



Esercizio 1

Equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(x) + 4y(x) = xe^x$$

Step 1: troviamo una soluzione all'omogenea associata

$$y''(x) + 4y(x) = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Soluzione dell'omogenea

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha_1 e^{2it} + \alpha_2 e^{-2it} = \alpha_1 [\cos(2t) + i\sin(2t)] + \alpha_2 [\cos(2t) - i\sin(2t)] \\ &= \alpha_1 \cos(2t) + \alpha_1 i \sin(2t) + \alpha_2 \cos(2t) - \alpha_2 i \sin(2t) \\ &= \alpha_1 (1+i) \cos(2t) + \alpha_2 (1-i) \sin(2t) \\ &= a \cos(2x) + b \sin(2x) \end{aligned}$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo

$$\bar{y}(x) = a(x) \cos(2x) + b(x) \sin(2x)$$

Utilizziamo il metodo di somiglianza $p(x) = a(x)e^{\lambda x} = xe^x$, $\lambda = 1 \neq \lambda_{1,2} = \pm 2i$

La soluzione particolare è quindi della forma: $\bar{y}(x) = e^x (B + Ax) = Be^x + Axe^x = e^x (A + B)$

Calcoliamone la derivata $\bar{y}'(x) = Be^x + A(e^x + xe^x) = Be^x + Ae^x + Axe^x = Ae^x + (A + B)e^x$

Calcoliamo anche la derivata seconda $\bar{y}''(x) = Ae^x + Ae^x + (A + B)e^x = e^x (A + 2A + B)$

Andiamo adesso a sostituire nell'equazione differenziale di partenza

$$y''(x) + 4y(x) = xe^x \rightarrow \text{Equazione di partenza}$$

$$e^x (A + 2A + B) + 4(A + B)e^x = xe^x \quad \text{E risolvendo troviamo che}$$

$$\underline{Axe^x} + 2Ae^x + Be^x + \underline{4Axe^x} + 4Be^x = xe^x$$

$$\rightarrow 5Ax e^x + (2A + 5B) e^x = x e^x \quad \text{Imponendo adesso il sistema:}$$

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ 2A + 5B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ 5B = -\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{2}{25} \end{cases}$$

Sostituendo nella soluzione trovata da noi: $\bar{y}(x) = e^x (A + B) = e^x \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25} \right)$

La soluzione trovata da noi diventa $\underbrace{a \cos(2x) + b \sin(2x)}_{\text{Soluzione dell'omogenea}} + \underbrace{e^x \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25} \right)}_{\text{Soluzione particolare}}$

Esercizio 2

Studiare l'equazione differenziale al variare del parametro α

$$\begin{cases} \alpha x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t + \sin(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

(i)
 $\alpha = 0$

$$-2x'(t) + x(t) = e^t + \sin(t)$$

Sostituendo le condizioni iniziali: $-2(0) + (0) = e^0 + \sin(0) \rightarrow 0 = 1$ No! Il problema non ammette quindi soluzione

(ii)

$$\alpha < 1$$

$$\alpha \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha}}{\alpha} \quad \text{Due soluzioni distinte}$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(iii)
 $\alpha = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} = c_1 e^t + c_2 t e^t$

(iiii)
 $\alpha > 1 \rightarrow$ Due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{i\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}, \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{i\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\frac{t}{\alpha}} \cos\left[\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right] + c_2 e^{\frac{t}{\alpha}} \sin\left[\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right]$$

Cerchiamo adesso una soluzione particolare nel caso che α non sia 1

(1) Consideriamo prima solamente il termine esponenziale

Non coincidendo il termine all'esponente con una delle radici:

$$\bar{x}(t) = e^{\lambda t} \bar{Q}(t) = B e^t$$

$$\bar{x}'(t) = B e^{\lambda t}$$

$$\bar{x}''(t) = B e^{\lambda t}$$

Andando a sostituire nell'equazione di partenza

$$\alpha x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t$$

$$\alpha B e^{\lambda t} - 2\alpha B e^{\lambda t} + B e^{\lambda t} = e^t$$

$$\rightarrow e^t (\alpha B - 2\alpha B + B) = e^t$$

$$\rightarrow B - \alpha B = 1 \Rightarrow B(1 - \alpha) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_e(t) = \frac{1}{1 - \alpha} e^t$$

(2)

Consideriamo adesso solamente il termine sinusoidale

$$p(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) Q(t)$$

$$\alpha = 0$$

Non coincidendo il coefficiente della soluzione particolare con una delle soluzioni del polinomio caratteristico possiamo scrivere:

$$\bar{x}_2(t) = A \sin(t) + B \cos(t)$$

$$\bar{x}_2'(t) = A \cos(t) - B \sin(t)$$

$$\bar{x}_2''(t) = -A \sin(t) - B \cos(t)$$

Andando a sostituire nella equazione di partenza

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin(t)$$

$$\alpha(-A \sin(t) - B \cos(t)) - 2(A \cos(t) - B \sin(t)) + A \sin(t) + B \cos(t) = \sin(t)$$

$$= -\alpha A \sin(t) - \alpha B \cos(t) - 2A \cos(t) - 2B \sin(t) + A \sin(t) + B \cos(t) = \sin(t)$$

$$= \sin(t) [-\alpha A - 2B + A] + \cos(t) [-\alpha B - 2A + B] = \sin(t)$$

$$\begin{cases} -\alpha A - 2B + A = 1 \\ -\alpha B - 2A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha A - 2 \frac{2A}{1-\alpha} + A = 1 \\ B(1-\alpha) = 2A \rightarrow B = \frac{2A}{1-\alpha} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\alpha A - \frac{4A}{1-\alpha} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -A \left(\alpha + \frac{4}{1-\alpha} \right) = 1 \rightarrow A = \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha} + \frac{4}{1-\alpha} \right) = -1 \Rightarrow A = - \left[\frac{4 + \alpha(1-\alpha)}{1-\alpha} \right]^{-1} = \frac{-(1-\alpha)}{4 + \alpha(1-\alpha)}$$

$$B = \frac{2}{1-\alpha} \frac{-(1-\alpha)}{4 + \alpha(1-\alpha)} = \frac{-2}{4 + \alpha(1-\alpha)}$$

I restanti casi sono simili

Esercizio 3

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{4}(y')^2 - y^2 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Per ricondurci ad una forma risolvibile con i nostri metodi facciamo la seguente sostituzione:

$$y'(x) = z(y(x)) \quad \text{e} \quad y''(x) = z'(y(x)) \cdot y'(x) = z'(y(x)) z(y(x))$$

$$\Rightarrow y'(x) = z, \quad y'' = z' z$$

Andiamo a risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} z' z = \frac{1}{4} z^2 - y^2 \\ z(-1) = 1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} z(y(x)) = y'(x) \\ z(y(0)) = y'(0) \\ z(-1) = 1 \end{cases}$$

Dividendo per z otteniamo

$$\begin{cases} z' = \frac{1}{4}z - \frac{y^2}{z} \\ z(-1) = 1 \end{cases}$$

Questa è una equazione differenziale di Bernoulli con $\alpha = -1$

Equazione di Bernoulli

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha \quad \text{con } \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$$

$$u'(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{y^2}{u(t)} = \frac{1}{4}u(t) - y^2 u^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow a(t) = \frac{1}{4}, \quad b(t) = -y^2, \quad \alpha = -1$$

Utilizziamo la sostituzione $w = u^2$, da cui $w' = 2u u'$. Allora otteniamo

$$\begin{cases} 2u u' = \frac{1}{2} u^2 - 2y^2 & (\text{ho moltiplicato per } u) \\ u(-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w' = \frac{1}{2} w - 2y^2 \\ w(-1) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del 1° ordine non omogenea a coeff. variabili.

$$\begin{cases} w' + a(t)w = b(t) \\ \text{Dato } A(t) \text{ una qualunque primitiva di } a(t) \\ u(t) = C e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(s)} b(s) ds \end{cases}$$

$$w' - \frac{1}{2}w = -2y^2$$

$$w(y) = C e^{-A(y)} + e^{-A(y)} \int e^{A(s)} b(s) ds$$

$$A(y) = \int -\frac{1}{2} dy = -\frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \ln |y|$$

$$e^{-A(y)} = e^{\frac{1}{2} \ln |y|} = e^{\ln |y|^{\frac{1}{2}}} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$\int e^{-\frac{1}{2} \ln |y|} (-2y^2) dy = -2 \int \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} y^2 dy = -2 \int y^{\frac{3}{2}} dy = -2y^{\frac{5}{2}}$$

$$w(y) = C y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} (-2y^{\frac{5}{2}}) = C y^{\frac{1}{2}} - 2y^3$$

$$\text{Imponendo la condizione iniziale } \begin{cases} w(y) = C y^{\frac{1}{2}} - 2y^3 \\ w(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = C - 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

e dunque $w(y) = -y^{\frac{1}{2}} - 2y^3$.

Ritornando da $w = u^2$ otteniamo $u = \pm \sqrt{-y^{\frac{1}{2}} - 2y^3}$.

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-y^{\frac{1}{2}} - 2y^3} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Separando le variabili

$$\int \frac{1}{\sqrt{-y^{\frac{1}{2}} - 2y^3}} dy = \int dx,$$

da cui

$$\int \frac{1}{\sqrt{-y^{\frac{1}{2}} - 2y^3}} dy = x + K$$

Per calcolare l'integrale usiamo la sostituzione $-1 - 2y = u^2$ da cui $-2 dy = u du$ e

$$\text{dunque } \int \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2+1}{4} \sqrt{-\frac{u^2+1}{4}}}} u du = \int \frac{-\frac{1}{2} u}{\sqrt{\frac{u^2+1}{4} \sqrt{-\frac{u^2+1}{4}}}} du = \int \frac{-2}{u^2+1} du = -2 \arctan(u)$$

$$-2 \arctan(u) = x + K$$

Ritornando alle variabili y

$$-2 \arctan\left(\frac{1-2y}{1}\right) = x + K$$

$$\arctan\left(\frac{1-2y}{1}\right) = \frac{x+K}{-2}$$

$$1-2y = \tan\left(\frac{x+K}{-2}\right) \Rightarrow 2y = 1 - \tan\left(\frac{x+K}{-2}\right)$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$ otteniamo $K = -\pi/6$, $\Rightarrow$ la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \right)$$