



Metodo parametrico

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ con vincoli } x + y - z \leq 1, x + y + z = 0$$

Troviamo l'intersezione fra i vincoli $\rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} - x$

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = \left(x, \frac{1}{2} - x, -\frac{1}{2} \right) \right\} \Rightarrow t \mapsto \left(t, \frac{1}{2} - t, -\frac{1}{2} \right), t \in (-\infty, +\infty)$$

Da qui possiamo derivare e trovare i punti stazionari

Metodo dei moltiplicatori di lagrange:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ con vincoli } x + y - z \leq 1, x + y + z = 0$$

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y - z - 1) - \mu(x + y + z)$$

Scriviamo il sistema
$$\begin{cases} \partial L / \partial x = 0 \\ \partial L / \partial y = 0 \\ \partial L / \partial z = 0 \\ \partial L / \partial \lambda = 0 \\ \partial L / \partial \mu = 0 \end{cases}$$

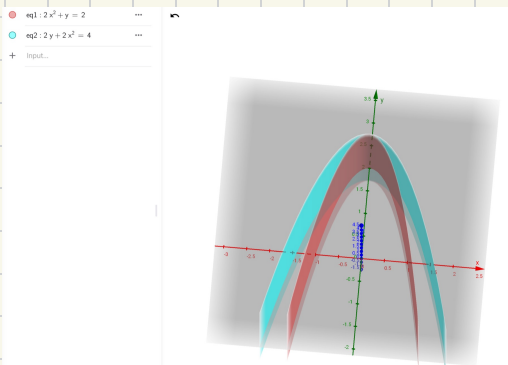
Corollario di weierstrass generalizzato: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ allora esiste il minimo

Punti sul bordo: $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}$

Nessuno dei punti stazionari della funzione si trova all'interno di D

La funzione quindi assume punti di massimo e di minimo sul bordo del dominio: $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$$\Gamma_1 = \{(x, y): 2x^2 + y = 2, x \in [-1, 1]\}, \Gamma_2 = \{(x, y): 4x^2 + y^2 = 4, x \in [-1, 1]\}$$



Spostandosi sulla prima curva: $y = 2 - 2x^2$

$$\Rightarrow f(x, 2 - 2x^2) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1$$

Spostandoci sulla seconda curva troviamo i seguenti punti

$$(0, 2) \rightarrow \text{Già in } \Gamma_1,$$

$$\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \rightarrow f\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{MAX} = \frac{8}{3\sqrt{3}}, \text{ MIN} = 0.$$