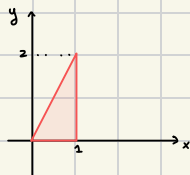




Esempio:



Scrivere A come normale all'asse x:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$f(x,y) = y$$

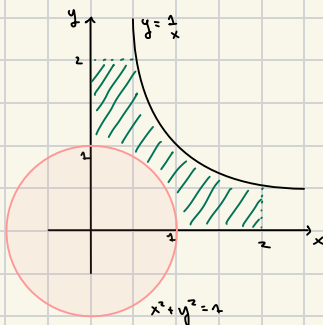
Calcolare l'integrale della funzione su A

$$\int_A f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} y dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Esercizio 1:

Calcolare $\int_A (x+y) dx dy$ con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, xy \leq 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

Cominciano con il graffiare su un piano tutte le condizioni:

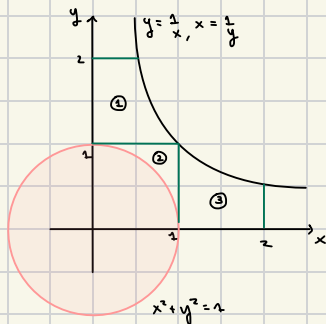


$$x^2 + y^2 \geq 1 \rightarrow \text{Parte esterna alla circonferenza di raggio 1}$$

$$xy \leq 1 \rightarrow y \leq \frac{1}{x} \rightarrow \text{Parte di grafico sotto la curva}$$

La parte di grafico su cui dobbiamo integrare risulta quella evidenziata in verde

Proviamo a suddividere il dominio su cui vogliamo integrare in tre parti



Calcoliamo il primo integrale partendo con lo scrivere il dominio di integrazione:

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}\}$$

$$\begin{aligned}\iint_{A_1} f(x,y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^{2y} (x+y) \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{2y} dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y \right] dy \\&= \int_1^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right) y^2 + 2y \right] dy = \left[\frac{1}{6}y^3 + y^2 \right]_1^2 = \left\{ \left[-\frac{1}{6} + 2 \right] - \left[-\frac{1}{6} + 1 \right] \right\} \\&= \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo integrale partendo dalla scrittura del dominio:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned}\iint_{A_2} f(x,y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x+y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx \\&= \int_0^1 \left\{ \left[x + \frac{1}{2} \right] - \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} \right] \right\} dx = \int_0^1 \left[\underbrace{x + \frac{1}{2}} - \underbrace{x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2}} \right] dx \\&= \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} \, dx + \int_0^1 -x\sqrt{1-x^2} \, dx = \\&= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2} \, dx \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1-x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right\}_0^1 \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left[(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} [0 - 1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Essendo il terzo integrale simmetrico al primo, il risultato sarà lo stesso:

$$\iint_{A_3} f(x,y) \, dx \, dy = \frac{5}{6}$$

Quindi il risultato è:

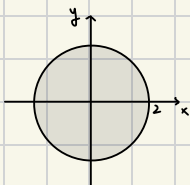
$$\iint_A f(x,y) \, dx \, dy = \left(\frac{5}{6} \right) (2) + \frac{1}{3} = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{15}{6} + \frac{2}{6} = \frac{17}{6}$$

Esercizio 2:

Calcolare: $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ dove A = cerchio con centro $(0,0)$ e raggio 2

Proviamo con l'uso delle coordinate polari:

Cominciamo con il disegno del dominio:



Scriviamo il cambio di coordinate e calcoliamo il determinante del cambio:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\det \nabla \Phi(\rho, \theta) = \rho$$

$$\rightarrow \iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \iint_B (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\theta = 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \cdot \left[\frac{16}{4} - 0 \right] = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

Esercizio 3:

Calcolare: $\iint_A x \, dx \, dy$ con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 \leq 9) \wedge (\text{Siamo nel quarto quadrante})\}$

Disegniamo il dominio:

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \int_0^3 \rho^2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta \, d\theta \, d\rho = \frac{1}{3} \left[\rho^3 \right]_0^3 \cdot (-1) \left[\sin \theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3} [27 - 0] (-1) (0 - 1) = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9$$

Esercizio 4:

Calcolare: $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ con $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$, $f(x, y, z) = z$.

Formula integrale per colonne: $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \cdot \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) \, dz$

dove $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y)\}$

$x^2 + y^2 \leq 2 \rightarrow$ Parte interna della circonferenza di raggio $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^3 z \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\theta \int_0^3 z \, dz = \left(\frac{1}{2}\right) \left[r^2\right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(2)(2\pi)(9) = 9\pi \end{aligned}$$

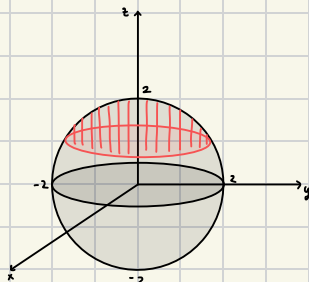
Esercizio 5:

Calcolare: $\iiint_V x^2 y z \, dx \, dy \, dz$ dove $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$ Sfera di raggio 2

Integrazione per sezioni: $\iint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \iint_{S_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

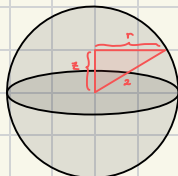
Applicando questa formula: $\iiint_V x^2 y z \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 \iint_{S_z} x^2 y z \, dx \, dy \, dz$

Proviamo a disegnare il dominio di integrazione



Dobbiamo scrivere l'espressione della sezione in una maniera conveniente:

$S_z = \pi r^2$ Ma il raggio cambia al variare della quota a cui ci troviamo:



Possiamo scrivere quindi il raggio in funzione della quota:

$$z^2 + r^2 = 2^2 \Rightarrow r = \sqrt{4 - z^2}$$

$$\iiint_V x^2 y z \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 dz \iint_{S_z} x^2 y z \, dx \, dy = \int_1^2 z \, dz \iint_{B((0,0,z), \sqrt{4-z^2})} x^2 y \, dx \, dy$$

Calcoliamo l'integrale sulla sezione separatamente

L'area della generica sezione sarà: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} x^2 y \, dx \, dy$

Passando alle coordinate polari: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (p \cos \theta)^2 p \sin \theta \, p \, dp \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} p^4 \cos^2 \theta \sin \theta \, dp \, d\theta$

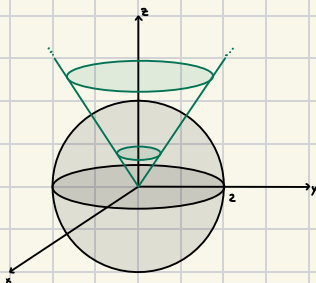
$$= \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{4-z^2}} p^4 \, dp = 0$$

Questo integrale è nullo

Esercizio 6:

Calcolare: $\iiint_V dx dy dz$ Dove $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \cdot x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, z \geq 0\}$

Proviamo a graficare il dominio:



Proviamo a trovare i punti di intersezione fra i solidi:

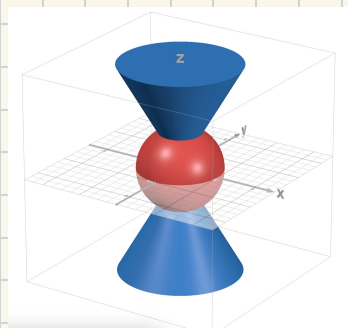
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 4 \\ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3} \end{cases}$$

Ci interessa solamente l'intersezione positiva

$$\rightarrow \begin{cases} z^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \\ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Proviamo ad utilizzare le coordinate sferiche:

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta, y = \rho \cos \varphi \sin \theta, z = \rho \sin \varphi$$



Sappiamo che se $z = \sqrt{3}$ Allora $\rho = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 2 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = \varphi_{\min}$$

$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$ Come possiamo vedere dal grafico

Il determinante del passaggio a coordinate sferiche è: $\rho^2 \cos \varphi$

$$\Rightarrow 0 = \rho \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos \varphi d\varphi = \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} [\rho^3]_0^2 \cdot (2\pi) \cdot [\sin \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} (2\pi) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$