

Q10 6 giugno 8:30 compito

Abbiamo mostrato l'esistenza di un intorno di (t_0, u_0) e di un intervallo $(t_0 - r_0, t_0 + r_0) = I$ e di una funzione $u: (t_0 - r_0, t_0 + r_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in I \quad (*)$$

Dimostrazione unicità

Dimostriamo che u è unica; ovvero se $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa $(*)$ allora $u(t) = v(t) \quad \forall t \in I$

Sia $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ risolve $(*)$, $v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$

Supponiamo $u(t) \neq v(t)$ per qualche $t \in I$

e definiamo $t_1 := \sup \left\{ t \in [t_0, t_0 + r_0] \text{ tali che } u = v \text{ } [t_0, t] \right\}$

Se $t_1 = t_0 + r_0 \Rightarrow u$ e v coincidono su $[t_0, t_0 + r_0]$

Supponiamo per assurdo $t_1 < t_0 + r_0$

$$u(t) - v(t) = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds$$

$$\Rightarrow |u(t) - v(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds$$

$$u = v \text{ su } [t_0, t_1], \text{ se } t > t_1, \text{ } t < t_0 + r_0$$

$$|u(t) - v(t)| \leq \int_{t_1}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds$$

essendo f di classe $C^2 \Rightarrow f(s, u) - f(s, v) =$

$$f(t, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(s, \xi)(u - v)$$

$$\Rightarrow |u(t) - v(t)| \leq \int_{t_1}^t \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, \xi) \right| |u(s) - v(s)| ds$$

avendo posto $L := \max_{(t, u) \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \times [u_0 - r, u_0 + r]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, u) \right|$

$$|u(t) - v(t)| \leq L \int_{t_1}^t |u(s) - v(s)| ds$$

chiuso $\bar{t} \in [t_1, t_0 + r_0]$ un tempo tale

che $\bar{t} - t_1 < \frac{1}{L}$; se $t \in [t_1, \bar{t}]$

$$|u(t) - v(t)| \leq L \int_{t_1}^{\bar{t}} |u(s) - v(s)| ds \leq L \cdot \int_{t_1}^{\bar{t}} \|u - v\|_{\infty, [t_1, \bar{t}]} ds$$

$$< L \cdot \frac{1}{L} \|u - v\|_{\infty, [t_1, \bar{t}]}$$

$$= \|u - v\|_{\infty, [t_1, \bar{t}]} \quad \forall t \in [t_1, \bar{t}]$$

posso fare map e ottergo
 $t \in [t_1, \bar{t}]$

$$\|u - v\|_{\infty, [t_1, \bar{t}]} < \|u - v\|_{\infty, [t_1, \bar{t}]}$$

ASSURDO

ATTENZIONE in generale

$$f(t) < C \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in I} f(t) \leq C$$

$$\hookrightarrow I = (0, 1) \quad f(t) = t \quad C = 1$$

$\hookrightarrow I$ è compatta e f continua su I

allora f ammette max su I

$$\sup_{t \in I} f(t) = \max_{t \in I} f(t) = f(t_{\max})$$

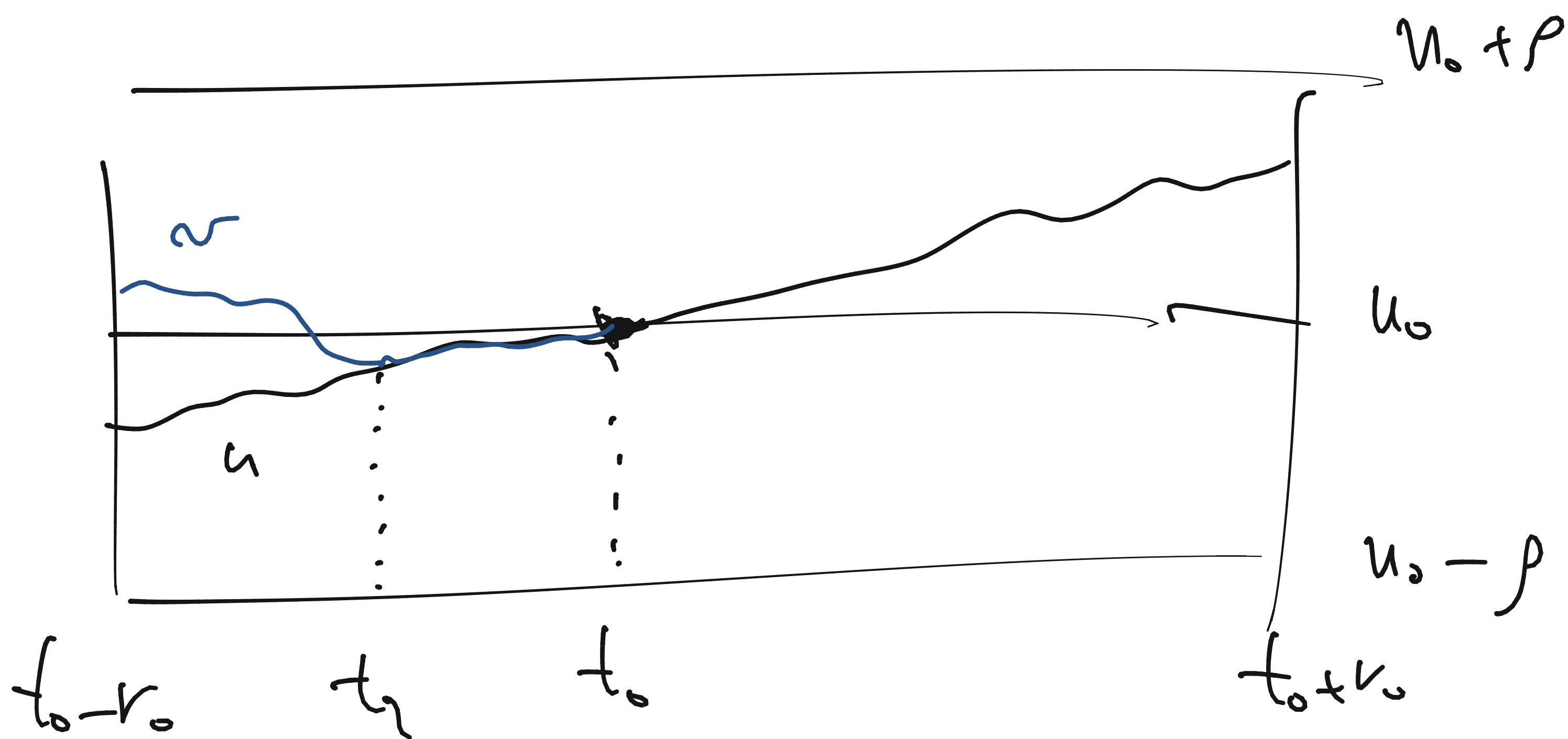
$$< C$$

Abbiamo detto che $t_1 = t_0 + \tau_0$

$\Rightarrow$ su $[t_0, t_0 + \tau_0]$ u e v
coincideranno.

• Controllare che $u=v$ anche su $[t_0-r_0, t_0]$

pongo $t_2 := \inf \{ t \in [t_0-r_0, t_0] \text{ A.c. } u=v \text{ su } [t, t_0] \}$



per esercizio verificare che $t_2 = t_0 - r_0$

$$\begin{aligned}
 |u(t) - v(t)| &\leq \int_t^{t_2} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\
 &\leq \int_t^{t_2} |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\
 &\leq \int_t^{t_2} L |u(s) - v(s)| ds \\
 &\leq \int_t^{t_2} L \|u - v\|_{\infty, [t, t_2]} ds
 \end{aligned}$$

$$\|u-v\| > 0 < L \frac{1}{L} \cdot \|u-v\|_\infty$$

e concludo come prima,

□

OSS.: Anche per l'esistenza il fatto che

$f \in C^1(A)$ veniva usato solo per

applicare il teorema di Lagrange nella
seconda variabile

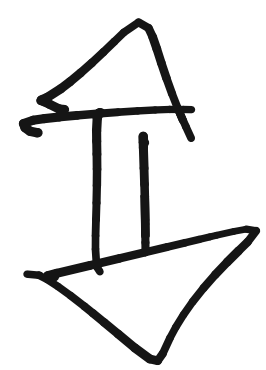
$$f(s, u) - f(s, v) = \frac{\partial f}{\partial y}(s, \xi) \cdot (u - v)$$

e poi usare il fatto che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

Le stesse dimostrazioni si può fare
supponendo solamente che

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq L |u - v| \quad (**)$$



$f(t, y)$ è lipschitziana nella variabile y

in realtà richiede che $\forall (t_0, u_0) \in A$

$\exists$ un intorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$ e $\exists L$
in cui vale **(**)**

Quindi abbiamo

Thm (Cauchy-Lipschitz)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia f continua in A e localmente Lipschitziana nella seconda variabile. Allora $\forall (t_0, u_0) \in A$
 $\exists$ un intorno $[t_0 - \nu_0, t_0 + \nu_0] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$
ed esiste un'unica funzione $u: [t_0 - \nu_0, t_0 + \nu_0] \rightarrow [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$ soluzione del pr. di

Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Oss.: il thm sopra vale anche per funzioni u vettoriali. $\Rightarrow$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$
cont. continua e loc. Lipschitziana in $u \in \mathbb{R}^n$
allora $\dots \forall (t_0, u_0) \in A$ $t_0 \in \mathbb{R}$ $u_0 \in \mathbb{R}^n$
 $\exists$ un intervallo $[t_0 - \nu_0, t_0 + \nu_0]$ ed esiste
un'unica soluzione del pr. di Cauchy

$$u: [t_0 - \nu_0, t_0 + \nu_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u(t)) \\ u_2' = f_2(t, u(t)) \\ \vdots \\ u_n' = f_n(t, u(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(t_0) = (u_0)_1 \\ u_2(t_0) = (u_0)_2 \\ \vdots \\ u_n(t_0) = (u_0)_n \end{cases}$$

Def.: Vogliamo risolvere $u: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

la trasformiamo in un sistema

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_n' = F(t, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \end{cases}$$

dove $u_k := u^{(k-1)}$

Si chiama $U(t) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

e chiamo $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$

la funzione

$$f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, \\ F(t, y) \end{pmatrix}$$

il sistema precedente diventa

$$U'(t) = f(t, U(t))$$

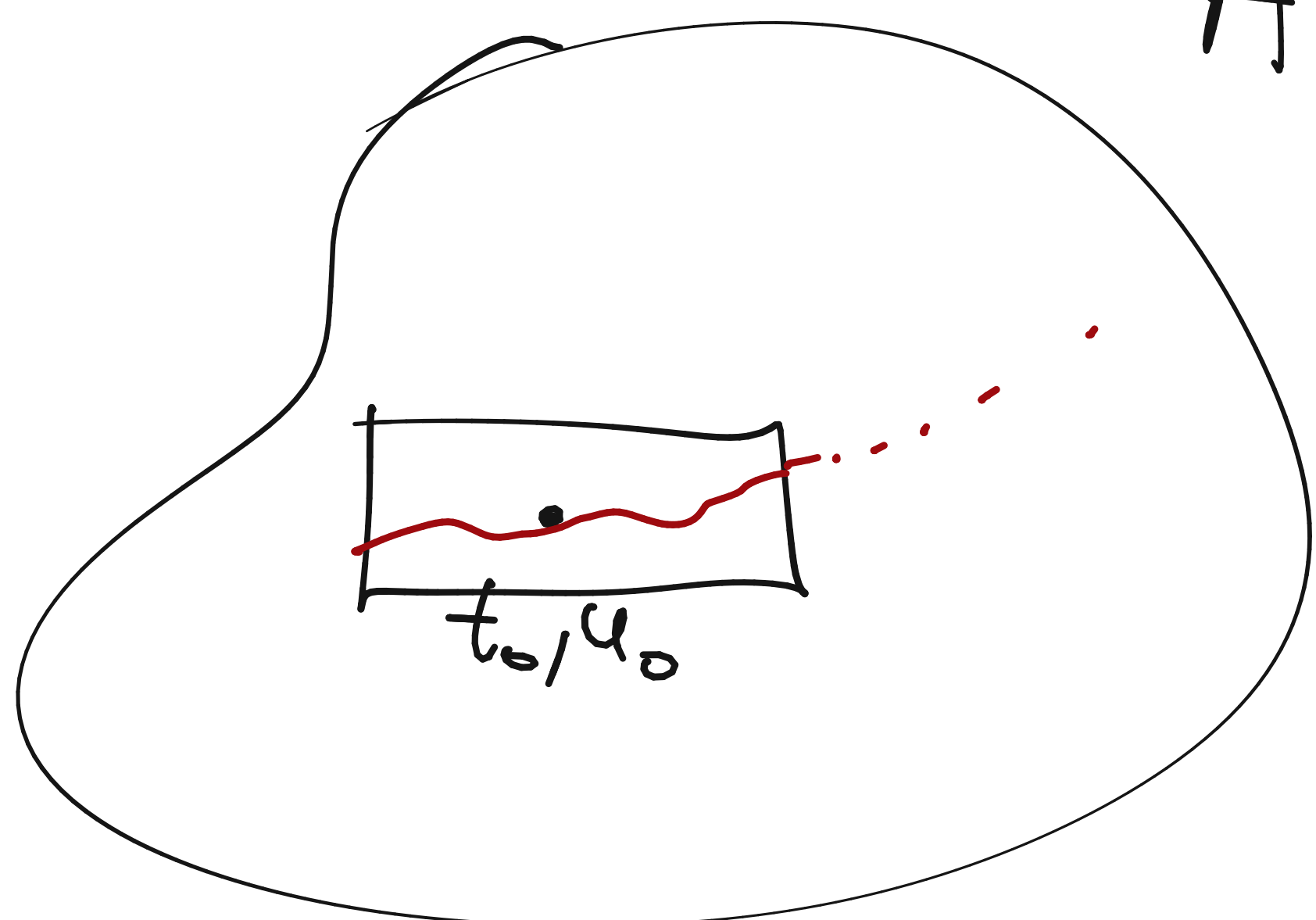
Se vogliamo risolvere il pr. di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 = ((u_0)_1, (u_0)_2, \dots, (u_0)_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u_1(t_0) = (u_0)_1 \\ u_2(t_0) = (u_0)_2 \\ \vdots \\ u_n(t_0) = (u_0)_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \\ u(t_0) = (u_0)_1 \\ u'(t_0) = (u_0)_2 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = (u_0)_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ esiste unica soluzione in
opportuno intervallo.

A



$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Proposizione Sia u, v sono entrambe
soluzioni della medesima eq. diff.

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

$$v'(t) = f(t, v(t)) \quad \forall t \in (c, d)$$

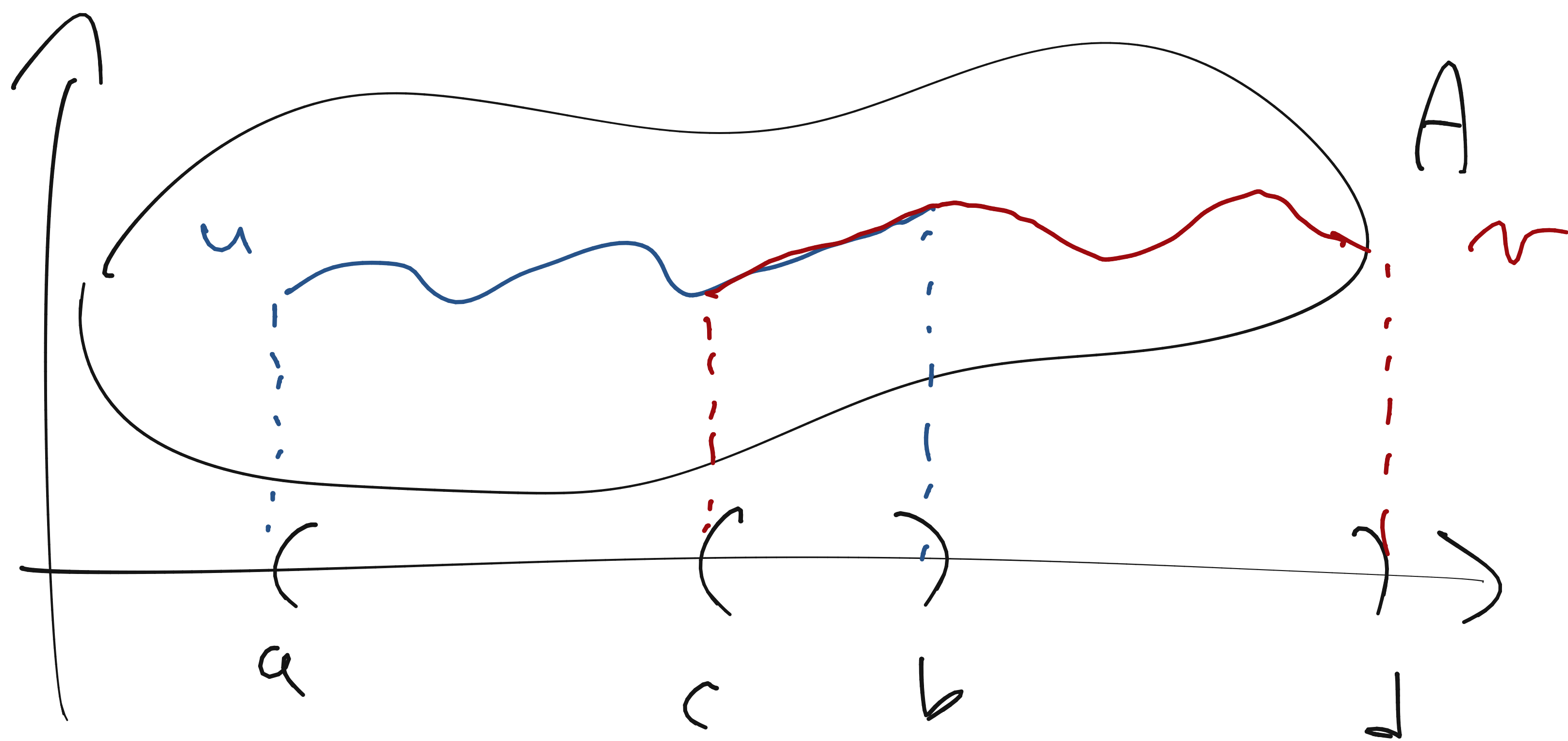
dove $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $v: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che $u(t) = v(t) \quad \forall t \in (a, b) \cap (c, d)$

Allora $w: (a, b) \cup (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & t \in (a, b) \\ v(t) & t \in (c, d) \end{cases}$$

è ben definita e soddisfa $w' = f(t, w)$



Dim.: w è ben definita segue dal

fatto che $u = v$ su $(a, b) \cap (c, d)$

Se $t \in (a, b)$ esiste un intorno di t

detto $I \subseteq (a, b)$ A. c. $u(s) = w(s)$ su I

$$\Rightarrow u'(s) = f(s, u(s)) = f(s, w(s))$$

$$\parallel$$

$$w'(s)$$

$\forall s \in I \Rightarrow w$ risolve l'eq. diff. $\square$

Prop. 2: Siano u, v soluzioni delle medesime eq. diff. nell'intervallo (α, β)

$u' = f(t, u)$ con f continua e loc. Lip. in u

Se $\exists t_0 \in (\alpha, \beta)$ t.c. $u(t_0) = v(t_0)$

$\Rightarrow u$ e v coincidono in (α, β)

Dim.: $u(t_0) = v(t_0) \Rightarrow$ definisco allora

$$\bar{t} := \inf \left\{ t \in (\alpha, \beta) \text{ t.c. } t \geq t_0 \text{ e } u(t) \neq v(t) \right\}$$

$\Rightarrow$ sicuramente $u(t) = v(t) \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$

Voglio mostrare che u e v sono uguali in $[t_0, \beta)$ $\Rightarrow$ supponiamo per assurdo

$t_0 \leq \bar{t} < \beta$. Risolvo il problema di

Cauchy
$$\begin{cases} w' = f(t, w) \\ w(\bar{t}) = w_0 \end{cases}$$

dove $w_0 = u(\bar{t}) = v(\bar{t})$

trovo un intervallo $I = [\bar{t} - h_0, \bar{t} + h_0]$ tale

$$\begin{cases} w'(t) = f(t, w(t)) \\ w(\bar{t}) = w_0 \end{cases} \quad \text{ho soluzione}$$

unica su I .

Ma adesso ho anche v soddisfa
questo pr. di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(\bar{t}) = u(\bar{t}) = w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(t) = f(t, v(t)) \\ v(\bar{t}) = w_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = v \text{ su } t_0 \text{ a } t \quad I = [\bar{t} - r_0, \bar{t} + r_0]$$

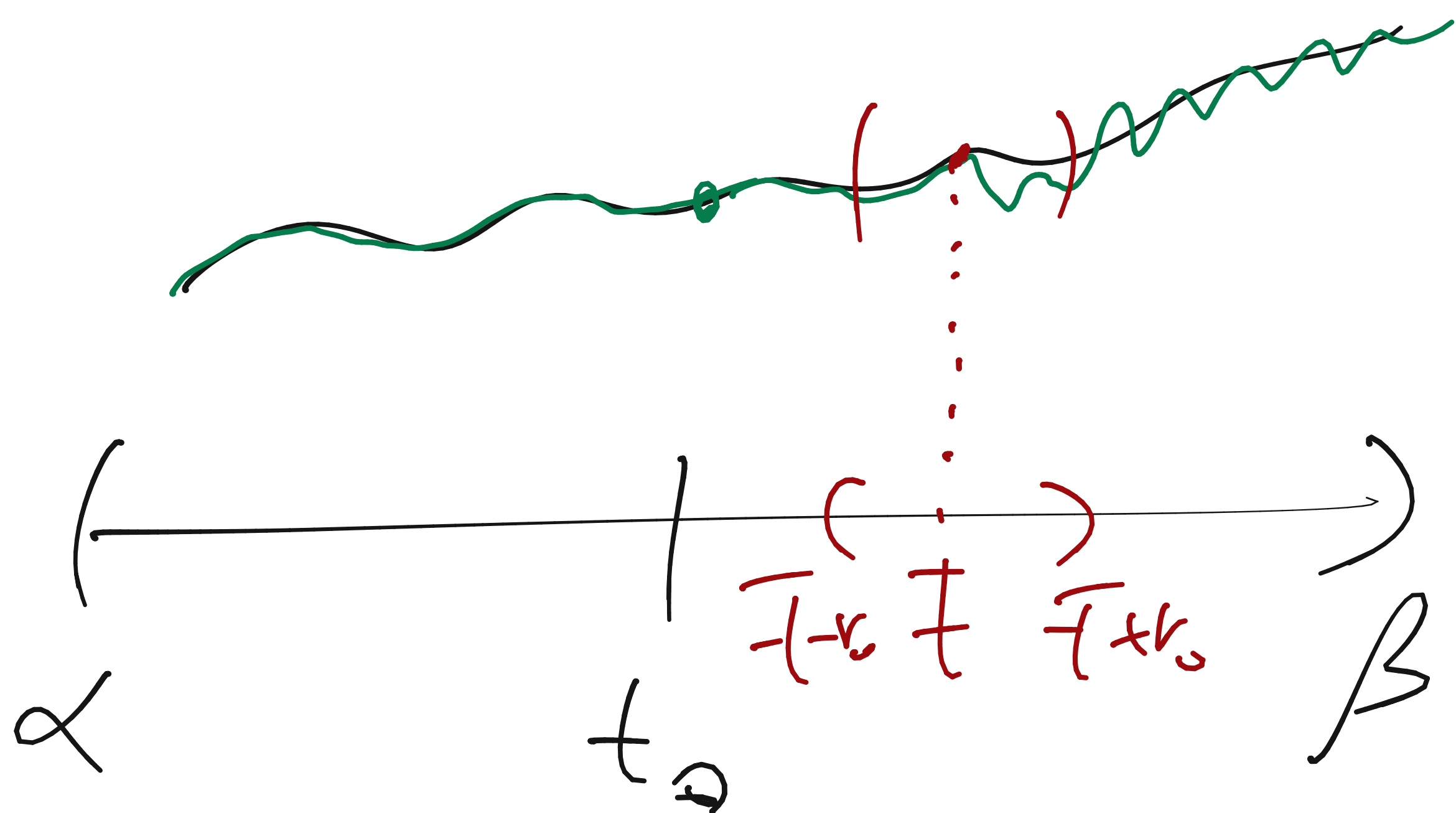
$$\text{e } u = v \text{ su } [t_0, \bar{t}] \text{ e anche su } [\bar{t} - r_0, \bar{t} + r_0]$$

$$\Rightarrow u = v \text{ su } [t_0, \bar{t} + r_0]$$

$$\Rightarrow \inf \{ t \geq t_0 \text{ t.c. } u(t) \neq v(t) \}$$

$$\geq \bar{t} + r_0$$

ASPUNTO



$$u = v \text{ su } (\alpha, \beta)$$

□

Def.: Sono u e v soluzioni
della medesima eq. diff.:

$$u' = f(t, u(t)) \quad v'(t) = f(t, v(t))$$

Allora $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $v: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice che u è un **PROLUNGAMENTO**

di v se $(a, b) \supsetneq (c, d)$

e $u = v$ su (c, d) .

Diverso che u soluzione $u' = f(t, u)$
è **MASSIMALE** se non ammette alcun
prolungamento.

Thm: Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$

funzione continua e loc. lipschitziana
nella seconda variabile. Sia $u: I \rightarrow \mathbb{R}$

una soluzione di $u' = f(t, u)$. Allora

u ammette un prolungamento massimale.

$\exists w: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione di $w' = f(t, w)$

massimale e $w = u$ nel dominio di u .

$I \subseteq (a, b)$.

Dim.: Denotiamo con $\mathcal{V} = \{v : (a_v, b_v) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } v \text{ è un prolungamento di } u\}$
In particolare $u \in \mathcal{V} \quad (a_v, b_v) \supseteq I \quad \forall v \in \mathcal{V}$

Definiamo

$$a := \inf \{a_v : v \in \mathcal{V}\}$$
$$b := \sup \{b_v : v \in \mathcal{V}\}$$

Essendo a, b definiti come sopra abbiamo che
 $\forall t \in (a, b) \quad \exists (a_v, b_v) \text{ A.c. } t \in (a_v, b_v)$

Poniamo

$$w(t) := v(t)$$

dove $v : (a_v, b_v) \rightarrow \mathbb{R}$ è il prolungamento di u nell'intervallo (a_v, b_v) .

ATTENZIONE dato $t \in (a, b)$ potrebbero esistere anche 2 funzioni v_1 e v_2 tali che

$$t \in (a_{v_1}, b_{v_1}) \quad t \in (a_{v_2}, b_{v_2})$$

in questo caso però avrò che $v_1(t) = v_2(t)$

$w(t)$ è ben definita!

Notiamo che v_1 e v_2 sono entrambe prolungamenti di $u \Rightarrow v_1 = u$ su $I \subseteq (a_{v_1}, b_{v_1})$
 $v_2 = u$ su $I \subseteq (a_{v_2}, b_{v_2})$

Per il teorema visto l'altra volta $v_1 = v_2$ su I
 $\Rightarrow v_1 = v_2$ anche su $(a_{v_1}, b_{v_1}) \cap (a_{v_2}, b_{v_2})$

$$\Rightarrow \nu_1(t) = \nu_2(t)$$

Facciamo vedere che w risolve l'eq. diff.

$$w'(t) = f(t, w(t)) \quad (*) \quad \text{infatti } t \in (a, b)$$

$$\Rightarrow \exists r : (a_r, b_r) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c. } t \in (a_r, b_r)$$

in (a_r, b_r) per def. di w ho $w(s) = \nu(s)$

$$\Rightarrow w'(s) = \nu'(s) = f(s, \nu(s)) = f(s, w(s))$$

quindi w risolve l'eq. diff in (a_r, b_r)

e anche $(*)$ è soddisfatta.

Abbiamo verificato che w è soluzione dell'eq. diff. $w'(t) = f(t, w(t))$ facciamo vedere che

è massima.

$$w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

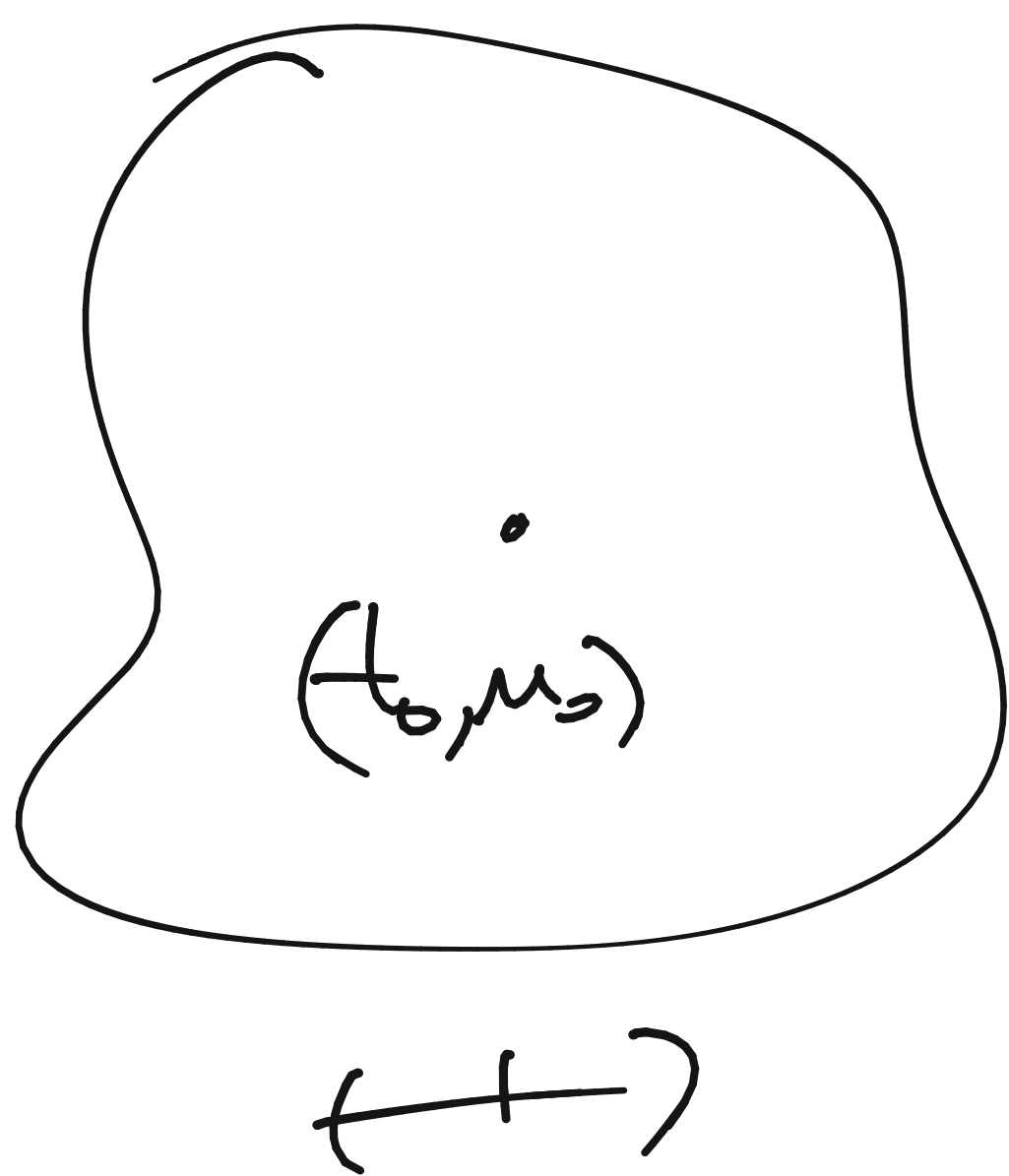
Se per assurdo w ammettesse un

prolungamento $\nu : (a_r, b_r) \rightarrow \mathbb{R}$

avremo $(a_r, b_r) \not\subset (a, b) \quad \nu \in \mathcal{V}$

e quindi a e b non potremmo avere l'inf e il sup degli a_r e b_r rispettivamente.

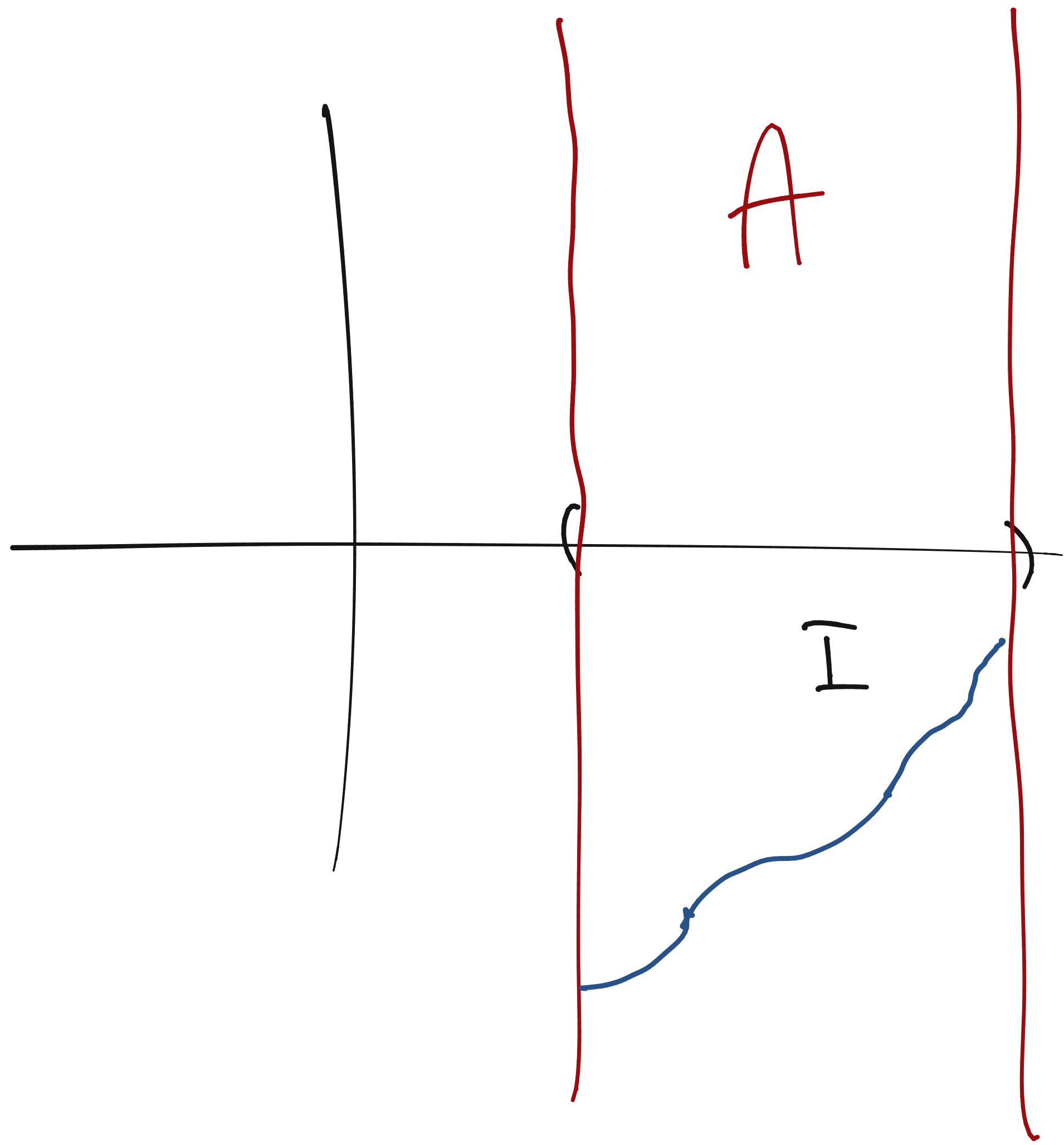
$$A \text{ su cui } f : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \square$$



Thm. 1 (esistenza globale) supponiamo

$A = I \times \mathbb{R}$ dove I è un intervallo aperto
oppure $(a, +\infty)$ o $(-\infty, b)$

o $(-\infty, +\infty)$



$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale
che f sia continua,
localmente lipschitziana
nella 2° variabile
e $\exists K > 0$ t.c.

$$|f(t, u)| \leq K(1 + |u|)$$

$$\forall (t, u) \in A$$

Allora ogni soluzione dell'eq. diff.

$u'(t) = f(t, u(t))$ ammette un prolung. max
definito su tutto I .

Dim.: Sia $u: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione
massimale; vogliamo far vedere che $(\alpha, \beta) = I$

Mettiamoci nel caso in cui $\underline{I} = (a, b)$
dobbiamo far vedere che $b = \beta$ e $\alpha = a$.

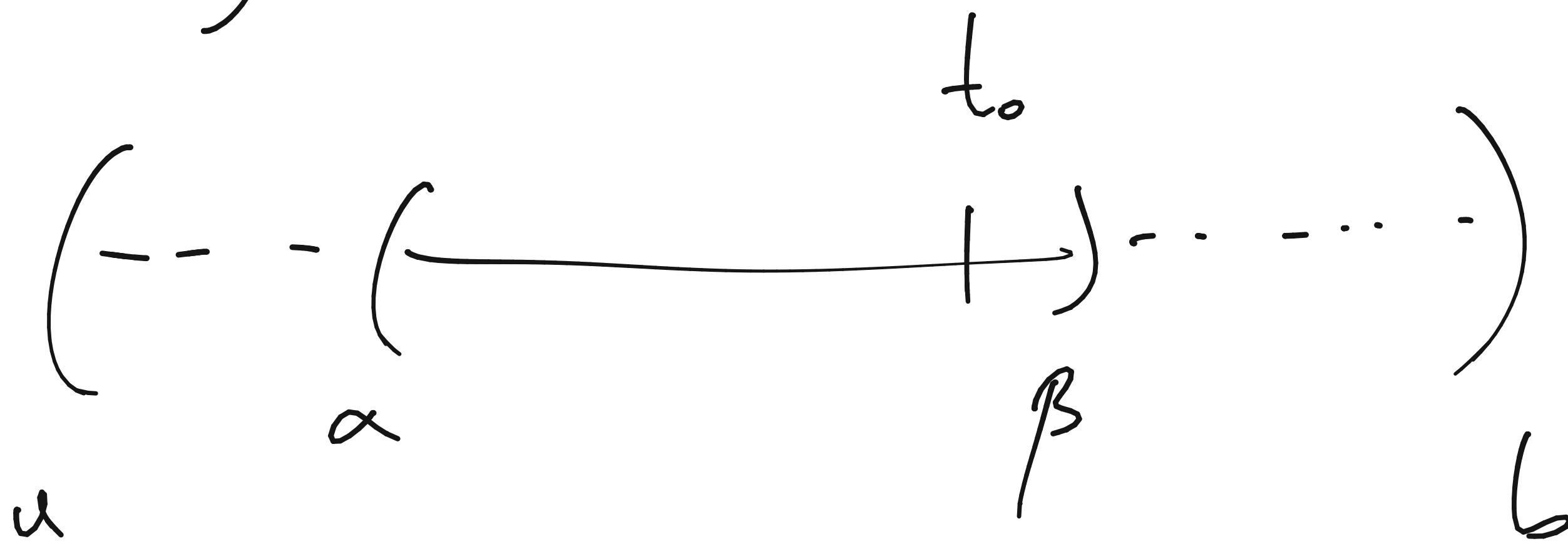
Facciamo vedere che $\beta = b$ e supponiamo per
assurdo che

$$\beta < b$$

prendiamo $t_0 < \beta$

in modo tale che

$$\beta - t_0 < \frac{1}{2K}$$

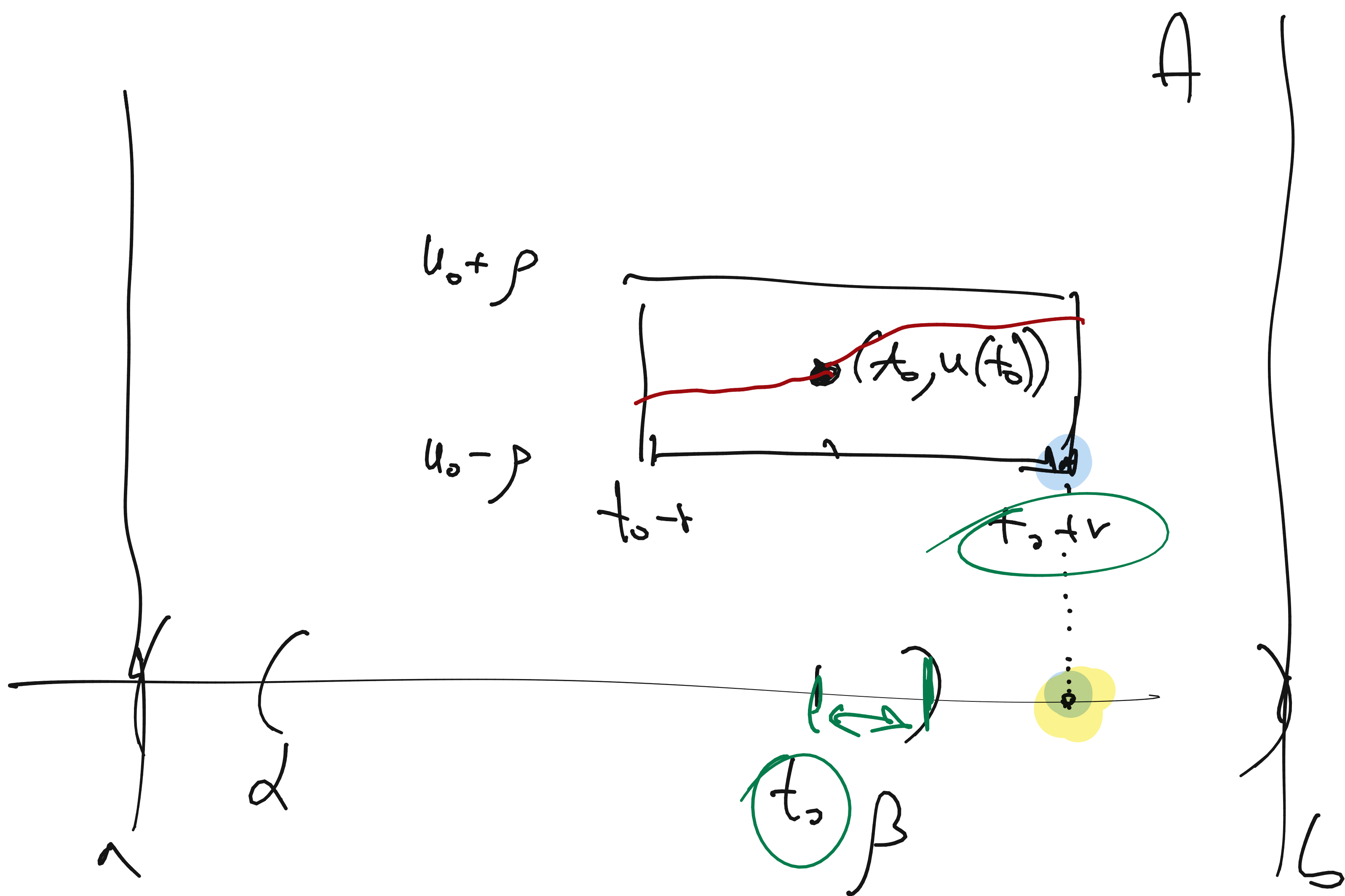


studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(t_0) = u(t_0) \end{cases}$$

**)

Nella dimostrazione dell'esistenza delle soluz. del pr. di Cauchy si prende un rettangolo R centrato in $(t_0, u(t_0))$ contenuto in A .



$$R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$$

in modo tale che

$$t_0 + r \in (\beta, b) \quad \text{e posso scegliere } r$$

$$r < \frac{1}{2K} \quad \left(r > \beta - t_0 \text{ ma } r < \frac{1}{2K} \right)$$

inoltre $\rho = 1 + |u_0|$ dove $u_0 = u(t_0)$

Per il teorema di esistenza esiste una soluzione del problema di Cauchy **(**)**

Su l'intervallo $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ dove

$$r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{M} \right\} \quad \text{dove } M = \sup_R |f(t, u)|$$

$$M = \sup_R |f(t, u)| \leq \sup_R K (1 + |u|)$$

essendo $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$

ed essendo $\rho = 1 + |u_0| \Rightarrow$

$$|u_0 + \rho| = |u_0 + 1 + |u_0|| \leq 1 + 2|u_0|$$

$$\Rightarrow |u_0 - \rho| = |u_0 - 1 - |u_0|| \leq 1 + 2|u_0|$$

$$|u| \leq 1 + 2|u_0|$$

$$\Rightarrow M \leq \sup K (1 + |u|) \leq K (1 + 1 + 2|u_0|)$$

$$= K (2 + 2|u_0|)$$

$$r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{M} \right\}$$

$$\frac{\rho}{M} = \frac{1 + |u_0|}{M} \geq \frac{1 + |u_0|}{K(2 + 2|u_0|)} = \frac{1}{2K}$$

ma per come avevo scelto r ho $r \leq \frac{1}{2K}$

$$\Rightarrow r_0 = r$$

Abbiamo scoperto che v , soluzione di $(**)$
 è definita su $[t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$
 quindi si definisce

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in (\alpha, \beta) \\ v(t) & \text{se } t \in (\beta, t_0 + r) \end{cases}$$

allora w risolve ancora l'eq. diff.

$$w'(t) = f(t, w(t)) \quad \text{e prolunga } u.$$

Contraddicendo il fatto che u fosse
 massima.

D

Fisica
$$\begin{cases} u' = u^2 + \cos^2 t \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad (***)$$

Soluzione esplicita? boh

S: può ammettere una soluzione max
del pb di Cauchy (***) e definita su
 $(-\infty, b)$ dove $b \leq 1$.

Teorema (del confronto pt. 1)

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non
nulla funzioni $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$u'(t) \geq f(t, u(t)) \quad \forall t \in I$$

$$v'(t) \leq f(t, v(t))$$

e allora una delle due d.r. sopra è

Stretta... Allora

$$\underbrace{v(t_0) \leq u(t_0)}_{\text{Stretta}} \quad \text{per qualche } t_0 \in I$$

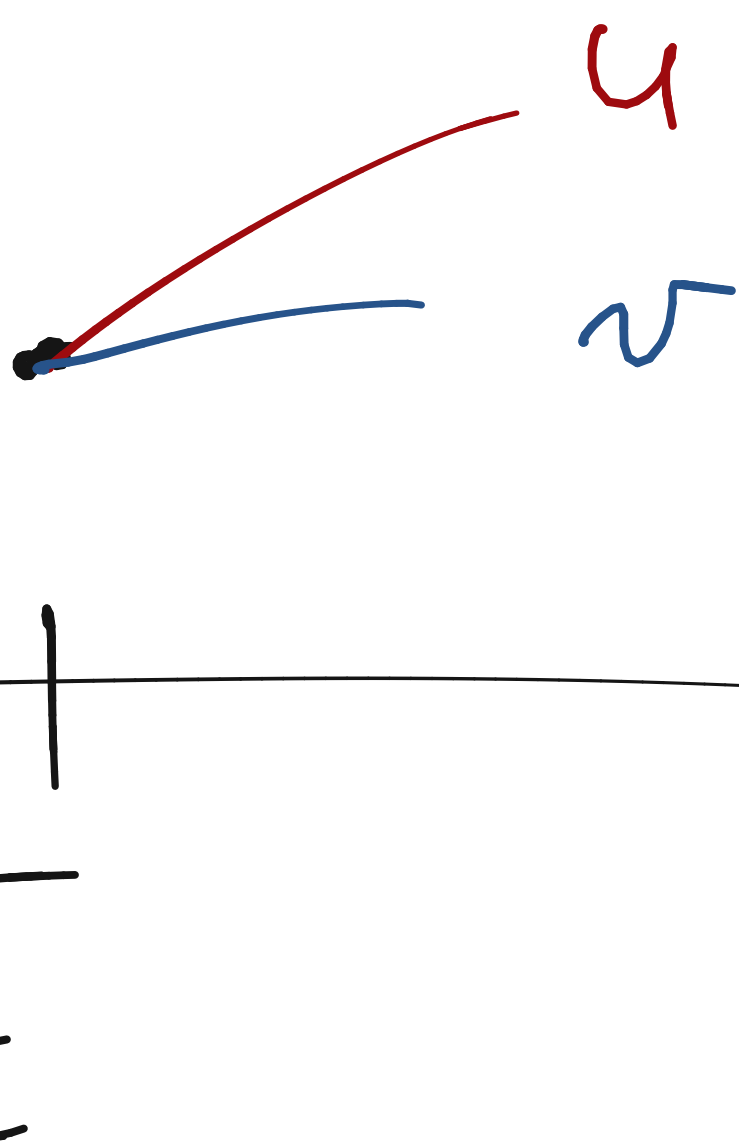
$$\Rightarrow v(t) < u(t) \quad \forall t > t_0.$$

Dim.: Proprietà: se $v'(\bar{t}) < u'(\bar{t})$

e $v(\bar{t}) = u(\bar{t}) \Rightarrow \exists$ un intorno destro

di $\bar{t}$, $(\bar{t}, \bar{t} + \delta)$ tale che $v(t) < u(t)$
 $\forall t \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta)$

$$u(\bar{t}) = v(\bar{t})$$



Supponiamo per assurdo che $v(t) \geq u(t)$
per qualche $t > \bar{t}$.

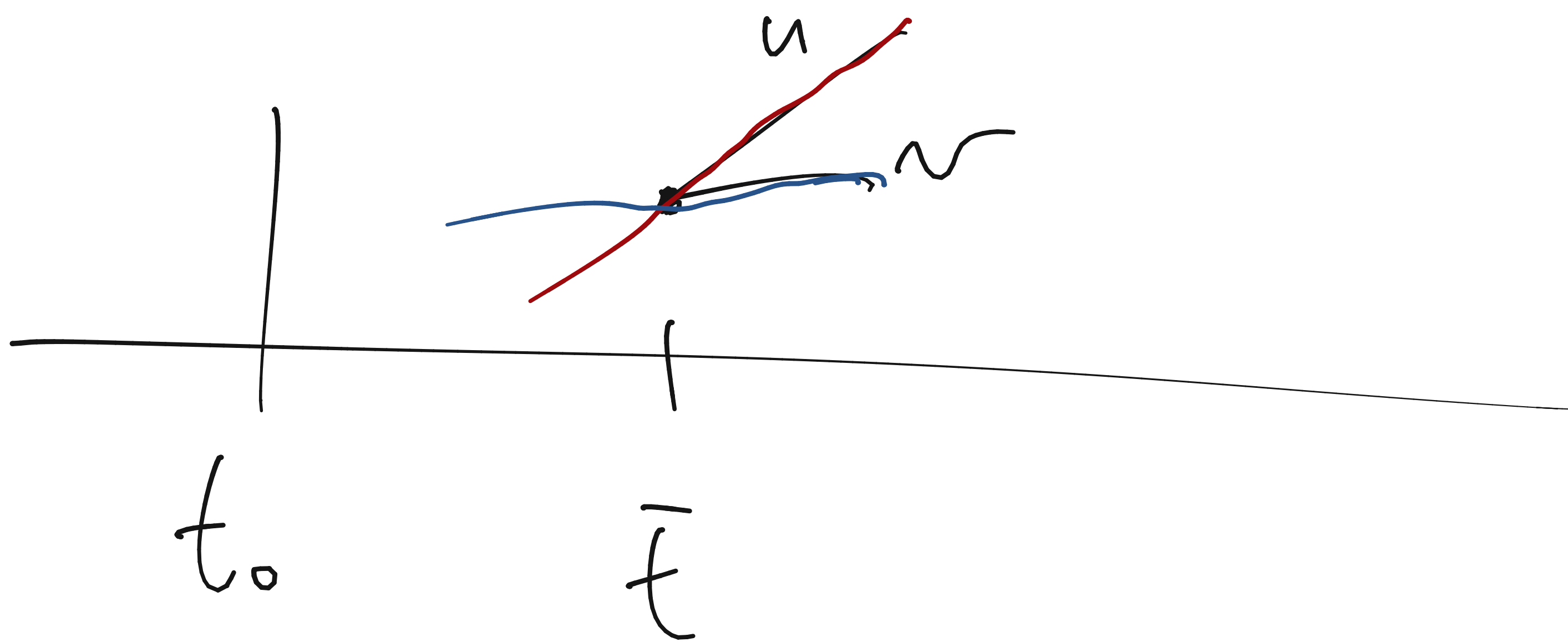
Definiamo $\bar{t} := \inf \{ t > t_0 \text{ s.t. } v(t) \geq u(t) \}$

Se segue che essendo v e u continue

$$u(\bar{t}) = v(\bar{t}) \quad \text{perch\u00e9 si ha } u(t_0) \geq v(t_0)$$

$$\text{Ma allora ho che } \underline{u'(\bar{t})} \geq f(\bar{t}, u(\bar{t})) = \\ = f(\bar{t}, v(\bar{t})) \geq \underline{v'(\bar{t})}$$

e almeno una delle dis. precedenti \u00e8
stretta. $\Rightarrow u(t) > v(t) \quad \forall t \in (\bar{t}, \bar{t} + \delta)$
utilizzando la proprieta'



Proprietà $\mu(\bar{f}) = \nu(\bar{f})$ e

$\mu'(f) > \nu'(f)$ allora $\exists (\bar{f} - \delta, \bar{f})$

Tale che $\mu(t) < \nu(t) \quad \forall t \in (\bar{f} - \delta, \bar{f})$

Dimostrazione del teorema alla pagina precedente

Dim. (t_0) prendiamo $\bar{f} := \inf \{t > t_0 \text{ t.c.}$
 $\mu(t) \leq \nu(t)\}$

① $\bar{f} = t_0 \rightarrow$ Scriviamo che $\mu'(t_0) \geq$
 $f(t_0, \mu(t_0)) = f(t_0, \nu(t_0))$
 $\geq \nu'(t_0)$
con alcune sue dis. strutt.
 $\Rightarrow \mu'(t_0) > \nu'(t_0)$
 $\Rightarrow \underline{\mu(t) > \nu(t) \text{ in } (t_0, t_0 + \delta)}$
 $\bar{f} \geq t_0 + \delta \Rightarrow$ ASSURDO

in questo caso

Scriviamo che $\mu(\bar{f}) = \nu(\bar{f})$ e

$$\mu'(\bar{f}) \geq f(\bar{f}, \mu(\bar{f})) = f(\bar{f}, \nu(\bar{f})) \geq \nu'(\bar{f})$$

$$\mu'(\bar{f}) > \nu'(\bar{f})$$

per le proprietà $\exists \delta$ A.c.

$$u(t) < v(t) \quad \forall t \in (\bar{t} - \delta, \bar{t})$$

ma allora $\bar{t} = \inf \left\{ t > t_0 \text{ A.c.} \right. \\ \left. u(t) \leq v(t) \right\}$

$$\bar{t} \leq \bar{t} - \delta \quad \text{Assurdo}$$

□

The Confront 2

f continue e loc. lipschitziana

$$\begin{cases} v'(t) \leq f(t, v(t)) \\ \underline{v(t_0) \leq y_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\text{Allora} \quad v(t) \leq u(t) \quad \forall t \geq t_0.$$

Terminazione dell'esercizio

$$\begin{cases} u' = u^2 + \cos^2 t \\ u(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' = v^2 \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

ponendo $f(t, y) = y^2$

ho che $v'(t) = f(t, v)$

$$\text{e } u'(t) = f(t, u) + \cos^2 t > f(t, u)$$

inoltre $u(0) = v(0)$ quindi il teo. di confronto I dice che $u(t) > v(t) \quad \forall t > 0$

$v(t)$ risolve $\frac{v'}{v^2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v(t)} = t + c$$

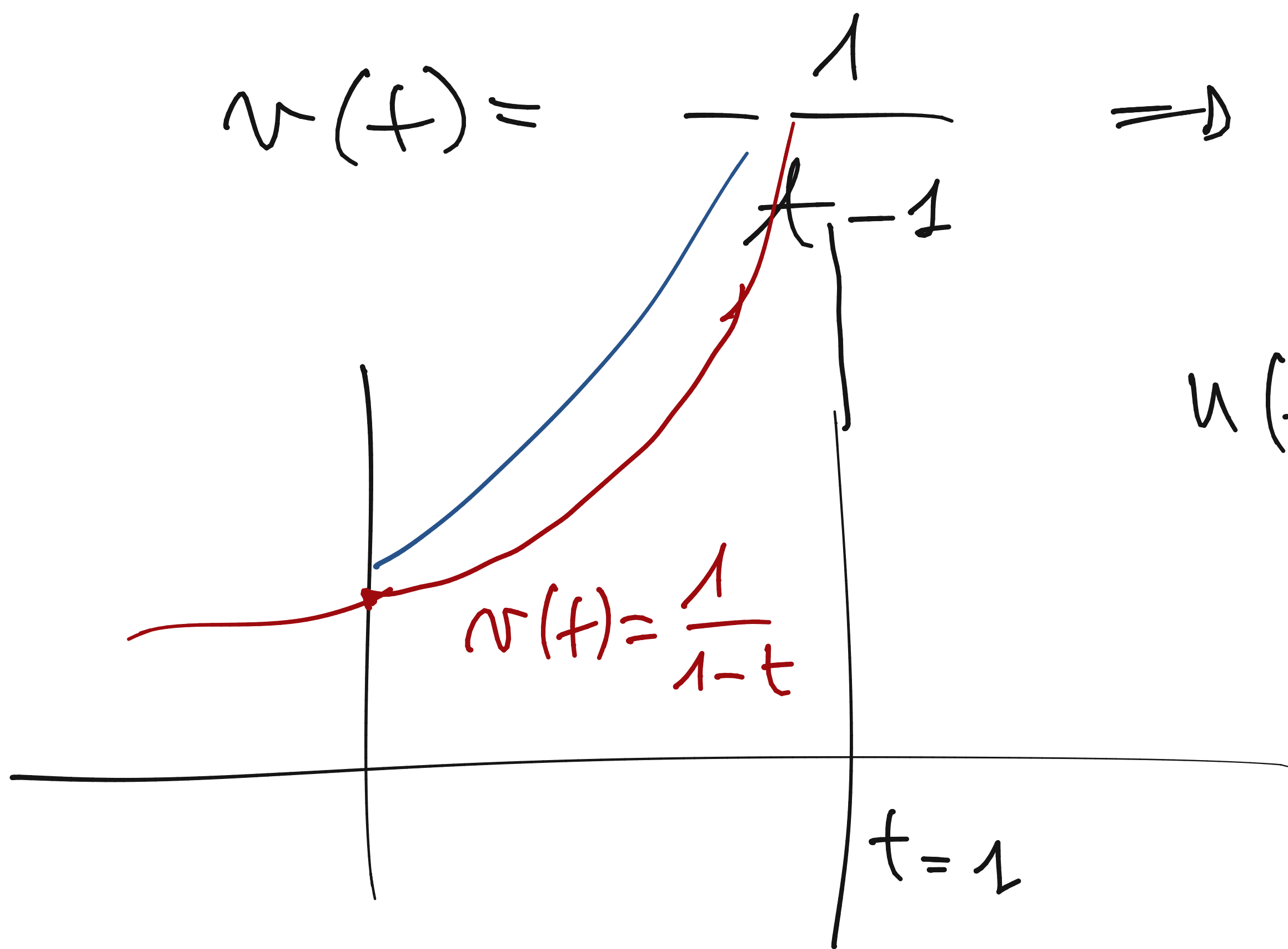
$$v(t) = -\frac{1}{t+c}$$

$$v(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1$$

$$v(t) = -\frac{1}{t-1}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{1-t}$$

$$u(t) > v(t) = \frac{1}{1-t}$$



$$u(t) \nearrow \infty$$

per qualche $t \leq 1$

$\Rightarrow$ il esiste di n e ϵ contenuti
in $(-\infty, 1)$