



Richiami teorici:

Sia S un insieme
 $(f_n) \rightarrow f$ puntualmente in S se
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in S$

$(f_n) \rightarrow f$ uniformemente in S se
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Conv. uniforme $\Leftrightarrow$ conv. puntuale

Esercizio 1:

Studiare la convergenza della successione di funzioni:

$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Definita ponendo: $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$E = [-1, 1]$

Facciamo una considerazione e passando al limite: $\forall x \in [-1, 1] = E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$

La successione quindi converge puntualmente a $f(x) = |x|$

Studiamo adesso la convergenza uniforme:

Affinché la successione converga uniformemente: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Valutiamo l'espressione: $|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right|$
 $= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \geq 0$

Proviamo a razionalizzare: $\left[\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right] \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} =$

$$= \frac{(x^2 + \frac{1}{n}) + \sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\Rightarrow$ La successione converge anche uniformemente $\Rightarrow$ Come avevamo già trovato, la funzione converge anche puntualmente

Esercizio 2:

Sia $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n) \quad \forall n \geq 1$

Determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della successione:

Supponiamo di prendere $x \in (0,1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n(1-x^n) = 0(1-0) = 0$

Prendiamo $x=0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$, $x=1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$

→ La successione converge puntualmente a $f(x) = 0$ Nell'intervallo $I = [0,1]$

Studiare la convergenza uniforme di (f_n) su I e sugli intervalli $[0,b]$ con $0 < b < 1$

$f_n \rightarrow f$ Uniformemente sull'intervallo se $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad p \in \mathbb{N} \quad n \rightarrow \infty$

Valutiamo allora l'espressione $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)|$ In quanto $f(x) = 0$

Indiano allora a valutare $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |x^n(1-x^n)| = \sup_{x \in [0,1]} x^n(1-x^n)$
 ↳ In quanto x è definito nell'intervallo $[0,1]$

Calcoliamo il massimo della funzione

$$f_n(x) = x^n(1-x^n) \Rightarrow f_n'(x) = \frac{d}{dx}(x^n)(1-x^n) + x^n \cdot \frac{d}{dx}(1-x^n) = nx^{n-1}(1-x^n) + x^n(-nx^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}(1-x^n) - nx^n \cdot x^{n-1} = nx^{n-1} - nx^{n-1} \cdot x^n - nx^n \cdot x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}[1-x^n-x^n] = nx^{n-1}[1-2x^n]$$

$$f_n'(x) = 0 \rightarrow nx^{n-1}[1-2x^n] = 0 \quad \textcircled{1} x = 0, \quad \textcircled{2} 2x^n = 1 \rightarrow x^n = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{1} f_n(0) = x^n(1-x^n) \Big|_{x=0} = 0$$

$$\textcircled{2} f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n \left[1 - \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n\right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Controlliamo se la funzione converge uniformemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Su questo intervallo $[0,1]$ La funzione non converge uniformemente

Supponiamo di limitarci all'intervallo $[0,b]$ Fissando b

Osserviamo la derivata per capire l'andamento della funzione $1 - 2x^n > 0 \Rightarrow x^n < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

Per $x < \bar{x}$ La funzione è crescente, invece per $x > \bar{x}$ La funzione è decrescente

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

Supponiamo quindi di prendere n in modo sufficientemente grande in modo che il punto stazionario si sposti oltre b

In questo intervallo allora la funzione è crescente $\Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = f_n(b)$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) = 0 \Rightarrow$ La successione converge quindi uniformemente in $[a, b]$

Esercizio 3:

Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2 \cos(nx)}{n^3 + 1}$

Studiamo la convergenza puntuale

Essendo presente il termine coseno, la serie non può essere solo a termini positivi $\rightarrow$ andiamo ad analizzare la convergenza assoluta

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \nearrow -1 \leq \cos(nx) \leq 1 \\ \left| \frac{nx^2 \cos(nx)}{n^3 + 1} \right| \leq \left| \frac{nx^2}{n^3 + 1} \right| = \frac{nx^2}{n^3 + 1} \leq \frac{x^2}{n^2 + \frac{1}{n}} \leq \frac{x^2}{n^2} \end{array} \\ & \text{Se leviamo il termine frazionario andiamo a dividere per un numero più piccolo trovando un numero più grande} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \text{La serie è quindi convergente}$$

Essendo la serie convergente assolutamente, sarà anche convergente puntualmente

Studiamo la convergenza totale:

$$f_n(x) = \underbrace{\frac{n}{n^3 + 1}}_{\text{Funzione limitata}} \cdot \underbrace{x^2 \cdot \cos(nx^2)}_{\text{Funzione oscillante}} \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty$$

Non abbiamo quindi convergenza totale

Studiamo la convergenza uniforme: affinché la successione converga uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x)| = 0$$

Ma abbiamo visto che questa cosa non è vera $\rightarrow$ non abbiamo convergenza uniforme

Proviamo ad analizzare la convergenza in un intervallo: $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$ Con $c = \max(|x_1|, |x_2|)$

$$\left| \frac{nx^2 \cos(nx)}{n^3 + 1} \right| \leq \left| \frac{nc^2 \cos(nx)}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{nc^2}{n^3 + 1} < \frac{c^2}{n^2 + \frac{1}{n}} < \frac{c^2}{n^2}$$

$$\text{Quindi } c^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \text{Abbiamo quindi convergenza uniforme su qualsiasi intervallo}$$

Esercizio 4:

Studiare: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx}$ su $S = (-\infty, +\infty)$

Studiamo la convergenza puntuale: deve tendere a zero il termine n-esimo della serie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx} = ?$$

Il Termine esponenziale converge se prendiamo x negative, altrimenti diverge

Questo termine dipende se è pari o dispari

Questo termine tende ad uno

Studiamo quindi la convergenza per $S' = (-\infty, 0)$

Convergenza totale: $\sup_{x \in S'} |f_n(x)| = \sup_{x \in S'} \left| (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx} \right| = \frac{n^2}{n^2+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_S$ Non converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ Non converge totalmente su $S' = (-\infty, 0)$

Proviamo a studiare la convergenza su un intervallo $S'' = (-\infty, a)$ con $a < 0$

$$\|f_n\|_{S''} = \sup_{x \in S''} \left| (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx} \right| = \sup_{x \in S''} \left| \frac{n^2}{n^2+1} e^{nx} \right| = \frac{n^2}{n^2+1} e^{an} = \frac{n^2}{n^2+1} (e^a)^n$$

Questo termine presenta massimo in e^{-an}

$$= \frac{n^2}{n^2+1} b^n \quad \text{Ed essendo } 0 < b < 1 \text{ Poiché } a < 0$$

Proviamo ad usare il criterio del rapporto: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \cdot b^{n+1}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \cdot b^{n+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^2} \cdot \frac{1}{b^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b \cdot 1 \cdot 1 = b \quad \text{con } 0 < b < 1$$

$\Rightarrow \forall \epsilon \quad b = L < 1 \rightarrow \text{La serie converge assolutamente}$

Esercizio 5:

Studiare $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x+n^2}{x^2+3n^2} \rightarrow$ Non capisco la soluzione

Esercizio 6:

Teoria: Serie di potenze
 è del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ (*)
 x_0 centro.
 $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ raggio di convergenza.
 Tesi Cauchy-Hadamard:
 (*) converge puntualmente in (x_0-R, x_0+R)
 (*) converge uniforme in $[x_0-p, x_0+q]$, $p, q \in \mathbb{R}$
 (*) non converge $\forall x \notin [x_0-R, x_0+R]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x \sin^n\left(\frac{x}{n}\right) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^n\left(\frac{x}{n}\right)$$

Proviamo a studiare la convergenza uniforme

$$|x| \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \sin^n\left(\frac{x}{n}\right) \right| = |x| \sum_{n=1}^{+\infty} n \underbrace{\left| \sin^n\left(\frac{x}{n}\right) \right| \cdot \left| \frac{x}{n} \right|^n}_{\left| \frac{x}{n} \right|^n} \leq |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot |x|^n}{n^n}$$

↓
≤ 1

Possiamo vederla come una serie di potenze:
 $y = |x|$, $an = \frac{n}{n^n}$, $y_0 = 0$

Proviamo a calcolarci il raggio di convergenza:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{Analizziamo il limite:} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{1/n} = 0 \Rightarrow R \rightarrow \infty$$

Se abbiamo raggio di convergenza infinita $\rightarrow$

Cauchy-Hadamard: - conv puntuale $|x| < \infty$
 - conv uniforme per ogni compatto in $(-\infty, +\infty)$

Tramite il criterio del confronto so che questi risultati, valgono anche per $|x| \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \sin \frac{x}{n} \right|^n$
 e per la conv. assoluta impiega questa notazione valgono anche per $x \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\sin \frac{x}{n} \right)^n$

