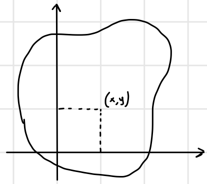
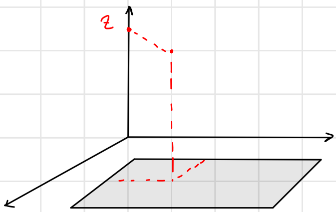
$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$f(x,y)$



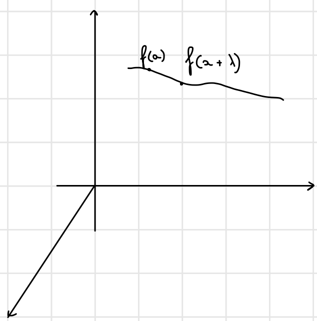
$f(x,y) = z$ = altezza del terreno nel punto (x,y)



$f = f'$

$f: [a,b] \in \mathbb{R}^3$

$f(a) = 1$



$f: [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f((a,a)) = p$

Def. X insieme

$d: X \cdot X \to [0,+\infty]$

$x \quad y \qquad \Downarrow$

$d(x,y)$ si chiama fz. distanza se soddisfa i ii iii

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x \in X \quad y \in X$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

(iii) DISUG. TRIANGOLARE $\quad \forall x,y,z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Def: Spazio metrico è la coppia (X, d)

Ex: $X = \mathbb{R}$

$d(x,y) = |x-y|$

$|x-y| = |y-x|$

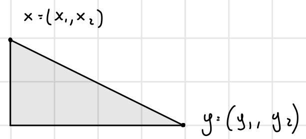
$x,y,z \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

$d_1(x,y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$X = \mathbb{R}^2 \qquad x = (x_1, x_2)$

$y(y_1, y_2)$

$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$



(es. verificare i ii iii)

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

è una distanza per esercizio

$\hat{d}(x,y) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

$\Downarrow$

$\exists (x,y) \in X \times X$

$x \neq y \quad \hat{d}(x,y) = 0$

Es.: $X = \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$d(n,m) = |n-m|$

Se prendo (X, d) e $E \subseteq (X, d)$ (E, d) è uno spazio metrico

Def: Dato uno spazio metrico, dato $x \in X$ e $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$, definisco la palla centrata in x e di raggio r

$$B_r(x) = \{y \in X \quad d(x,y) < r\}$$

Un aperto A di X $\quad A \subseteq X$ se $\forall x \in A \quad \exists B_r(x)$ tale che $B_r(x) \subseteq A$

$(a,b) \in \mathbb{R}$ se $\forall x \in (a,b) \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \quad |x-y| < r\} = (x-r, x+r)$

Def: $C \subseteq X$ si dirà chiuso se $X \setminus C = C^c = \{x \in X \quad x \notin C\}$ risulta aperto

Proprietà: se $A_1, A_2, A_3,$ sono tutti aperti allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ è aperto

- I insieme di indici $\forall i \in I$ A_i aperto $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto

- Intersezione

Def: Dato (X,d) dico che $(x_n) \subseteq X$ $n \in \mathbb{N}$ converge a $x \in X$ se $d(x_n, x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$x_n \to x$ per $n \to +\infty$

Dire che $x_n \to x$ è eq. dire che

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$

Es: $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ se $x_n \to x$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon > 0$ tale che $|x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_\varepsilon$