



Esercizio 1:

Individuare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$

Soggetta ai vincoli $x > 0, x^2 - 2xy = 1$

Metodo parametrico:

Prendiamo il secondo vincolo: $x^2 - 2xy = 1$ Ed esplicitiamo y $-2xy = 1 - x^2 \rightarrow 2xy = x^2 - 1$

$$\rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

Effettuiamo adesso la seguente parametrizzazione:
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2 - 1}{2t} \end{cases}$$

Ci riconduciamo quindi alla ricerca del massimo o minimo assoluto della funzione $f(t, \frac{t^2 - 1}{2t}) = h(t) = 2t^2 + \frac{t(t^2 - 1)}{2t} + 2\left[\frac{(t^2 - 1)}{2t}\right]^2$

$$\begin{aligned} \rightarrow h(t) &= 2t^2 + \frac{t(t^2 - 1)}{2t} + \frac{2(t^2 - 1)^2}{4t^2} = 2t^2 + \frac{t^2 - 1}{2} + \frac{[t^4 - 2t^2 + 1]}{2t^2} \\ &= 2t^2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{t^4}{2t^2} - \frac{2t^2}{2t^2} + \frac{1}{2t^2} = 2t^2 + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} - 1 + \frac{1}{2t^2} \\ &= 3t^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2} \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la derivata della funzione trovata:

$$h'(t) = 6t + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(t^{-2}) = 6t + \frac{1}{2}(-2)(t^{-3}) = 6t - \frac{1}{t^3} = \frac{6t^4 - 1}{t^3}$$

Studiamo il segno per capire se il punto che troviamo è un massimo o un minimo:

$$h'(t) \geq 0 \rightarrow 6t^4 - 1 \geq 0 \rightarrow t^4 \geq \frac{1}{6} \Rightarrow t \leq -\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cup t \geq \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

Uno dei vincoli era $x > 0 \Rightarrow t > 0 \Rightarrow$ Rimane come punto stazionario solamente $t = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$

Ed essendo la derivata prima crescente oltre a questo punto, lo stesso risulta un minimo assoluto per la funzione

$$\text{Calcoliamo il valore di minimo: } h(t) = 3t^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2} = \frac{1 - \sqrt{6}}{2\sqrt[4]{6}}$$

Metodo dei moltiplicatori di lagrange:

Definiamo l'insieme $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2xy = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = x^2 - 2xy - 1 = 0\}$

Calcoliamo i gradienti delle funzioni $f(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2, \frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y \Rightarrow \nabla f(x,y) = (4x + y, x + 4y)$

$$g(x,y) = x^2 - 2xy - 1, \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2y, \frac{\partial g}{\partial y} = -2x = \nabla g(x,y) = (2x - 2y, -2x)$$

Costruiamo adesso il seguente sistema:

$$\begin{cases} p = 0 \\ \nabla f = \lambda \nabla p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - 1 = 0 \\ (4x + y, x + 4y) = \lambda (2x - 2y, -2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - 1 = 0 & (a) \\ 4x + y = 2\lambda x - 2\lambda y & (b) \\ x + 4y = -2\lambda x & (c) \end{cases}$$

Risolvi il sistema:

$$(c) \quad x + 4y = -2\lambda x \rightarrow 4y = -2\lambda x - x = -x(2\lambda + 1) \Rightarrow y = \frac{-x(2\lambda + 1)}{4}$$

$$(b) \quad 4x + y = 2\lambda x - 2\lambda y \rightarrow 4x - \frac{x(2\lambda + 1)}{4} = 2\lambda x - 2\lambda \left(\frac{-x(2\lambda + 1)}{4} \right)$$

$$\rightarrow (4)(4x) - x(2\lambda + 1) = (4)(2\lambda x) - (2\lambda)(4) \left[\frac{-x(2\lambda + 1)}{4} \right]$$

$$\rightarrow 16x - 2\lambda x - x = 8\lambda x - (2\lambda)(-2\lambda x - x)$$

$$\rightarrow 16x - 2\lambda x - x = 8\lambda x + 4\lambda^2 x + 2\lambda x$$

$$\rightarrow 15x = 10\lambda x + 4\lambda^2 x + 2\lambda x \rightarrow 15x = 12\lambda x + 4\lambda^2 x \rightarrow x(4\lambda^2 + 12\lambda - 15) = 0$$

Questa uguaglianza è vera per: $x = 0 \rightarrow$ Ma uno dei vincoli era $x > 0 \Rightarrow$ Non accettabile

$$(2) \quad 4\lambda^2 + 12\lambda - 15 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(4)(-15)}}{8} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{6}}{8} \rightarrow \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}$$

Andiamo a sostituire i due valori di lambda nelle due equazioni rimanenti:

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}$$

(c)

$$y = \frac{-x(2\lambda + 1)}{4} = \frac{-2\lambda x - x}{4} = -\frac{\lambda x}{2} - \frac{x}{4} = -\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{6}\right)\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4} = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{6}\right)\frac{x}{2} - \frac{x}{4}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{6}}{2} x$$

(a)

$$x^2 - 2xy - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x^2 \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{2} \right) - 1 = 0 \rightarrow x^2 - x^2(1 + \sqrt{6}) - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2(1 - 1 - \sqrt{6}) = 1 \Rightarrow x^2(-\sqrt{6}) = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \text{Che è impossibile}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}$$

(c)

$$y = \frac{-x(2\lambda + 1)}{4} = \frac{-2\lambda x - x}{4} = -\frac{\lambda x}{2} - \frac{x}{4} = -\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{6}\right)\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{4} = \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)x - \frac{x}{4}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{6}}{2} x$$

(a)

$$x^2 - 2xy - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x^2 \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{2} \right) - 1 = 0 \rightarrow x^2 + x^2(\sqrt{6} - 1) = 1 \rightarrow x^2(1 + \sqrt{6} - 1) = 1$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}}} \quad \text{Ma ricordandoci del vincolo } x > 0 \quad \text{Scartiamo la soluzione negativa}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \textcircled{c)} y = \frac{1 - \sqrt[4]{6}}{2} x \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt[4]{6}}{2 \sqrt[4]{6}}$$

Quindi il pto che soddisfa il teorema è $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1 - \sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{6}} \right)$ ed è un pto di minimo.



Segue da: [Corollario di Weierstrass generalizzato]

Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Allora esiste il minimo.

(*)

La nostra funzione è continua, limitata inferiormente (≥ 0), quindi applicando il risultato si ottiene che ha un minimo.

Esercizio 2:

$$f(x, y, z) = xy + z^2 \quad \text{Con vincoli} \quad \begin{cases} z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$$

Dalla teoria, i punti di massimo e minimo vanno cercati nella lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = \underbrace{xy + z^2}_{f(x, y, z)} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z)$$

Ci costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x - \mu = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda y - \mu = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - 2\lambda z - \mu = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 & (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(x + y + z) = 0 & (5) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1) \quad y = 2\lambda x + \mu, \quad (2) \quad x = 2\lambda y + \mu \\ (1) - (2) = y - x = 2\lambda x + \mu - 2\lambda y - \mu = 2\lambda x - 2\lambda y \rightarrow \\ \rightarrow y + 2\lambda y = x + 2\lambda x \rightarrow y(2\lambda + 1) = x(2\lambda + 1) \Rightarrow y = x \\ \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 2\lambda y + \mu \\ 2z - 2\lambda z - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z + 2x = 0 \rightarrow z = -2x \end{cases} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 2\lambda y + \mu \\ 2z - 2\lambda z - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z + 2x = 0 \rightarrow z = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x(1 - 2\lambda) = \mu \\ 2z - 2\lambda z - \mu = 0 \\ x^2 + x^2 + 4x^2 = 1 \rightarrow 6x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \\ z = -2x \end{cases}$$

Sostituiamo il valore positivo di x:

$$x = + \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow z = -2 \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{Ma dobbiamo rispettare } z \geq 0 \Rightarrow \text{Dobbiamo scartare questo punto}$$

Sostituiamo il valore negativo di x:

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Dato che come prima $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)} xy + z^2 = +\infty$

Ed essendo $P = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ L'unico punto stazionario allora il punto è sicuramente un minimo dati i vincoli

Esercizio 3:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{Con vincoli} \quad x+y-z \leq 1, \quad x+y+z=0$$

Metodo parametrico:

Troviamo l'intersezione tra i due vincoli
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ x+y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -1/2 \\ y = \frac{1}{2} - x \end{cases}$$

Possiamo scrivere l'insieme ammissibile come $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z)^T = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}-x \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\}$

Possiamo quindi definire $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \left(t, \frac{1}{2}-t, -\frac{1}{2}\right), t \in (-\infty, +\infty) \rightarrow$ Rappresentazione parametrica del vincolo

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow f\left(t, \frac{1}{2}-t, -\frac{1}{2}\right) = t^2 + \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)(t) + t^2 + \frac{1}{4} \\ = t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2 + \frac{1}{4} = 2t^2 - t + \frac{1}{2}$$

Andiamo a studiare la derivata prima $f'\left(t, \frac{1}{2}-t, -\frac{1}{2}\right) = 4t - 1$ Che si annulla per $t = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x = t = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} - t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Trattandosi di una parabola rivolta verso l'alto e rispettando il punto i vincoli,} \\ \text{allora si tratta di un punto di minimo assoluto} \end{array}$$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

Scriviamo la lagrangiana: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y - z - 1) - \mu(x + y + z)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow 2x - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow 2y - \lambda - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow 2z + \lambda - \mu = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow x + y - z - 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \rightarrow x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda - \mu = 0 \\ 2y - \lambda - \mu = 0 \\ 2z + \lambda - \mu = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - \lambda - \mu = 0 \\ 2y - \lambda - \mu = 0 \\ 2z + \lambda - \mu = 0 \\ x + y - z + 1 = \frac{1}{2} \\ z + 1 + z = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu - 1 - \mu = 0 \\ 2y - \mu - 1 - \mu = 0 \\ \lambda = \mu + 1 \\ x + y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu - 1 - \mu = 0 \\ 2y - \mu - 1 - \mu = 0 \\ \lambda = \mu + 1 \\ x + y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2\mu + 1 \\ 2y = 2\mu + 1 \\ \lambda = \mu + 1 \\ x + y = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \mu + \frac{1}{2} \\ y = \mu + \frac{1}{2} \\ \lambda = \mu + 1 \\ \mu + \frac{1}{2} + \mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \mu + \frac{1}{2} \\ y = \mu + \frac{1}{2} \\ \lambda = \mu + 1 \\ \mu = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{3}{4} \\ \mu = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

Sempre per lo stesso motivo di (*) possiamo concludere che si tratta di un minimo assoluto

Esercizio 4:

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4 \quad \text{Con dominio} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}$$

Contenendo anche punti interni dobbiamo anche studiare i punti all'interno dell'insieme:

Calcoliamo i punti stazionari:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2 \Rightarrow \nabla f(x, y) = (8x + 4xy, 2y + 2x^2)$$

$$\begin{cases} 8x + 4xy = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + xy = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(2 + y) = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} y = -2$$

$$(i) \quad x = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A = (0, 0)$$

$$(ii) \quad y = -2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow B = (-\sqrt{2}, -2), \quad C = (\sqrt{2}, -2)$$

Verifichiamo se i punti rientrano all'interno del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}$$

$$A \rightarrow (1) \quad 0 \leq 4 \quad \text{OK} \quad (1) \quad 0 \geq 2 \quad \text{NO!}$$

$$B \rightarrow (1) \quad 4(-\sqrt{2})^2 + (-2)^2 = 4(2) + 4 = 8 + 4 = 12 \leq 4 \quad \text{NO!}$$

$$C \rightarrow (1) \quad 4(+\sqrt{2})^2 + (-2)^2 = 12 \leq 4 \quad \text{NO!}$$

Nessuno dei punti trovati si trova all'interno del dominio

Essendo la funzione continua assume sicuramente un massimo e un minimo sul bordo ∂D

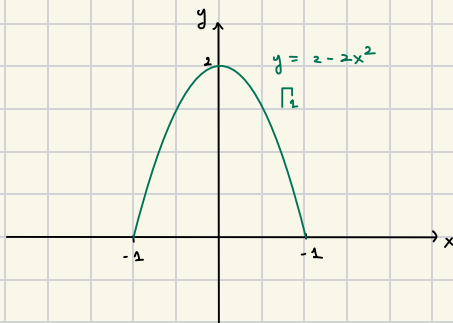
Disegnano su un piano le due curve date dai vincoli

$$(1) \quad 4x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow y^2 \leq 4 - 4x^2 \Rightarrow y \leq \sqrt{4 - 4x^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Il valore all'interno della radice esiste solamente per $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, x \in [-1, 1]\}$$

$$(2) \quad 2x^2 + y \geq 2 \rightarrow y \geq 2 - 2x^2 \Rightarrow \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y \geq 2\}$$



Spostiamoci sulla seconda curva

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4$$

$$\begin{aligned} y = 2 - 2x^2 \rightarrow f(x, 2 - 2x^2) &= 4x^2 + (2 - 2x^2)^2 + 2x^2(2 - 2x^2) - 4 \\ &= 4x^2 + 4 + (2)(2)(-2x^2) + 4x^4 + 4x^2 - 4x^4 - 4 \\ &= \underbrace{4x^2 + 4} - \underbrace{8x^2} + \underbrace{4x^4} + \underbrace{4x^2 - 4x^4} - \underbrace{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_2$$

Spostiamoci adesso sulla prima curva

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4, x \in [-1, 1]\} \Rightarrow p(x, y) : 4x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Proviamo ad usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 4xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

$$\begin{cases} g=0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 8x + 4xy = 8\lambda x \\ 2y + 2x^2 = 2\lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + xy = 2\lambda x \\ y + x^2 = \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} - & - & - & - \\ 2x + xy - 2\lambda x = 0 \\ - & - & - & - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ x(2 + y - 2\lambda) = 0 \\ y + x^2 = \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=2\lambda-2 \end{matrix}$$

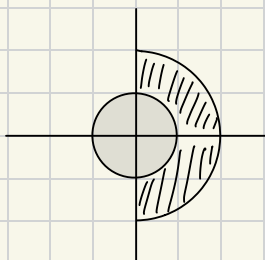
$$(i) \ x=0 \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ y + x^2 = \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = (-2, 0) \\ B = (2, 0) \end{matrix}$$

$$(ii) \ y = 2\lambda - 2 \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ y + x^2 = \lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 2y + 2x^2 = 2\lambda y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 2y + 2x^2 = y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 2x^2 = 4 \\ y^2 = 2x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \\ y = \sqrt{2}x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Esercizio 5:

$$f(x, y) = (y-x)^2 \quad \text{max/min in } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$



Cerchiamo i punti stazionari della funzione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(y-x)(-1) = -2(y-x) = 2(x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(y-x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ 2(y-x) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y \end{cases}$$

Essendo $f \geq 0$ in $D \rightarrow$ I punti stazionari sono anche punti di minimo assoluto

Punti massimali interni a D :

$$\nabla f(x,y) = (2x-2y, 2y-2x) = (0,0)$$

da cui $x=y$. Quindi i p.ti massimali interni a D sono

quello che $f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2$ tutti punti sono di massimo assoluto.

Dato che $D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$a) \Gamma_4 = \{(x,y) : y \in [0,2]\} \quad f(x,y) = y^2 \quad \text{con } f(0,2) = 2 \neq f(0,0) = 0$$

$$\Gamma_3 = \{(x,y) : y \in [0,2]\} \quad f(x,y) = y^2 \quad \text{con } f(0,2) = 2 \neq f(0,0) = 0$$

$$b) \Gamma_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4, x > 0\}, \quad \Gamma_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4, x < 0\}$$

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

Punti massimali assoluti

$$\begin{cases} 2x-2y = \lambda \cdot 2x \\ 2y-2x = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2 = 4 \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Per } x < 0 \text{ si ha che } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \neq f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2$$

Confrontando i valori ottenuti si ha che:

$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono i punti di massimo assoluto con valore 0 e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è un punto di massimo con valore 2.

