



Convergenza puntuale:

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}^k$, f_n converge puntualmente se $\forall x \in E, \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

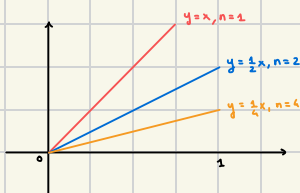
Convergenza uniforme:

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n: E \rightarrow \mathbb{R}^k$, f_n converge uniformemente se $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in E$

Esempio 1:

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \Rightarrow k=1, E = [0, 1], f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x$

Se proviamo a graficare le funzioni:



Chiamiamo $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

Allora $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x \rightarrow f(x) = 0$

La funzione converge quindi puntualmente

Controlliamo se la successione converge anche uniformemente:

$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in E \rightarrow$ Condizione di convergenza uniforme

DATO $\epsilon > 0$ PRENDIAMO $n_\epsilon \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon \Rightarrow n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$. Dato che $x \in [0, 1]$ Andrebbe a diminuire il valore

CON QUESTA SCELTA DI $n_\epsilon : 0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n} x \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon$

Per come è definita la successione

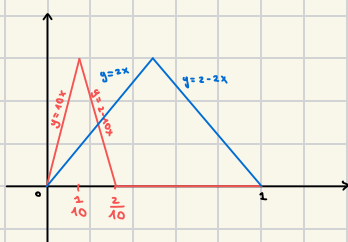
QUINDI: $\forall \epsilon > 0$ POSSIAMO SCEGLIERE n_ϵ IN MODO CHE $|f_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

Esempio 2:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2-nx & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

Se proviamo a graficare le funzioni:



$n=10$

$n=2$

Notiamo che $f_n(x) \rightarrow 0, \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ PUNTUALMENTE

Controlliamo se la funzione converge anche uniformemente:

Supponiamo che $f_n \rightarrow f \equiv 0$ uniformemente.

Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_2, \forall x \in E$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_2 > 0 : \|f_n(x)\| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_2, \forall x \in [0, 1]$

$$\uparrow f(x) = 0$$

Supponiamo di prendere $\varepsilon = \frac{1}{2}$, Allora $\exists n_2 > 0 : |f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_2, \forall x \in [0, 1]$

Supponiamo allora di prendere $x = \frac{1}{n}$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2-nx & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases} \rightarrow f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

Quindi $|f_n(x)| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ La funzione non può convergere uniformemente

Norma infinito: $\|f\|_\infty := \sup \{ \|f(x)\| : x \in E \}$

Teorema: $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ puntualmente

$f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad p \in \mathbb{R} \quad n \rightarrow \infty$

Esempio 3:

$$f_n(x) = x^n(x-1) \quad f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Dobbiamo studiare la convergenza puntuale ed uniforme della funzione

Analizziamo due opzioni: $x = 0, x = 1$.

$$(1) \quad x = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0 \text{ Sempre}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$$

$$(2) \quad x = 1 \Rightarrow f_n(1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$$

Questo termine tende a zero

$$\text{Supponiamo di prendere } x \in (0, 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(x-1) = 0$$

Possiamo quindi scrivere che $f_n \rightarrow f \equiv 0$ in modo puntuale

Studiamo la convergenza uniforme della funzione

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente} \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty = \|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \rightarrow 0 \quad p \in \mathbb{R} \quad n \rightarrow \infty$$

Analizziamo questa norma:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \{ |f_n(x)| \} = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)|$$

$\rightarrow$ Questo termine sarà sempre negativo o nullo

$$\text{Analizziamo il modulo della funzione } |f_n(x)| = |x^n(x-1)| = x^n(1-x)$$

Per trovare il massimo della funzione, calcoliamo i punti stazionari ponendo a zero la derivata prima:

$$\frac{d}{dx} [x^n (1-x)] = \frac{d}{dx} [x^n] \cdot (1-x) + (x^n) \frac{d}{dx} (1-x) = n x^{n-1} (1-x) - x^n$$

$$= x^{n-1} [n(1-x) - x] = x^{n-1} [n - nx - x] = x^{n-1} [n - x(n+1)]$$

La derivata si annulla per: ⁽¹⁾ $x = 0$ ⁽²⁾ $x = \frac{n}{n+1}$

⁽¹⁾

$$f_n(0) = 0$$

$$\text{⁽²⁾ } f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

Calcoliamo il limite per n che tende all'infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^n \cdot 0 = 0$$

La funzione converge quindi anche uniformemente

Teorema $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue su E tali che $f_n \rightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R}$

uniformemente $\Rightarrow$ allora f è continua

Esempio 4:

$$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ nx & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}, \quad f_n \text{ converge puntualmente a } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$