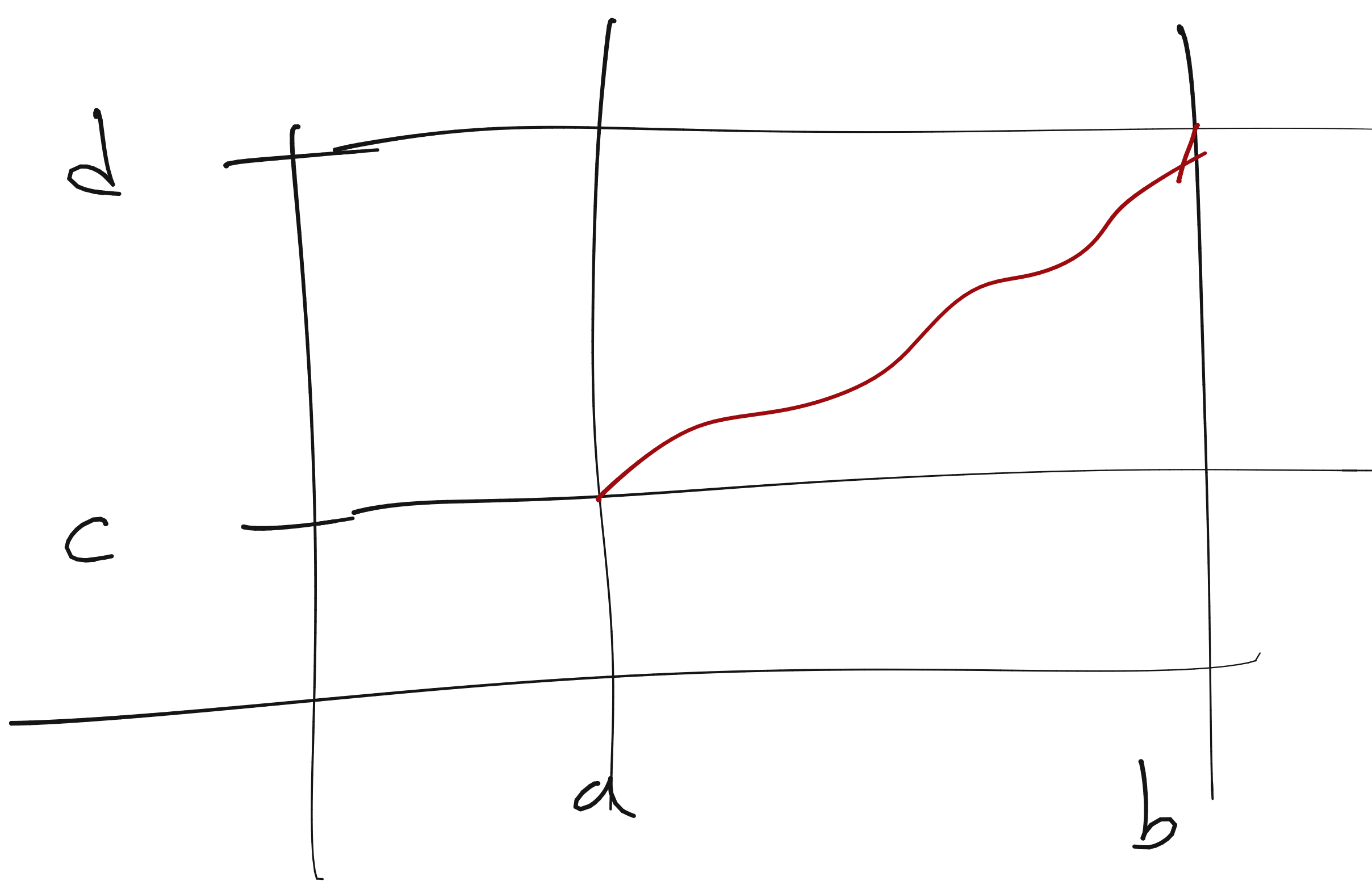
$$= - \int_d^c \|\sigma'(s)\| ds = \int_c^d \|\sigma'(s)\| ds = L(\sigma)$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R}^h$$

Fine dimostrazione

□



Def.: Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Sia $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ una partizione di $[a, b]$.

Definiamo la spezzata σ di vertici $\gamma(t_i)$ la curva definita come

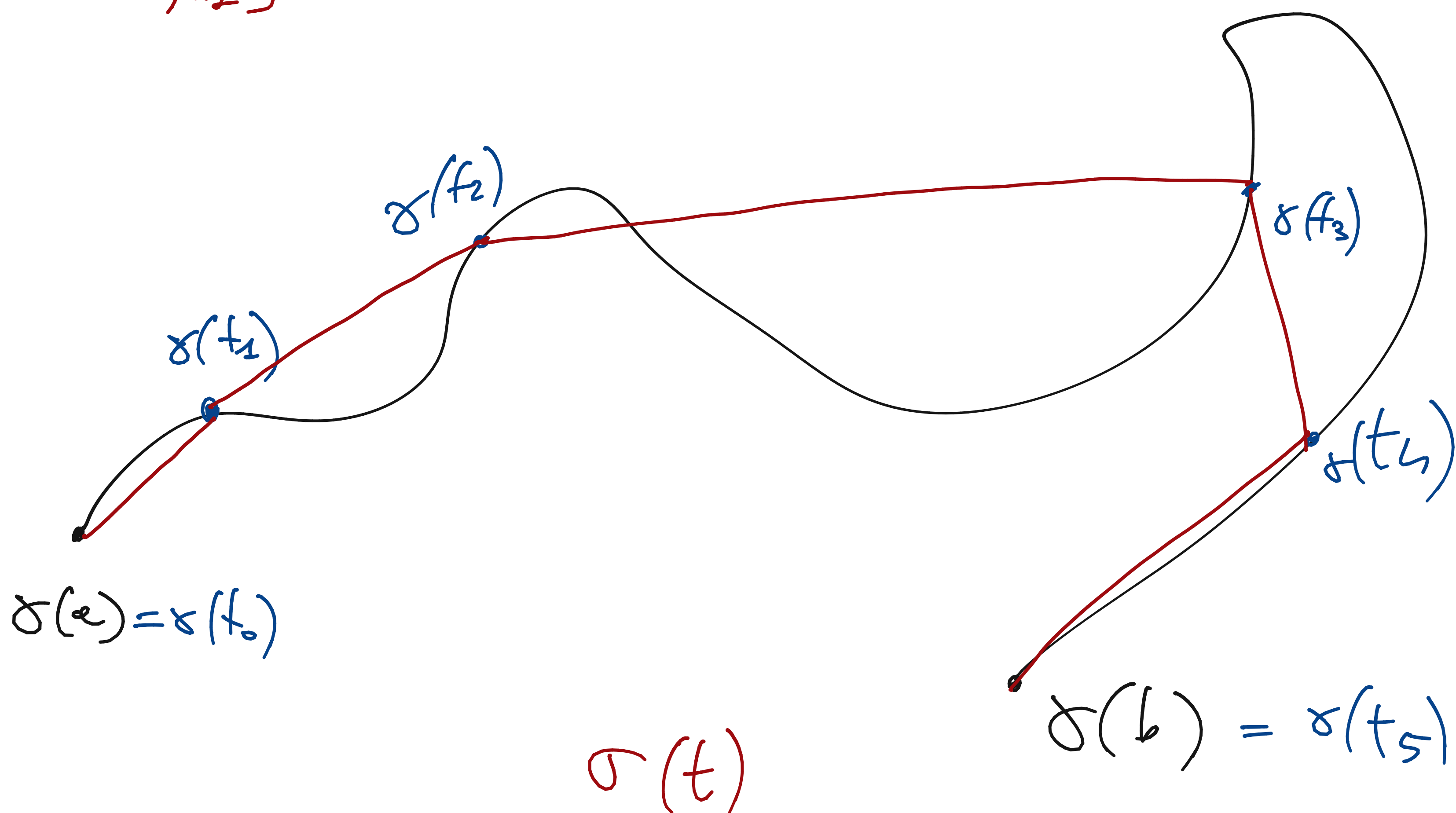
$$\sigma(t) = \gamma(t_i) + \frac{(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i} (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

se $t \in [t_i, t_{i+1}]$
 $\forall i = 0, \dots, k-1$.

Quella appena scritta è una parametrizzazione del segmento $\overline{\gamma(t_i) \gamma(t_{i+1})}$

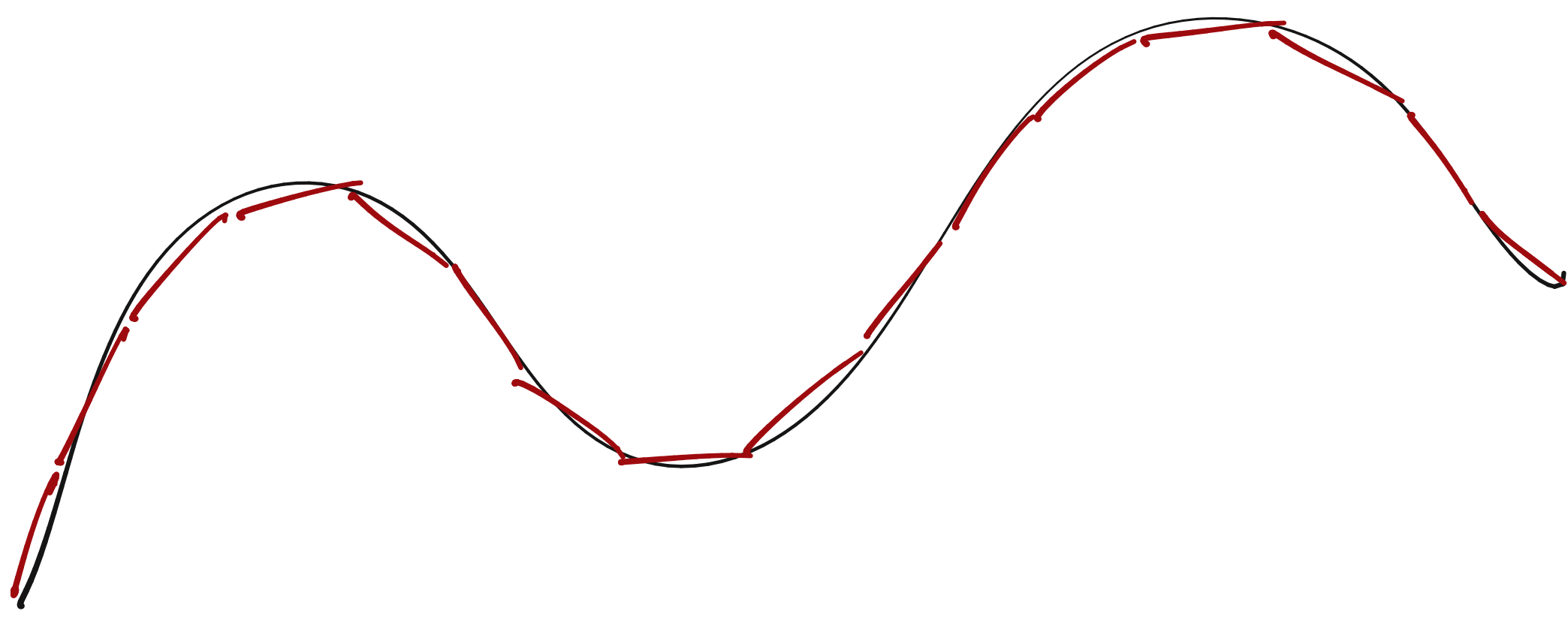
($\Rightarrow$ è una curva che dipende dal parametro $t \in [t_i, t_{i+1}]$ e ha come sostegno $\overline{\gamma(t_i) \gamma(t_{i+1})}$)

$t \in [t_0, t_1] \quad \sigma \rightarrow \overline{\gamma(t_0) \gamma(t_1)}$



σ è la spezzata

γ —————



Teorema: Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare.
se σ è una qualsiasi spezzata di estremi $\gamma(t_0), \gamma(t_2) \dots \gamma(t_k)$

allora $L(\gamma) \geq L(\sigma)$

È anche vero che $L(\gamma) = \sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma)$

dove con $\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{tutte le possibili spezzate costruite} \\ \text{su } \gamma \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow$ l'estremo superiore è fatto su tutte le
spezzate σ che posso costruire a partire
da γ .

σ dipende dalla partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

$\Leftrightarrow$ data una partizione $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$
ho automaticamente una spezzata
quindi:

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) = \sup \left\{ L(\sigma) : \begin{array}{l} t_0 < t_1 < \dots < t_k \\ \gamma \text{ è una partizione} \\ \text{di } [a, b] \end{array} \right\}$$

$$L(\sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

oss.: La lung. di una curva regolare è

tratti e le somme delle lunghezze delle curve mi vari tratti

Lemma: Sia $v: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^h$ continua e sia $\tau \in (\alpha, \beta)$ fissato. Allora

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right\| \geq \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t)\| dt - 2 \int_{\alpha}^{\beta} \|v(t) - v(\tau)\| dt$$

Dato per buono questo lemma dimostriamo il

teorema.

Dim.: $L(\sigma) = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma'(t)\| dt =$

Inizio dimostrazione del teorema

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\|$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\geq \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = L(\sigma)$$

Per dimostrare che $\sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) = L(\gamma)$

utilizziamo il fatto che γ è regolare $\Rightarrow \gamma'$ è continua in $[a, b] \Rightarrow$ unif. continua

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } |t-s| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| \leq \varepsilon$$

Fissato $\varepsilon > 0$ scegli una partizione di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b \text{ tal che}$$

$$x_{i+1} - x_i < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x'(t) - x'(s)\| \leq \varepsilon \\ \forall t, s \in [x_i, x_{i+1}]$$

Per il lemma precedente abbiamo

$$\left\| \int_{x_i}^{x_{i+1}} x'(t) dt \right\| = \|x(x_{i+1}) - x(x_i)\| \geq \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|x'(t)\| dt - 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|x'(t) - x'(\tau)\| dt$$

dove $\tau \in (x_i, x_{i+1})$ qualsiasi. $\Rightarrow$

$$\geq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|x'(t)\| dt - 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon dt$$

$$\|x(x_{i+1}) - x(x_i)\| \geq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|x'(t)\| dt - 2\varepsilon(x_{i+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} \|x(x_{i+1}) - x(x_i)\| \geq \left(\sum_{i=0}^{K-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|x'(t)\| dt \right) - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\|L(\sigma) \geq L(x) - 2\varepsilon(b-a)$$

Abbiamo saputo che da una parte

$$\bullet) L(\sigma) \leq L(x) \quad \forall \sigma \in \Sigma \Rightarrow \boxed{\sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) = L(x)}$$

e $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ una spezzata $\sigma \in \Sigma$

tale che

$$\bullet) \underline{L(\sigma)} \geq L(x) - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) \geq L(\gamma) - 2\varepsilon(L-a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) \geq L(\gamma)$$

Le due ip. precedenti $\Rightarrow \sup_{\sigma \in \Sigma} L(\sigma) = L(\gamma)$

Fine dimostrazione teorema

□

Esempio Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$

e definiamo la curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

come $\gamma(t) = (t, f(t))$ in $\mathbb{R}^{m+1}$ di classe $\mathcal{C}^1([a, b]) \Rightarrow \gamma$ risulta essere regolare

$$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

Diremo che γ è una parametrizzazione del grafico di f . [già visto se $m=1$]

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + |f_1'(t)|^2 + |f_2'(t)|^2 + \dots + |f_m'(t)|^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \|f'(t)\|^2} dt \end{aligned}$$

o) Curve espresse in coordinate polari $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$$

come si calcolano le lunghezze delle curve? γ espressa in coordinate cartesiane

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$$

Da una curva γ in coordinate polari

significa dire $\gamma(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t))$

$\Rightarrow$ oppure $\rho: [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$ $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\gamma_1(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \quad \gamma_2(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = (\rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \sin \theta(t) \theta'(t), \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \cos \theta(t) \theta'(t))$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\rho'(t)^2 \cos^2 \theta(t) + \rho(t)^2 \theta'(t)^2 \sin^2 \theta(t) - 2 \rho'(t) \rho(t) \theta'(t) \cos \theta(t) \sin \theta(t) + \rho'(t)^2 \sin^2 \theta(t) + \rho(t)^2 \theta'(t)^2 \cos^2 \theta(t) + 2 \rho'(t) \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \right)$$

$$= \rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2} dt$$

$\square$