



Esercizio 1:

$$f(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2} \quad \text{Determinare: punti di massimo e minimo locale}$$

Determiniamo il dominio della funzione $\rightarrow$ Non annullandosi mai il denominatore: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Scriviamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{d}{dx}(x) \cdot [1+x^2+y^2] - [x] \cdot \frac{d}{dx}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2+y^2 - [x][2x]}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{d}{dy}(x) [1+x^2+y^2] - [x] \cdot \frac{d}{dy}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Scriviamo quindi la condizione affinché un punto sia stazionario:

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ 1-x^2+y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ 1-x^2+y^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Si annulla solamente se una delle due variabili si annulla}$$

$$\text{Supponiamo che } x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+y^2=0 \rightarrow y^2=-1 \rightarrow \text{Non abbiamo soluzione nei numeri reali} \end{cases}$$

$$\text{Supponiamo che } y=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato due punti stazionari $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$

Adesso vogliamo determinare la natura di questi punti stazionari

Determiniamo la matrice hessiana della funzione:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2+y^2) \cdot [(1+x^2+y^2)^2] - [1-x^2+y^2] \cdot \frac{\partial}{\partial x}[(1+x^2+y^2)^2]}{(1+x^2+y^2)^4} \\ & & &= \frac{(-2x)(1+x^2+y^2)^2 - (1-x^2+y^2)(2)(1+x^2+y^2)(2x)}{(1+x^2+y^2)^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-2x)(1+x^2+y^2) - (4x)(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{(-2x)[1+x^2+y^2 + 2(1-x^2+y^2)]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{-2x[1+x^2+y^2+2-2x^2+2y^2]}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{(-2x)[3-x^2+3y^2]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(1-x^2+y^2)[1+x^2+y^2]^2 - (1-x^2+y^2) \frac{\partial}{\partial y}[(1+x^2+y^2)^2]}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{2y(1+x^2+y^2)^2 - (1-x^2+y^2)(2)(1+x^2+y^2)(2y)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{2y(1+x^2+y^2)^2 - 4y(1-x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{2y(1+x^2+y^2) - 4y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{2y[1+x^2+y^2 - 2(1-x^2+y^2)]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{(2y)[1+x^2+y^2 - 2 + 2x^2 - 2y^2]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$= \frac{2y[-1 + 2x^2 - y^2]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(-2xy)[(1+x^2+y^2)^2] - [-2xy] \frac{\partial}{\partial x}[(1+x^2+y^2)^2]}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2y(1+x^2+y^2)^2 + 2xy(2)(1+x^2+y^2)(2x)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2y(1+x^2+y^2) + 8xy^2}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{2y(-1-x^2-y^2+4x^2)}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{2y(-1-y^2+3x^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(-2xy)[(1+x^2+y^2)^2] - (-2xy) \frac{\partial}{\partial y}[(1+x^2+y^2)^2]}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{(-2x)(1+x^2+y^2)^2 + (2xy)(2)(1+x^2+y^2)(2y)}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{(-2x)(1+x^2+y^2) + 8xy^2}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{(2x)[-1-x^2-y^2+4y^2]}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{2x[-1-x^2+3y^2]}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(-2x) [3 - x^2 + 3y^2]}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{2y [-1 + 3x^2 - y^2]}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \frac{2y (-1 - y^2 + 3x^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{2x [-1 - x^2 + 3y^2]}{(1+x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$$

Vediamo come risulta la matrice hessiana nei punti stazionari $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$

$$\nabla^2 f(A) = \nabla^2 f(-1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{2 [3-4]}{8} & 0 \\ 0 & \frac{(-2)(-2)}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(B) = \nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{(-2)(3-1)}{8} & 0 \\ 0 & \frac{(2)(-2)}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Caratterizzazione delle matrici 2×2

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ simmetrica.

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Risulta:

- $\det A > 0 \Rightarrow A$ è definita
- $\det A = 0 \Rightarrow A$ è semidefinita
- $\det A < 0 \Rightarrow A$ è indefinita

In particolare, se $\det A > 0$,

A è def. positiva se $a_{11} > 0$,
def. negativa se $a_{11} < 0$.

$\det \nabla^2 f(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \in \mathcal{M} = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow$ La matrice è semidefinita positiva $\rightarrow A$ è punto di minimo relativo

$\det \nabla^2 f(B) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \in \mathcal{M} = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow$ La matrice è semidefinita negativa $\rightarrow B$ è punto di massimo relativo

Esercizio 2:

Studiare i punti di massimo e minimo locale:

$$f(x, y) = |xy|(7x + 7y - 1) \quad \text{Ristretta agli insiemi} \quad A^+ = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

$$A^- = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$$

Consideriamo il restringimento all'insieme : A^+ .

Potendo solamente assumere valori positivi le variabili, possiamo levare il valore assoluto:

$$f(x, y) = xy(7x + 7y - 1) = 7x^2y + 7xy^2 - xy$$

Calcoliamo le derivate parziali per capire dove il gradiente è nullo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14xy + 7y^2 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2 + 14xy - x$$

$$\begin{cases} 14xy + 7y^2 - y = 0 \\ 7x^2 + 14xy - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(14x + 7y - 1) = 0 \\ x(7x + 14y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee 14x + 7y - 1 = 0 \\ x = 0 \vee 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi 4 combinazioni:

$$(1) \quad y = 0, x = 0 \Rightarrow A = (0, 0)$$

$$(2) \quad \begin{cases} y = 0 \\ 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1/7 \end{cases} \Rightarrow B = (1/7, 0)$$

$$(3) \quad \begin{cases} 14x + 7y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 1/7 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 1/7)$$

$$(4) \quad \begin{cases} 14x + 7y - 1 = 0 \\ 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 14x + 7y \\ 1 = 7x + 14y - 14x - 7y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 21y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{21} \\ -7x + 7y = 0 \rightarrow x = y \Rightarrow x = \frac{1}{21} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right)$$

$$A, B, C \rightarrow \text{Non appartengono ad } A^+$$

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 14xy + 7y^2 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^2 + 14xy - x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 14y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 14x + 14y - 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 14x$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 14y & 14x + 14y - 1 \\ 14x + 14y - 1 & 14x \end{pmatrix}$$

Caratterizziamo il punto appartenente all'insieme

$$\nabla^2 f(0) = \nabla^2 f\left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right) = \begin{pmatrix} \frac{14}{21} & \frac{14}{21} + \frac{14}{21} - 1 \\ \frac{14}{21} + \frac{14}{21} - 1 & \frac{14}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \det > 0$$

$$\lambda_{11} = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \text{La matrice è definita positiva} \rightarrow \text{il punto D è un minimo locale}$$

Consideriamo adesso il restringimento all'altro insieme : $A^- = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$

$$f(x, y) = |xy|(7x + 7y - 1) \quad \text{Che ristretta all'insieme è} \quad f(x, y) = -xy(7x + 7y - 1) \\ = -7x^2y - 7xy^2 + xy$$

Calcoliamo le derivate parziali per capire dove il gradiente è nullo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -14xy - 7y^2 + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -7x^2 - 14xy + x$$

$$\begin{cases} -14xy - 7y^2 + y = 0 \\ -7x^2 - 14xy + x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(-14x - 7y + 1) = 0 \\ x(-7x - 14y + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14xy + 7y^2 - y = 0 \\ 7x^2 + 14xy - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(14x + 7y - 1) = 0 \\ x(7x + 14y - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee 14x + 7y - 1 = 0 \\ x = 0 \vee 7x + 14y - 1 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che il gradiente della funzione è lo stesso, quindi sono gli stessi anche i punti stazionari

$$A = (0, 0), \quad B = (1/7, 0), \quad C = (0, 1/7), \quad D = \left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right)$$

Nessuno di questi punti appartiene all'insieme di restrizione

Non ci sono punti stazionari nell'insieme a cui abbiamo ristretto

Esercizio 3

Studiare i punti di massimo e minimo locale:

$$f(x, y) = 3x^2 - xy^2$$

Determiniamo il dominio della funzione: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

Calcoliamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 6x - y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \textcircled{1} \\ y = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = 0 \\ -y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow A = (0, 0)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y = 0 \\ 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Troviamo lo stesso punto di prima}$$

Calcoliamo l'espressione della matrice hessiana

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$$

$$\Rightarrow \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(A) = \nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(0, 0) = 6 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 \rightarrow A \text{ è semi definita}$$

Non possiamo dire nulla su questo punto se non facciamo uno studio più approfondito

Esercizio 4:

Studiare i punti di massimo e minimo locale:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z^2 - 1)^2 + 12$$

Determiniamo il gradiente della funzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2(z^2 - 1)(2z) = 4z(z^2 - 1) = 4z^3 - 4z$$

Vediamo dove si annulla il gradiente:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 4z(z^2 - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z(z^2 - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1 \end{cases}$$

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (0, 0, 1), \quad C = (0, 0, -1)$$

Determiniamo l'hessiana della funzione:

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12z^2 - 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4z^3 + 4z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12z^2 + 4$$

$$\nabla^2 f(A) = \nabla^2 f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(B) = \nabla^2 f(C) = \nabla^2 f(0, 0, 1) = \nabla^2 f(0, 0, -1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Definizione Una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$ è definita ^[negativa] positiva se tutti i suoi autovalori sono ^[positivi] ^[negativi].

Determiniamo gli autovalori delle due matrici, dobbiamo calcolare

$$\det(\lambda I - A) \quad \text{e} \quad \det(\lambda I - B)$$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^2(\lambda+4) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -4 \Rightarrow \text{Abbiamo un autovalore negativo}$$

→ La matrice non è definita $\Rightarrow A$ è un punto di sella

$$\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-8 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B) = (\lambda-2)^2(\lambda-8) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 8 \rightarrow \text{Tutti gli autovalori sono positivi}$$

La matrice è quindi definita positiva $\rightarrow B$ e C sono punti di minimo locale