

## Superficie

Dati due vettori  $a, b \in \mathbb{R}^3$  denotiamo con  
 $a \wedge b = a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$   
 $a = (a_1, a_2, a_3) \quad b = (b_1, b_2, b_3)$

$$\Rightarrow a \wedge b \in \mathbb{R}^3$$

Per ricordarsi  $a \wedge b$  si può calcolare il det

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{pmatrix} = i(a_2 b_3 - b_2 a_3) + j(a_3 b_1 - a_1 b_3) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a \wedge b$$

### Proprietà del prodotto vettoriale

Qualche proprietà

$$1. \quad a \wedge b = -b \wedge a$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda a) \wedge b = \lambda (a \wedge b)$$

e come conseguenza

$$a \wedge a = (0, 0, 0)$$

$$\lambda a \wedge a = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \text{se } a \text{ e } b \text{ sono paralleli} \Rightarrow a \wedge b = (0, 0, 0)$$

$$2. \quad a \wedge b = 0 \Rightarrow a \text{ e } b \text{ sono paralleli}$$

Per mostrare queste proprietà possiamo sfruttare il fatto che

1.  $a, b \in \mathbb{R}^3$  non nulli e  $a \wedge b = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 b_2 = a_2 b_1 \\ a_1 b_3 = a_3 b_1 \\ a_2 b_3 = a_3 b_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

nelle 'hp che  $a_i \neq 0$

$$\Rightarrow b = \lambda a \quad \text{dove } \lambda = \frac{b_i}{a_i}$$

nel caso in cui qualcuno degli  $a_i = 0$

i conti si semplificano ulteriormente (esercizio)

3. Se  $a, b, c \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (a \wedge b) \cdot c = (b \wedge c) \cdot a = (c \wedge a) \cdot b$

(esercizio)

$$\Rightarrow (a \wedge b) \cdot a = (b \wedge a) \cdot a = (a \wedge a) \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow (a \wedge b) \text{ è ortogonale ad } a$$

$$(a \wedge b) \text{ è ortogonale a } b$$

$$\Rightarrow (a \wedge b) \text{ è ortogonale sia ad } a \text{ che a } b.$$

Def.: Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e connesso limitato

Denotiamo con  $K = \overline{A}$

Una funzione  $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  si dice superficie parametrica se gode delle seguenti proprietà

①  $\varphi$  è di classe  $C^1(A)$

②  $\varphi$  è iniettiva su  $A$

③  $\varphi$  è continua su  $K$

$\varphi$  si dice regolare e inoltre vale

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \neq 0 \quad \text{in tutto } A.$$

Il sostegno della superficie è l'immagine di  $K$  attraverso  $\varphi$ .  $\varphi(K)$

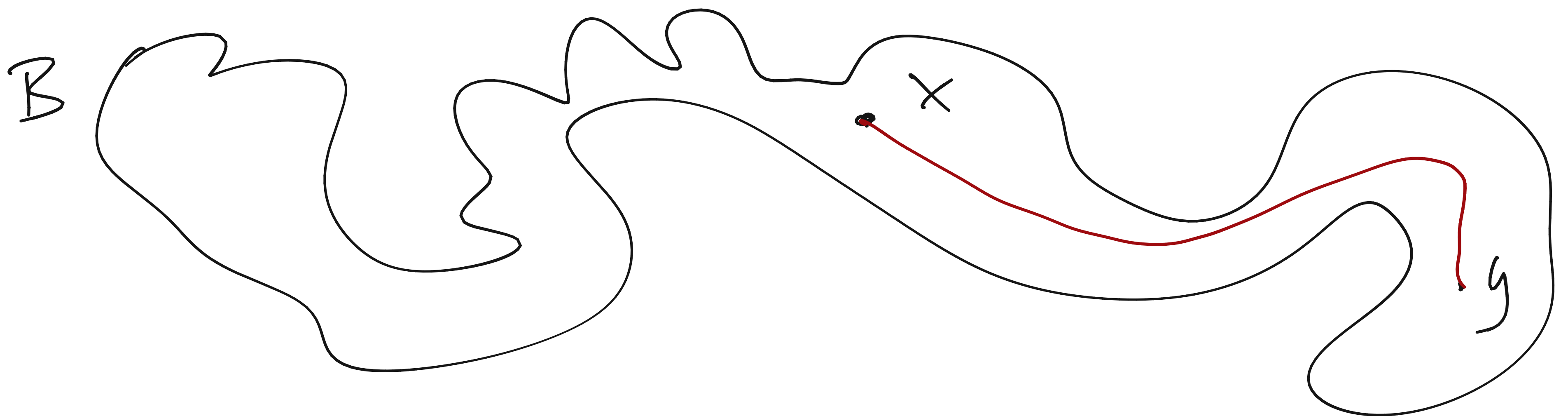
---

Def.:  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto si dice disconnesso se  $\exists U, V$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  tali che  $U \cap V = \emptyset$   
 $U \cup V = A$

Se  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  qualsiasi si dice disconnesso se  $\exists U, V$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  con  $U \cap V = \emptyset$  tali che  $(U \cap B) \cup (V \cap B) = B$

$B$  è connesso se non è disconnesso.

Def.  $B$  si dice connesso per archi se  $\forall x, y \in B \quad \exists \sigma: [0, 1] \rightarrow B$  continua tale che  $\sigma(0) = x \quad \sigma(1) = y$



Questa nozione (connesso per archi) implica

le convenzioni, ma il risultato in realtà è falso.

Def.: Si definisce l'area di una superficie riparametrizzata  $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  come

$$\int_K \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx dy = A(\varphi)$$

Esempio:  $\varphi: K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, y)\| &= \left( \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \right)^{1/2} \\ &= \left( \cos^2 y + \sin^2 y \right)^{1/2} = 1 \quad \forall x, y \in K \end{aligned}$$

quindi il punto  $\varphi(x, y) \in \mathbb{R}^3$  si trova sulle sfere di raggio 1 centrate nell'origine.

Viceversa, usando coordinate sferiche, vi accorgete che  $\forall P \in$  sfere di raggio 1 centrate nell'origine corrispondono delle coordinate  $(x, y) \in K$  t.c.

$$P = \varphi(x, y)$$

$\Leftrightarrow$  il sistema  $\varphi(K)$  di  $\varphi$  è le sfere di raggio 1 centrate nell'origine

$$\varphi(K) = S^2$$

$S^n$  è la sfera di raggio 1, centrata in 0 in  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

...

①  $\varphi$  è di classe  $C^1$  in  $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

②  $\varphi$  è iniettiva in  $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

③  $\varphi$  è continua in  $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

inoltre  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (-\sin x \cos y, \cos x \cos y, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = (-\cos x \sin y, -\sin x \sin y, \cos y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & \cos x \cos y & 0 \\ -\cos x \sin y & -\sin x \sin y & \cos y \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

$$= -\cos y (-j \sin x \cos y - i \cos x \cos y)$$

$$+ k (\sin^2 x \cos y \sin y + \cos^2 x \sin y \cos y)$$

$$= (\cos x \cos^2 y, \sin x \cos^2 y, \sin y \cos y)$$

$$\begin{aligned} \|(\dots)\| &= (\cos^2 x \cos^4 y + \sin^2 x \cos^4 y + \sin^2 y \cos^2 y)^{1/2} \\ &= (\cos^4 y + \sin^2 y \cos^2 y)^{1/2} \\ &= (\cos^2 y)^{1/2} = |\cos y| \neq 0 \\ &\quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \int \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos y \, dx dy = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

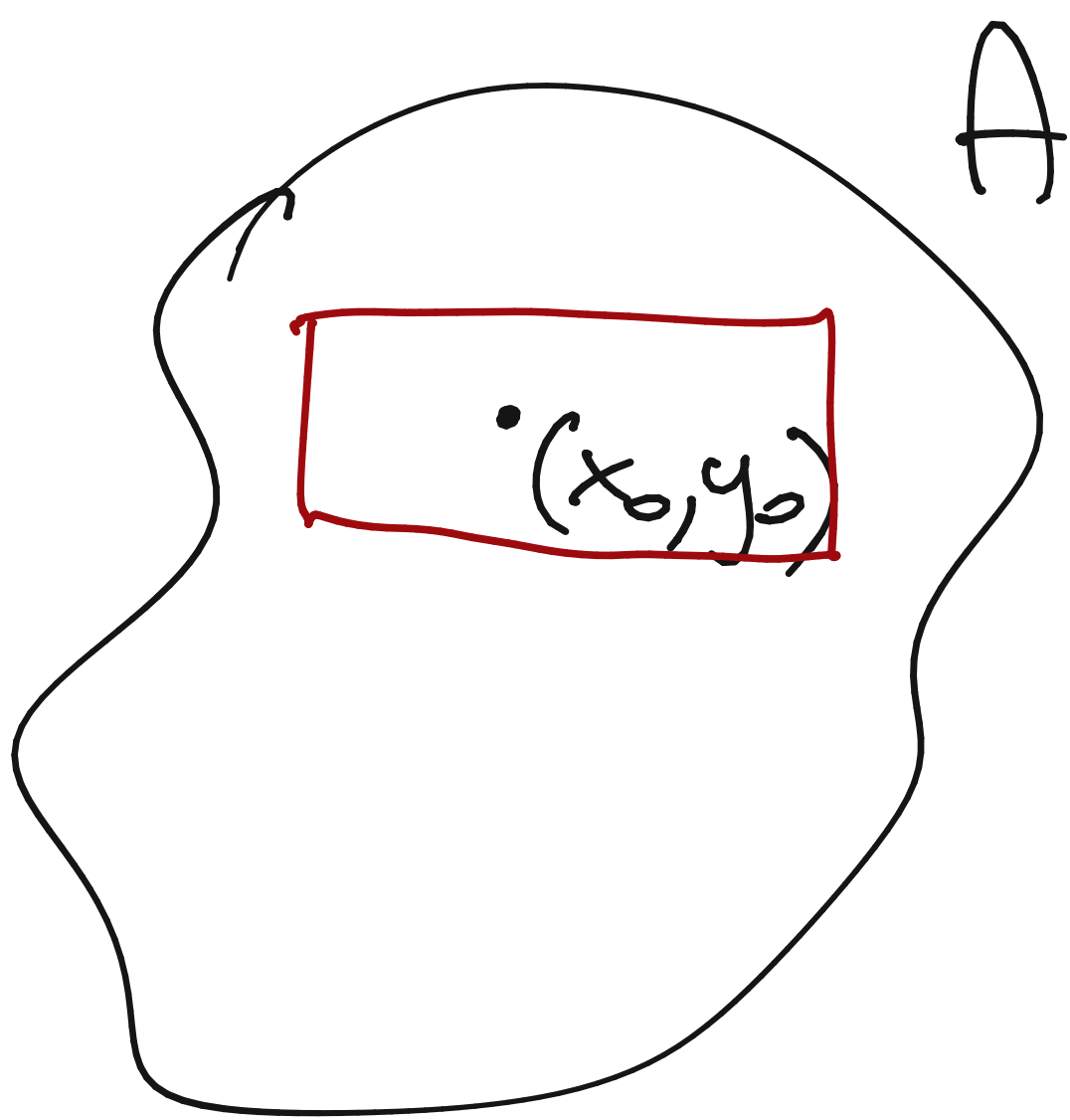
coincide con l'area della sfera  $S^2$ .

---

Per le curve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  abbiamo osservato che  $\gamma$  è regolare quando calcoliamo,  $t \in (a, b)$   $\gamma'(t)$  è tangente alla curva nel punto  $\gamma(t)$ .

$\varphi: K = \overline{A} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  superficie regolare

prendiamo un punto  $(x_0, y_0) \in A$



e consideriamo un rettangolo

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$$

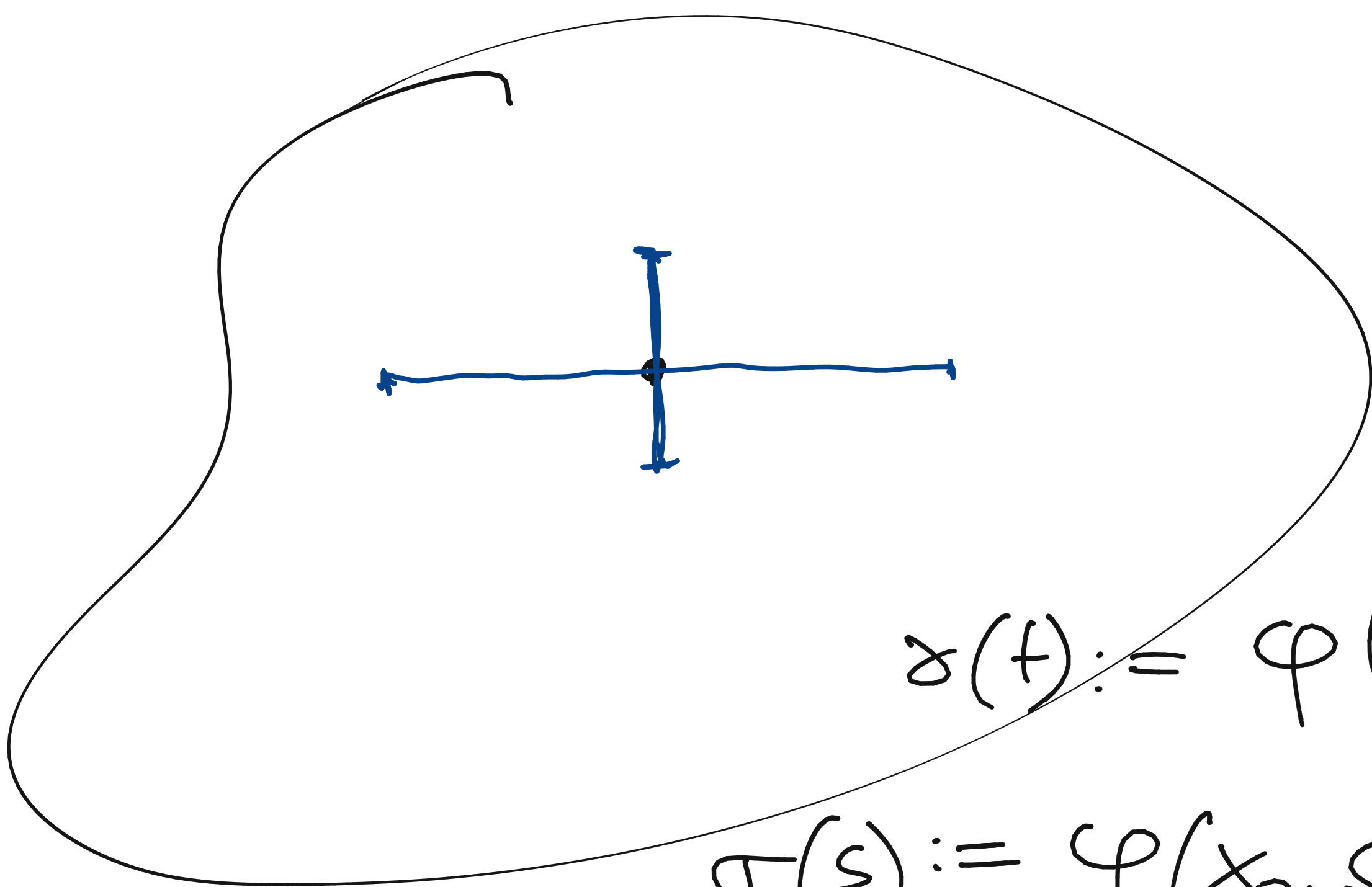
che sia tutto contenuto in  $A$

Sarebbe anche vero che

i segmenti  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \{y_0\}$

e  $\{x_0\} \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$

sono contenuti in  $A$



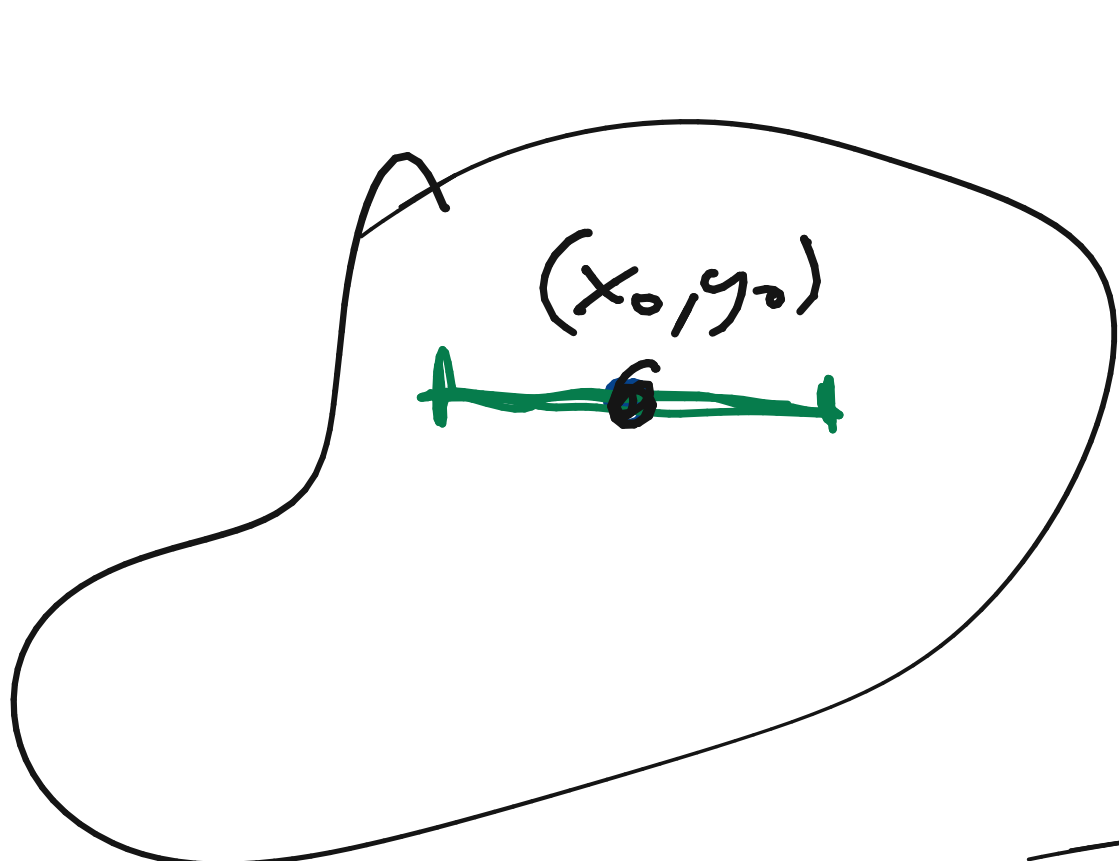
$A$

Considero  $\varphi$  ristretta  
ai due segmenti

$$\gamma(t) := \varphi(t, y_0) \text{ con } t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

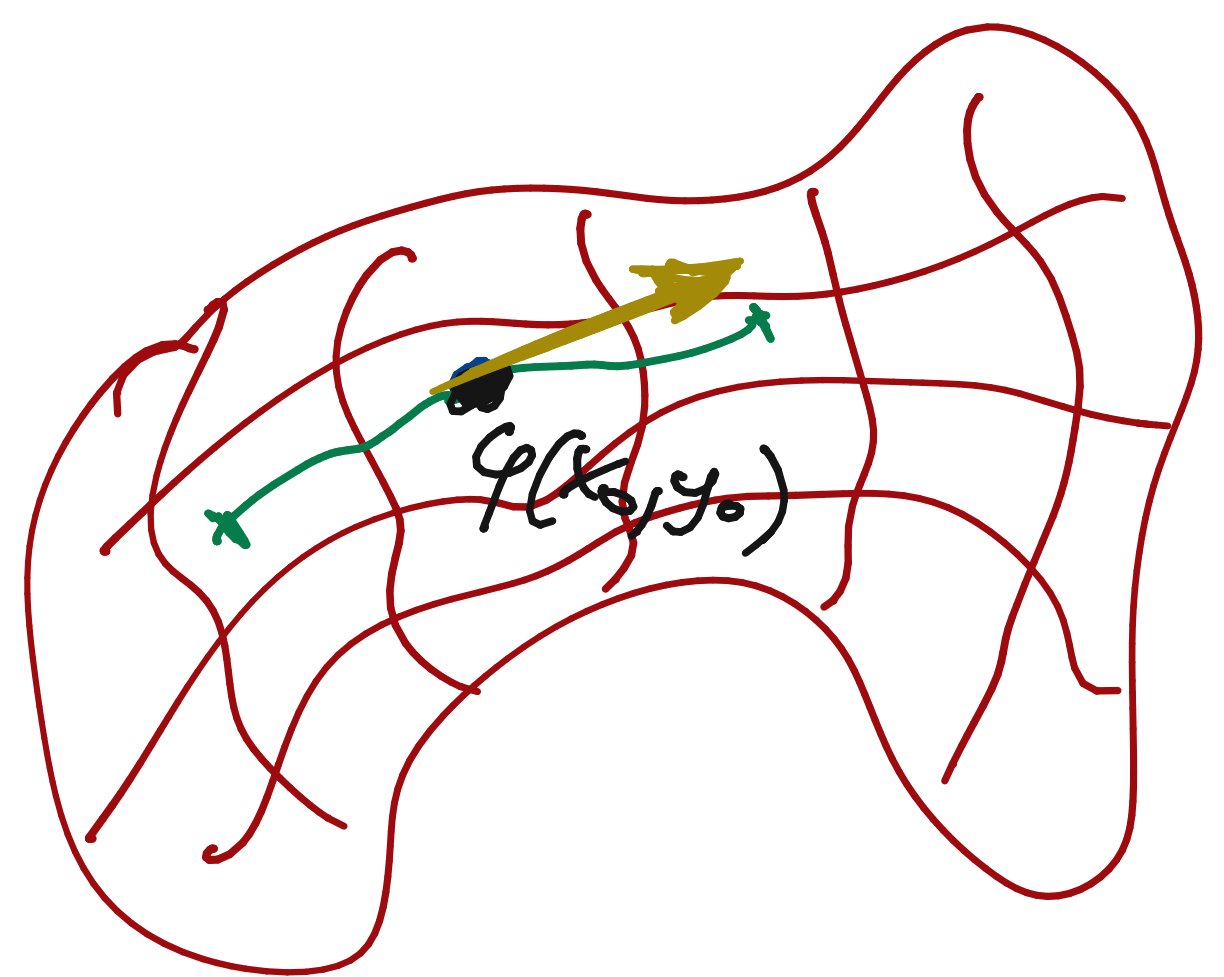
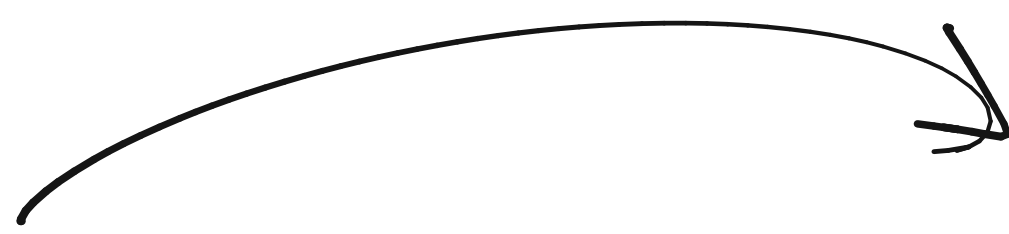
$$\sigma(s) := \varphi(x_0, s) \text{ con } s \in [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$$

entrambe le curve hanno sostegno sul  
sostegno di  $\varphi$ .



$A$

$\varphi$



$$\begin{aligned} \gamma(x_0) &= \varphi(x_0, y_0) \\ \sigma(y_0) &= \varphi(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x, y_0) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y_0) \end{aligned}$$

$$\sigma'(s) = \frac{d}{ds} \varphi(x_0, s) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, s)$$

$$\Rightarrow \sigma'(x_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\sigma'(y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Segue che  $\sigma'(x_0)$  è tangente a  $\sigma$  nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$

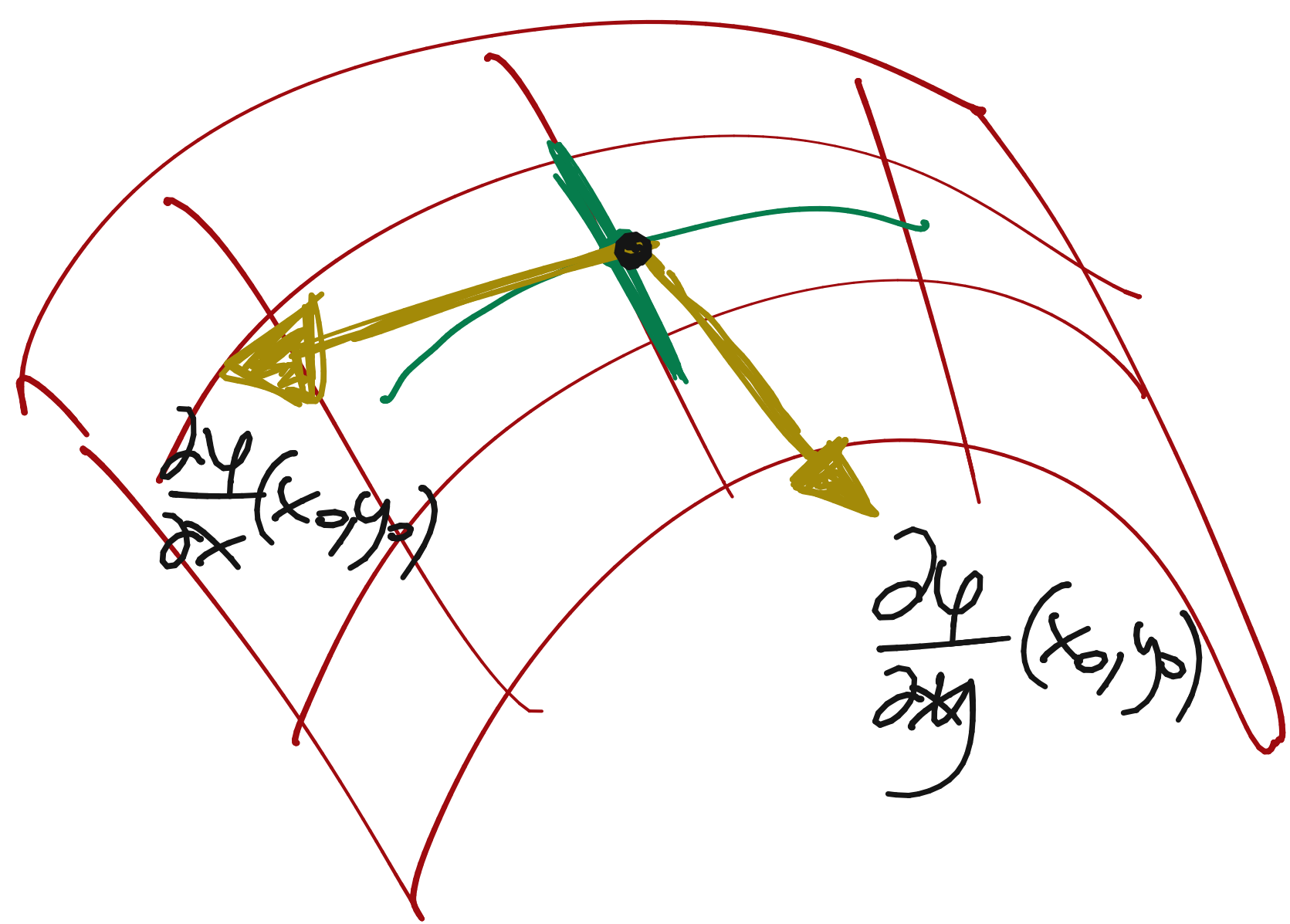
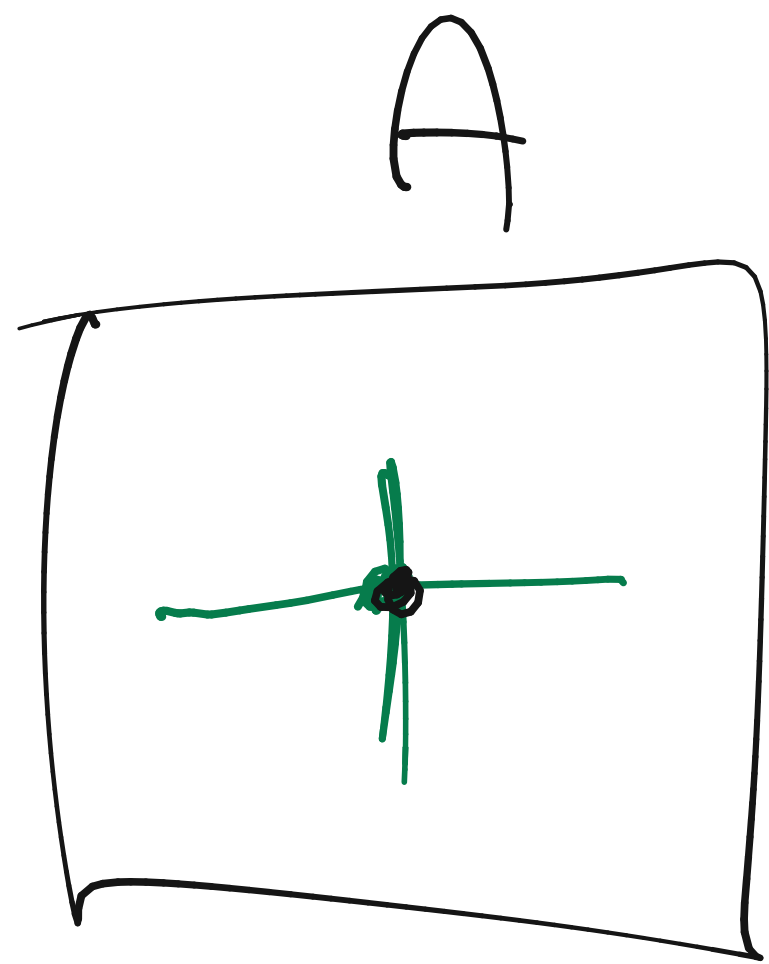
$\sigma'(y_0)$  è tangente a  $\sigma$  nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \sigma'(x_0)$  è tangente alla superficie in  $\varphi(x_0, y_0)$  e similmente lo è  $\sigma'(y_0)$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$  sono vettori tangenti alla superficie nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$

Se  $\varphi$  è regolare  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$

non è il vettore nullo  $\Rightarrow$  esso è ortogonale alla superficie



In altre parole i vettori  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$  identificano il piano tangente alla superficie nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$ . Se  $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$  posto

$$\begin{aligned} \Pi(t, s) = \varphi(x_0, y_0) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \\ + s \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

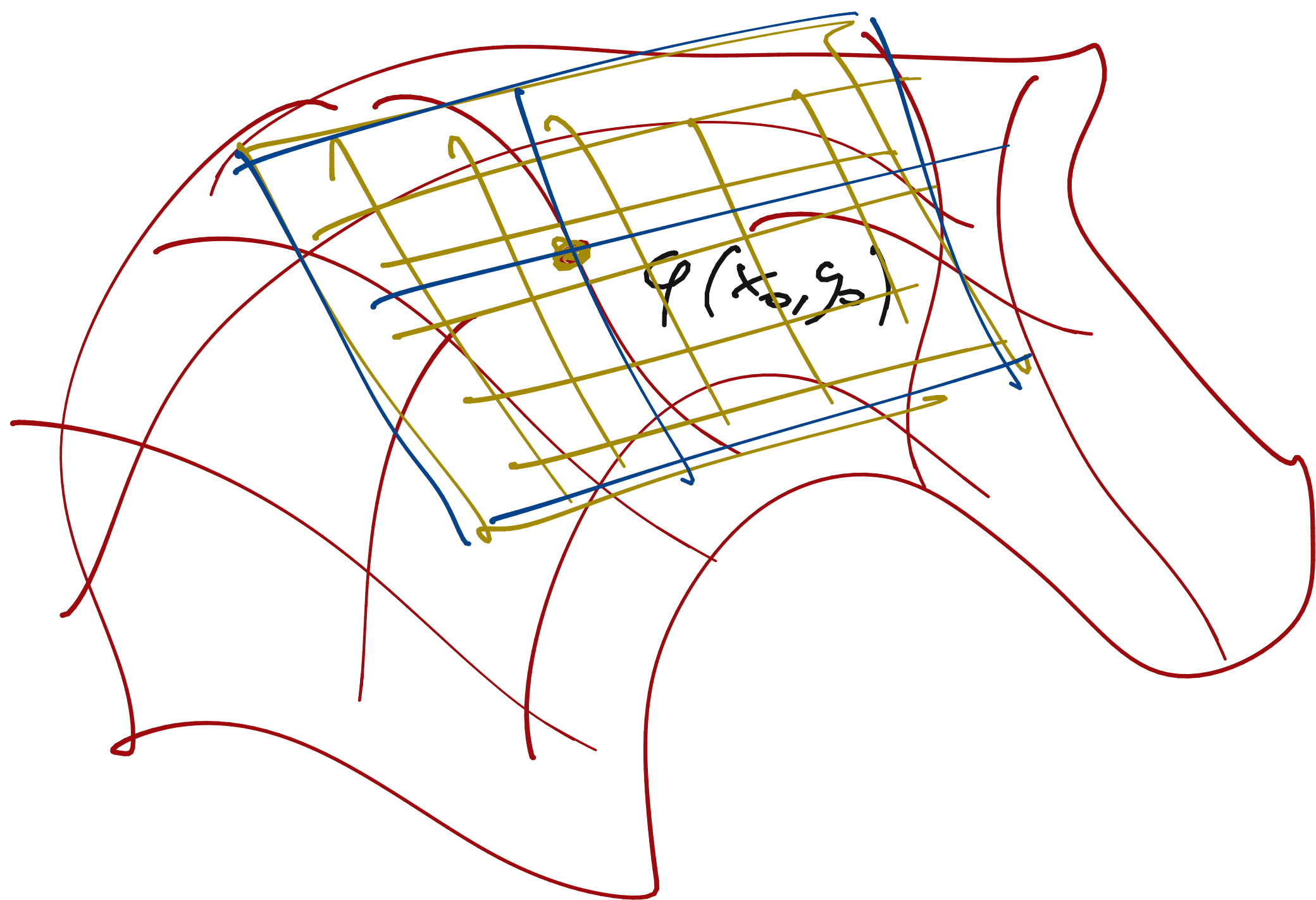
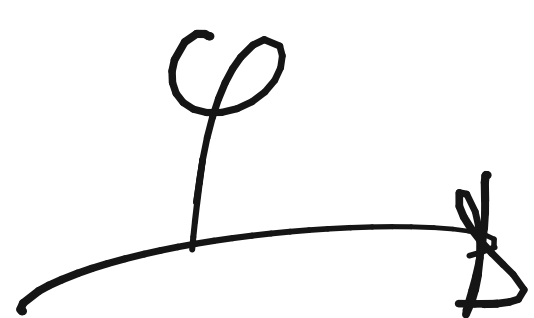
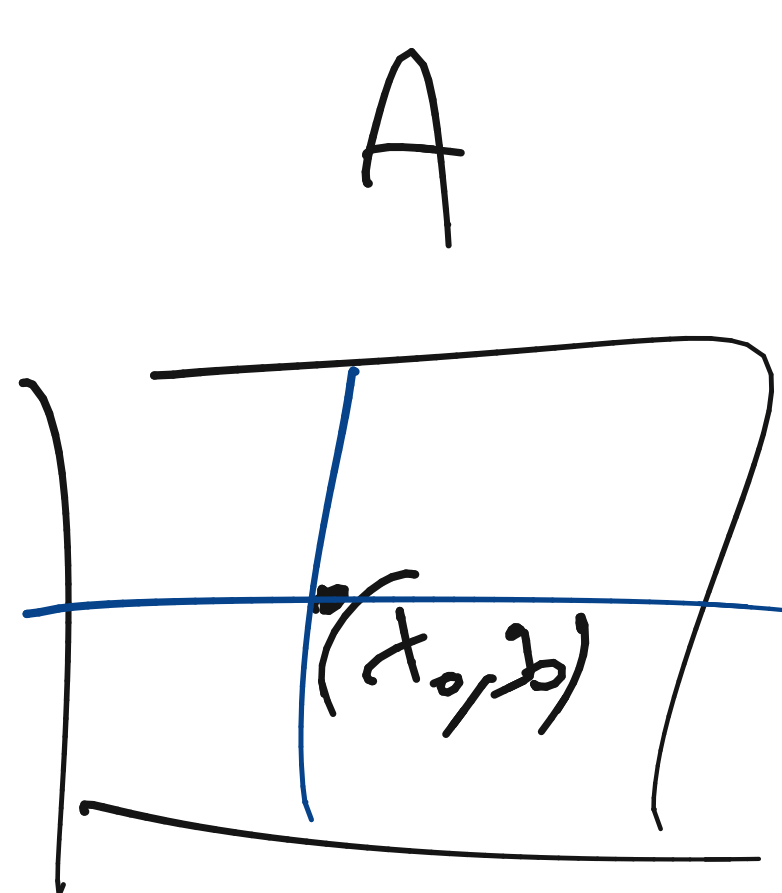
$\Pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\Pi$  è una mappa (superficie) che ha come sostegno il piano passante per  $\varphi(x_0, y_0)$  e contenente le rette parametriche  $r(t) =$

$$= \varphi(x_0, y_0) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\text{e } \varphi(s) = \varphi(x_0, y_0) + s \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

che sono le due rette tangenti a  $\varphi$  nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$

$\Pi$  ha come sostegno il piano  
tangente alla superficie nel punto  $\varphi(x_0, y_0)$



$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$  sono tangenti a  $\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$  è ortogonale

al piano  $\Pi$  e quindi anche alla  $\varphi$ .  
nel pto  $\varphi(x_0, y_0)$

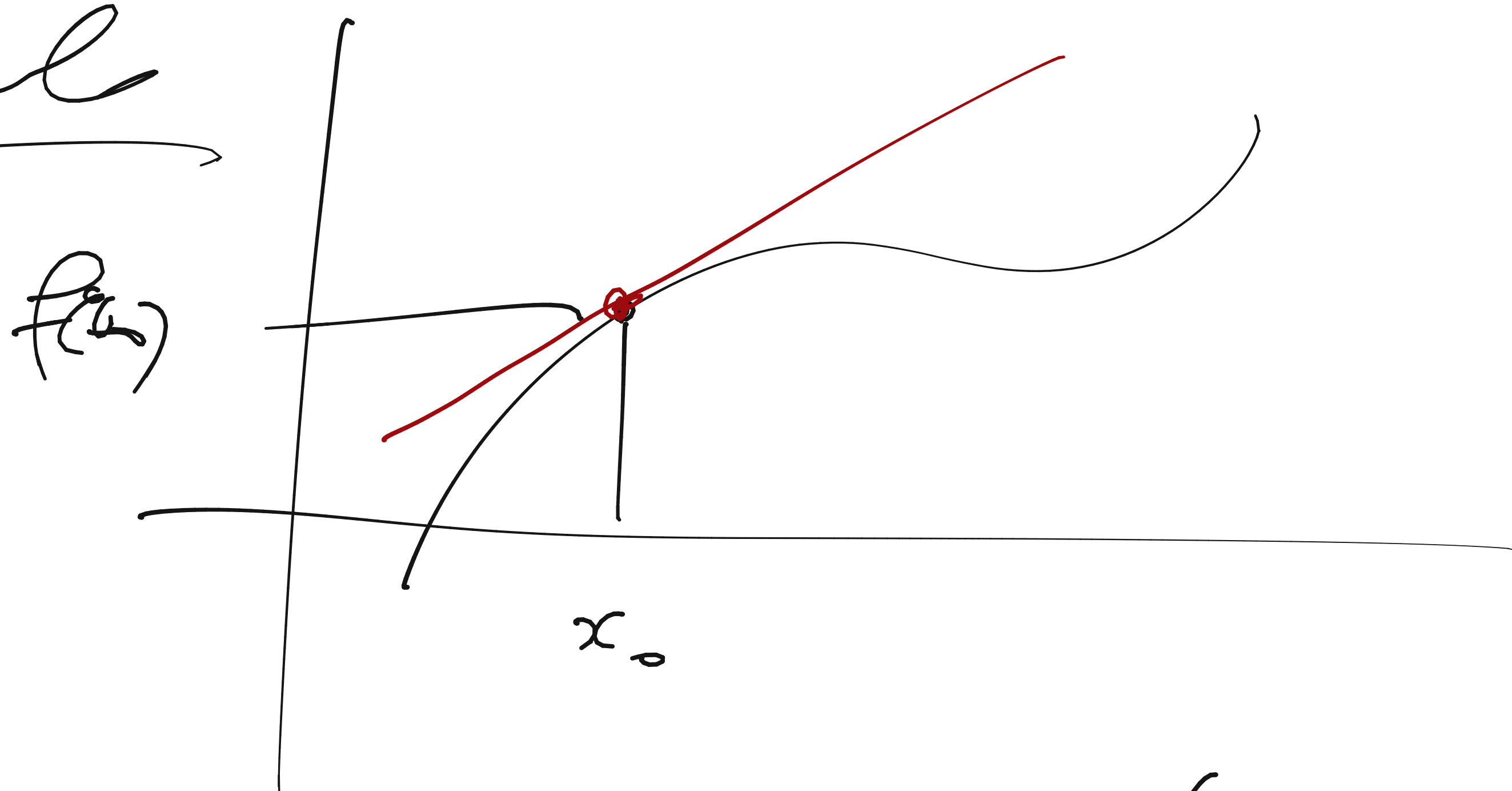
$$\Pi(t, s) = \varphi(x_0, y_0) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + s \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= \varphi(x_0, y_0) + \nabla \varphi(x_0, y_0) \cdot (t, s)$$

Sviluppo di Taylor

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \nabla \varphi(x_0, y_0) (x - x_0, y - y_0) + \text{Rest}$$

Parallel



Esempio Sia  $\varphi(u, v) = (u^2 - 2uv, v + 3, u^2 + 1)$   
definita su  $\mathbb{R}^2$ .

Iniettività? (studiare a casa)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (2u - 2v, 0, 2u)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-2u, 1, 0)$$

Calcolare  
↓

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (-2u, -4u^2 - 2u + 2v, 2u - 2v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 0, 0) \quad u \text{ e } v \text{ s.b. } u$$

$$(u, v) = (0, 0)$$

$\Rightarrow$  si prende  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  che non  
contiene  $(0, 0) \Rightarrow \varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$   
è iniettiva

problem  $(x_0, y_0) = (1, 2)$

$$\varphi(1, 2) = (-3, 5, 2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(1, 2) = (-2, 0, 2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(1, 2) = (-2, 1, 1)$$

$$\Rightarrow T(A, s) = \varphi(x_0, y_0) + t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + s \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= (-3, 5, 2) + t(-2, 0, 2) + s(-2, 1, 1)$$

$$= (-3 - 2t - 2s, 5 + s, 2 + 2t + s)$$

□