

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

$$x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$$

$$d(x_n, x) < \epsilon \iff x_n \in B_\epsilon(x)$$

$$x_n \rightarrow x \iff \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0$$

$$\text{t.c. } x_n \in B_\epsilon(x)$$

$$\forall n \geq N_\epsilon$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0 \text{ t.c.} \\ d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{array} \right.$$



$$x_n$$

Dim.: $A \subseteq X$ aperto. Allora $\forall x \in A \exists n(x) > 0$ t.c. $B_{n(x)}(x) \subseteq A$

Fatto: $A = \bigcup_{x \in A} B_{n(x)}(x)$ dim.: $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B_{n(x)}(x) \quad y \in A \implies \exists B_{n(x)}(y) \subseteq A$

$$y \in A \implies y \in B_{n(x)}(y) \implies y \in \bigcup_{x \in A} B_{n(x)}(x)$$

$$A \supseteq \bigcup_{x \in A} B_{n(x)}(x) \quad \text{e poiché } \forall x \in A \quad B_{n(x)}(x) \subseteq A$$

$$(X, d) \quad \text{Sia } x_n \in C \quad \text{e} \quad x_n \rightarrow x \implies x \in C$$

Valga: Supponiamo per assurdo che $x \notin C \implies x \in C^c := X \setminus C$

$$X \setminus C \text{ è aperto}$$

$$\exists n > 0 : B_n(x) \subseteq C^c$$

$$\implies B_n(x) \cap C = \emptyset$$

Def: Se $E \subseteq X$ definisco $\bar{E}$ la chiusa di E come il più piccolo insieme chiuso contenente in E

Se F è chiuso e $F \supseteq E$ allora $\bar{E} \subseteq F \quad \forall F$ chiuso $P \supseteq E$

Infatti ne prende $\mathcal{F} = \{F \text{ chiuso} : F \supseteq E\}$ $\bar{E} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ si verifica che $\bar{E}$ soddisfa la (*)

Def: Se $E \subseteq X$, $x \in X$ si dice pto di accumulazione per E se $\exists (x_n) \subseteq E : x_n \neq x \quad \forall n$
 $x_n \rightarrow x \quad n \rightarrow +\infty$

oss: se E chiuso $\Rightarrow$ ogni pto di accumulazione $\in E$

Def: $E \subseteq X$ definisco la parte interna di E come il più grande insieme aperto $E \subseteq E$

$$A = \{A \text{ aperto} : A \subseteq E\}$$

$$\dot{E} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Verif. che:

(i) $\dot{E} \subseteq E$ (ii) Se $A \subseteq E$ è aperto $\Rightarrow A \subseteq \dot{E}$

$X = \mathbb{R} \quad [a, b]$ chiuso $B_\epsilon(x) = \{y : |y-x| < \epsilon\} = (x-\epsilon, x+\epsilon)$

$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \Rightarrow [a, b]$ non è né aperto né chiuso

$$[a, b) = [a, b)$$

$$[a, b] = [a, b]$$

$$\dot{E} = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\bar{E} = \mathbb{R}$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \text{ trova } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n \rightarrow x \end{array} \right]$$

ogni $x \in \mathbb{R}$ è pt di accumulazione per $\mathbb{Q}$

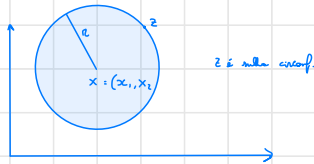
$$\dot{E} = \emptyset$$

se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow B_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{Q}$

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \not\subseteq \mathbb{Q}$$

$$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$B_n(x) = \{y : d(x, y) < n\}$$



$$|x - z| = d(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2}$$

$$\underset{n}{\longrightarrow} z \notin B_n(x)$$

$$V \in \mathbb{R}^2 \quad V = \frac{z - x}{n} = \left(\frac{z_1 - x_1}{n}, \frac{z_2 - x_2}{n} \right)$$

per $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = x + tv = \left(x_1 + \frac{t(z_1 - x_1)}{n}, x_2 + \frac{t(z_2 - x_2)}{n} \right)$$

$$t = 0 \quad \gamma(0) = x$$

$$t = 1 \quad \gamma(1) = \left(x_1 + \frac{z_1 - x_1}{n}, x_2 + \frac{z_2 - x_2}{n} \right)$$

$$t = n \quad \gamma(n) = (z_1, z_2) = z$$

per il primo

$$x = (x_1, x_2) \quad x_2 = mx_1 + q$$

poniamo $x_1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow$ il punto $(0, q) \in$ grafico di $f(x_1) = m(x_1 + q)$

$$z = (z_1, z_2)$$

$$y = mx + q \quad (*)$$

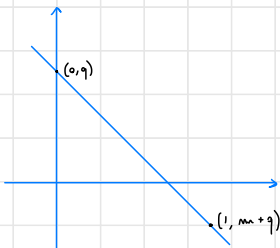
$$z = (z_1, z_2)$$

$$y = mx + q \quad (*)$$

È esercizio. Sume da tutto

$$s(t) = x + tv \quad \text{in forma } (*)$$

$$(0, q) \in \text{grafico di } f(x_1) = mx_1 + q$$



$$x_1 = 1$$

$$x_2 = f(x_1) = m \cdot 1 + q = m + q$$

$\Downarrow$

$$(1, m+q) \in$$

$$(0, q) \text{ auf } L: v$$

$$\hat{v} = (1, m+q) - (0, q) = (1, m)$$

$$v = \frac{\hat{v}}{|\hat{v}|} \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad |\hat{v}| = \sqrt{1+m^2}$$

$$(0, q) + t(1, m) = (t, q+mt)$$

$$\text{Se dann } \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = q+mt \end{cases} \Rightarrow x_2 = q + m x_1$$

$$x_2 = m x_1 + q \quad (1)$$

alle t gibt es (x_1, x_2) die die Gleichung (1) sowie (1) & (2)

$$(x_1, x_2) = (0, q) + t(1, m) \\ \Rightarrow (x_1, q + m x_1)$$

$$(x_1, x_2) = (0, q) + t \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad \text{se } t = x_1 \sqrt{1+m^2} \Rightarrow \left(x_1, q + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} x_1 \sqrt{1+m^2} \right) \\ = (x_1, q + m x_1) \\ x_2 = q + m x_1$$

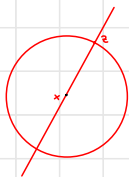
$$S(\lambda) = (0, q) + t \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad \text{se } t = s(t_1) - s(t_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \Rightarrow |s(t_1) - s(t_2)| = |t_1 - t_2|$$

$$t = 0 \Rightarrow (0, q) = P \\ t_1 = 0 \Rightarrow (0, q) + \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad A$$

$$(P, A) = |A - P| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right) \right| = 1$$

$$P: S(0) \quad |S(0) - S(1)| = |1 - 0| \quad A = S(1)$$

La fun. $s(t) = x + tv$ è detta rappresentazione parametrica di una retta



la punto $t=0$ $s(t) = x + tv$

$s(0) = x$

$x_n := s\left(n - \frac{1}{n}\right)$

però al fatto che $|v|=1$ si $|x_n - x| = |s(n - \frac{1}{n}) - s(0)| = |n - \frac{1}{n} - 0| = n - \frac{1}{n}$

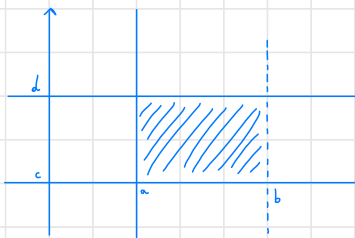
$x_n \in B_n(x)$

$x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty$

$|x_n - x| = |s(n - \frac{1}{n}) - s(0)| = (*)$ nota che $|v|=1$ $(*) = |n - \frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$

$[a, b) \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$

$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [a, b) \quad x_2 \in [c, d]\}$



$E = [a, b] \times \mathbb{Q} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [a, b] \quad x_2 \in \mathbb{Q}\}$

$\overset{\circ}{E} = (a, b) \times \phi = \phi$

$\bar{E} = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$(Z, d) \quad \text{dte da } d(m, n) = |m - n|$$

$$B_1(0) = \{0\}$$

$$D_1(0) = \{-1, 0, 1\}$$

$$\overline{B_1(0)} \stackrel{?}{=} D_1(0)$$

$$\forall x \in D_1(0) \Rightarrow \exists x_n \in B_1(0)$$

$$x_n \rightarrow x$$

In uno spazio metrico $\overline{B_n(x)} \subseteq D_n(x)$ ma non è vero: nel caso $X = \mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^1$
 $\overline{B_n(x)} = D_n(x)$

Def: Dato (X, d) s.m. e $E \subseteq X$, allora diam. di E il numero

$$\text{diam}(E) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in E\}$$

Esercizio notare che $(B_n(x)) \leq 2n$ notare che diam. $(D_n(x)) \leq 2n$

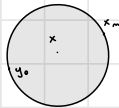
$$\text{es. } X = \mathbb{Z}$$

$$B_1(0) = \{0\}$$

$$\text{diam.}(B_1(0)) = 0$$

In uno spazio metrico $\overline{B_n(x)} \subseteq D_n(x)$ ma non è vero: nel caso $X = \mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^1$

$$\overline{B_n(x)} = D_n(x)$$



Def: Sia $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ g si dice continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $y \in B_\delta(x)$

$$\Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$$

Eg. g continua in x se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $d(x, y) < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

Def. Sia $g: X \rightarrow \mathbb{R}$.
 g si dice continua in $x \in X$ se
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. se $y \in B_\delta(x)$
 $\Rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

Equiv. g continua in x se $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ t.c. se $d(x, y) < \delta \Rightarrow$
 $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

Equivalentemente: g è continua in x
 se $\forall$ successione $x_n \in X$ con $x_n \rightarrow x$
 si ha $g(x_n) \rightarrow g(x)$

Sia $x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists N_\varepsilon > 0$ per cui

$$d(x_n, x) < \delta \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x_n) - g(x)| < \varepsilon$$

quindi ho trovato che $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N_\varepsilon > 0 \text{ per cui } |g(x_n) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

$$g(x_n) \rightarrow g(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$$

$$\text{t.c. } |g(x_n) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

dimostra che se g è continua rispetto alla
 1° Definizione allora è valida la proprietà (P)

Dimostro che $(P) \Rightarrow g$ continua in x

Supponiamo g non è continua in x .

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0 \exists y_\delta \text{ t.c.}$$

$$d(y_\delta, x) < \delta \text{ e } |g(y_\delta) - g(x)| \geq \varepsilon_0$$

$$\delta = \frac{1}{n} \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ ho } \exists y_n$$

$$d(y_n, x) < \frac{1}{n} \text{ e } |g(y_n) - g(x)| \geq \varepsilon_0$$

La successione $y_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow +\infty$

ma non può sussistere $g(y_n) \rightarrow g(x)$

$$\text{perché } |g(y_n) - g(x)| \not\rightarrow 0$$

□

Def. $K \subseteq X$ is closed exactly if there exist open $\{A_i\}_{i \in I}$ such that $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
 $\Rightarrow \exists j \in I$ false that $K \subseteq \bigcup_{i \in j} A_i$