



Equazioni a variabili separabili

$$u'(t) = f(u(t))g(t)$$

Procedimento: andiamo a separare ciò che dipende direttamente da t e ciò che coinvolge le u

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t)$$

Se chiamiamo Z una primitiva di $1/f$ $Z' = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{d}{dt} Z(u(t)) = Z'(u(t))u'(t) = \frac{1}{f(u(t))} u'(t)$

Se invece G è una primitiva di g $Z(u(t)) = G(t) + c \Rightarrow u(t) = Z^{-1}(G(t) + c)$

Esempio:

$$u'(t) = \frac{u(t)}{1+t^2} \quad \begin{matrix} \nearrow f(u(t)) \\ \leftarrow g(t) \end{matrix} \Rightarrow \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{d}{dt} \log(u(t)) \quad \frac{d}{dt} \arctan(t)$$

$$\Rightarrow \log|u(t)| = \arctan(t) + c \Rightarrow |u(t)| = e^{\arctan(t)+c} = e^c \cdot e^{\arctan(t)} = \alpha \cdot \arctan(t) \quad \text{con } \alpha > 0$$

Per determinare il valore della costante abbiamo bisogno di ulteriori informazioni

$$u(t_0) = u(0) = 1 \Rightarrow |u(0)| = 1 = \alpha e^{\arctan(0)} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{\arctan(t)}$$

Equazioni lineari del primo ordine

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \quad \text{Dove } a, b \text{ Sono funzioni assegnate}$$

SE $b=0 \Rightarrow u'(t) = a(t)u(t) \rightarrow \frac{u'(t)}{u(t)} = a(t) \Rightarrow \log|u(t)| = A(t) + c \Rightarrow |u(t)| = \alpha e^{A(t)} \quad \text{con } \alpha > 0$

SE $b \neq 0 \Rightarrow u(t) = c(t)e^{A(t)} \rightarrow u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$

$$\rightarrow \underbrace{c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)}}_{u'(t)} = \underbrace{a(t)u(t) + b(t)}_{\text{Parte destra dell'equazione originale}}$$

$$\Rightarrow c'(t)e^{A(t)} + \cancel{c(t)a(t)e^{A(t)}} = \cancel{a(t) \cdot c(t)e^{A(t)}} + b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = b(t)e^{-A(t)} \Rightarrow c(t) = \int b(s)e^{-A(s)} ds + K$$

$$\rightarrow u(t) = c(t)e^{A(t)} = \left[\int b(s)e^{-A(s)} ds + K \right] e^{A(t)}$$

Esempio:

$$u'(t) = \frac{3u(t)}{t} + t^2 + 1 \quad a(t) = \frac{3}{t}, \quad b(t) = t^2 + 1$$

$$u(t) = e^{A(t)} \left[\int b(s) e^{-A(s)} ds + K \right]$$

$$A(t) = \int a(t) dt = \int \frac{3}{t} dt = 3 \int \frac{dt}{t} = 3 \log|t|$$

$$b(s) e^{-A(s)} = (s^2 + 1) e^{-3 \log|s|} = \frac{s^2 + 1}{e^{\log^3|s|}} = \frac{s^2 + 1}{|s|^3}$$

$$\Rightarrow u(t) = |t|^3 \left[\int \frac{s^2 + 1}{s^3} ds + K \right]$$

$$\int \frac{s^2 + 1}{s^3} ds \begin{cases} \nearrow \int \frac{s^2 + 1}{s^3} ds + K = \dots & t > 0 \\ \searrow \int \frac{s^2 + 1}{-s^3} + K = \dots & t < 0 \end{cases}$$

$$u(t) = t^3 \left[\log t - \frac{1}{2t^2} + K \right], \quad t > 0$$

$$u(t) = -t^3 \left[-\log t + \frac{1}{2t^2} - K \right], \quad t < 0$$

Possiamo poi anche imporre le condizioni iniziali per poter trovare il valore della costante

Equazione di Bernoulli

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

1 $\alpha = 0 \rightarrow u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \rightarrow$ [Equazione lineare del primo ordine](#)

2 $\alpha = 1 \rightarrow u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t) = [a(t) + b(t)]u(t) \rightarrow$ [Equazione a variabili separabili](#)

Proviamo adesso a risolvere l'equazione di Bernoulli

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha \quad \text{Facciamo un cambio di variabili:} \quad z = u^{1-\alpha} \rightarrow u = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\text{Derivando: } u'(t) = \frac{1}{1-\alpha} z^{\left(\frac{1}{1-\alpha}-1\right)} \cdot z'$$

Sostituendo nell'equazione originale

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\left(\frac{1}{1-\alpha}-1\right)} \cdot z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{Dividiamo adesso per } z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(t) = a(t) z + b(t)$$

$\Rightarrow z' = (1-\alpha) a(t)z + (1-\alpha) b(t)$ Che è un'equazione lineare del primo ordine

$$z(t) = e^{(1-\alpha)A(t)} \left[\int (1-\alpha) b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds + K \right]$$

Da cui $u(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = e^{A(t)} \left[(1-\alpha) \int b(s) e^{-(\alpha-1)A(s)} ds + K \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Esempio:

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t^2} + \frac{u^2}{t^2}, \quad u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha$$

$$a(t) = \frac{1}{t^2}, \quad b(t) = \frac{1}{t^2}, \quad \alpha = 2$$

$$z(t) = e^{(1-\alpha)A(t)} \left[\int (1-\alpha) b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds + K \right]$$

$$A(t) = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t}, \quad 1-\alpha = 1-2 = -1$$

$$\rightarrow \int (1-\alpha) b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds = - \int b(s) e^{A(s)} ds =$$

$$\int b(s) e^{A(s)} ds = \int \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{s}} ds = e^{-\frac{1}{s}}$$

$$z(t) = e^{-A(t)} \left[\int (1-\alpha) b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds + K \right]$$

$$u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \left(e^{-\frac{1}{t}} + K \right), \quad K \in \mathbb{R}$$

Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine n:

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + a_{n-2} u^{(n-2)} + \dots + a_2 u' + a_0 u = 0 \quad \text{dove } a_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

Scriviamo il polinomio caratteristico associato:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_2 \lambda + a_0$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ Le radici di questo polinomio

Se tutte le radici sono distinte allora alcune soluzioni dell'equazione iniziale sono esponenziali della forma $u(t) = e^{\lambda_i t}$

Osservazione

Se u_1, u_2 Sono soluzioni dell'equazione iniziale, allora è soluzione anche $\alpha u_1 + \beta u_2$

$$\Rightarrow u(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Esempio

$$u'' + u = 0$$

Scriviamo il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

$$\Rightarrow u(t) = \alpha_1 e^{it} + \alpha_2 e^{-it} = \alpha_1 (\cos(t) + i \sin(t)) + \alpha_2 (\cos(t) - i \sin(t))$$

$$\text{Se } \alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow u_1(t) = 2\alpha \cos(t)$$

$$\text{Se } \alpha_1 = -\alpha_2 \rightarrow u_2(t) = 2i\alpha \sin(t)$$

$$\Rightarrow \hat{u}_1(t) = \cos(t) \quad \text{soluzione}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_2(t) = \sin(t) \quad \text{soluzione}$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Lemma

u in C1 soddisfa il problema di Cauchy solo se soddisfa il sistema.
Per risolvere il problema basta trovare u che soddisfa

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Cominciamo con scrivere il polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico

$$1 - \text{Due soluzioni reali distinte } \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$2 - \text{Due soluzioni reali coincidenti } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$$3 - \text{Due soluzioni complesse coniugate } \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Metodo di somiglianza per la soluzione particolare

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad \text{con } f(t) = e^{\lambda t} Q(t), \quad Q(t): \text{polinomio nella variabile } t$$

$$f(t) = Q(t) \Rightarrow \lambda = 0, \quad f(t) = \cos(\beta t) Q(t), \quad f(t) = \sin(\beta t) Q(t), \quad f(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) Q(t), \quad f(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) Q(t)$$

$$1 - \text{Troviamo l'integrale dell'omogenea associata } y_0(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

$$2 - \text{La soluzione generale sar\`a } y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{con } \bar{y}(t) \text{ Soluzione particolare}$$

Se il termine noto \(\epsilon\) dato dalla somma di due o pi\`u termini
ripeteremo lo stesso procedimento per ogni termine e la
soluzione finale sar\`a data dalla somme di tutte le soluzioni
ottenute

Sceita della soluzione particolare nel metodo di somiglianza

A - polinomio caratteristico ha due radici reali distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$

B - una sola radice con molteplicità due $\lambda_0 \Rightarrow y_1(t) = e^{\lambda_0 t}, y_2(t) = t e^{\lambda_0 t}$

C - due radici complesse coniugate $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 = i\beta_2 \Rightarrow y_1(t) = e^{\alpha_1 t} \cos(\beta_1 t), y_2(t) = e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t)$

Se $g(t)$ è del tipo $Q(t)$ oppure $Q(t)e^{\lambda t}$ si hanno tre casi:

1 $\lambda = \lambda_1$ oppure $\lambda = \lambda_2 \rightarrow \bar{y}(t) = t e^{\lambda t} \bar{Q}(t)$ con $\bar{Q}(t)$ polinomio dello stesso grado di $Q(t)$

2 $\lambda = \lambda_0 \rightarrow \bar{y}(t) = t^2 e^{\lambda t} Q(t)$ con $\bar{Q}(t)$ polinomio dello stesso grado di $Q(t)$

3 λ non coincide $\rightarrow \bar{y}(t) = e^{\lambda t} \bar{Q}(t)$ con $\bar{Q}(t)$ polinomio dello stesso grado di $Q(t)$

Se $g(t)$ è del tipo $\cos(\beta t)Q(t)$ o $\sin(\beta t)Q(t)$ si distinguono due casi:

(a) Se $i\beta$ è una radice del polinomio caratteristico, allora la soluzione $\bar{y}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{y}(t) = t[\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)\bar{R}(t)]$$

con $\bar{Q}(t)$ e $\bar{R}(t)$ polinomi nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$.

(b) Se $i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico, allora la soluzione $\bar{y}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{y}(t) = \cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)\bar{R}(t)$$

con $\bar{Q}(t)$ e $\bar{R}(t)$ polinomi nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$.

Se $g(t)$ è del tipo $e^{\alpha t} \cos(\beta t)Q(t)$ o $e^{\alpha t} \sin(\beta t)Q(t)$ si distinguono due casi:

(a) Se

$$\alpha = \alpha_1 \text{ e } \beta = \beta_1 \text{ con } \alpha_1 \text{ e } \beta_1 \text{ termini delle radici complesse del polinomio caratteristico}$$

allora la soluzione $\bar{y}(t)$ della non omogenea sarà del tipo

$$\bar{y}(t) = t e^{\alpha t} [\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)\bar{R}(t)]$$

con $\bar{Q}(t)$ e $\bar{R}(t)$ polinomi nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$.

(b) Se

$$\alpha \text{ e } \beta \text{ non coincidono (rispettivamente) con } \alpha_1 \text{ e } \beta_1 \text{ delle radici complesse del polinomio caratteristico}$$

allora la soluzione $\bar{y}(t)$ della non omogenea sarà del tipo:

$$\bar{y}(t) = e^{\alpha t} [\cos(\beta t)\bar{Q}(t) + \sin(\beta t)\bar{R}(t)]$$

con $\bar{Q}(t)$ e $\bar{R}(t)$ polinomi nella variabile t dello stesso grado di $Q(t)$.