



Serie di funzioni:

$$f_n: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{con} \quad S_n = \sum_{i=0}^n f_i(x)$$

Convergenza puntuale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{CONVERGE PUNTUALMENTE AD } f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{SE} \quad S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{PER } n \rightarrow \infty, \quad \forall x \in E$$

Convergenza uniforme

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{CONVERGE UNIFORMEMENTE A } f(x) \quad \text{SE} \quad S_n(x) \rightarrow f \quad \text{UNIFORMEMENTE PER } n \rightarrow \infty$$

Convergenza totale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{CONVERGE TOTALMENTE AD } f \quad \text{SE} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty \quad (\text{CONVERGENTE}) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Osservazione:

SE $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE, ALLORA $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE E QUINDI ANCHE PUNTUALMENTE AD $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E$

Esempio 1:

Prendiamo la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) \cos(x)}{n^2}$

La serie converge totalmente $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\sin(nx) \cos(x)}{n^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} < \infty$

Consideriamo adesso la norma infinito: $\left\| \frac{\sin(nx) \cos(x)}{n^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx) \cdot \cos(x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

Otteniamo quindi la serie notevole: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Che è una serie armonica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \quad \text{PER } \alpha > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\sin(nx) \cos(x)}{n^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \text{Abbiamo quindi convergenza totale}$$

Possiamo allora scrivere che: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix) \cos(x)}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(ix) \cos(x)}{i^2}$

Serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0)^n \quad \text{con } y_0 \in \mathbb{R} \text{ fissato} \Rightarrow f_n(y) = a_n (y - y_0)^n \quad \text{MA PONENDO } x = y - y_0$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f_n(x) = a_n x^n, \quad \text{con } a_n \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi}$$

Nel primo caso $y_0 \rightarrow$ CENTRO DELLA SERIE DI POTENZE

Nel secondo caso $\rightarrow$ SERIE DI POTENZE CON CENTRO ZERO

Osservazione:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge sempre per $x=0$ ma può anche non convergere per nessun altro $x \in \mathbb{R}$

Teorema:

Supponiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converga per $x=y$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-|y|, |y|)$

Osservazione:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ non converge $\forall x: |x| > |y| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ non converge

Raggio di convergenza della serie:

Dati $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze, allora $R = \sup \{ |x|: x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \}$ è il

raggio di convergenza della serie.

Proprietà:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge $\forall x: |x| < R$
e non converge $\forall x: |x| > R$

Esempio 2:

Prendiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$ Vogliamo studiare i valori per cui la serie converge o meno

Poniamo $y = e^{-x} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot y^n$ Che è proprio una serie di potenze

Se $|y| = 1$ Allora non converge $\Rightarrow R \leq 1$

Facciamo vedere che converge per $|y| < 1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$ converge in ad esempio
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n y^n} < 1$ che è vero
perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot y = y < 1$
 $\Rightarrow R=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n y^n$ converge per ogni
 $|y| < 1$ e non converge $\forall y: |y| \geq 1$
 $\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}$ converge $\Leftrightarrow y = e^{-x} < 1$
 $\Leftrightarrow x > 0$
Alfiuso ripetuto che $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$ converge
puntualmente sul dominio $(0, +\infty)$.

