(X_i, d_i) spazi metrici $\quad m = 1,2$

Def limite: Sia (X, d) sp. m.

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di X, $\ell \in \mathbb{R}$.
Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < d(x_0, x) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ $\square$

Teorema del confronto
Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x$ t.c. $0 < d(x, x_0) \leq \delta$ è: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Sia poi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ $\square$

Es. 1.
Sia (X, d) sp. m., dimostrare che $\forall y \in X$ $\quad x \longmapsto d(x, y)$
$X \longmapsto [0, +\infty)$ è continua. D

Oss: Sia (X, d) sp. m. sia $f: X \to \mathbb{R}$ Allora f è continua con $x_0 \in X$ sse:
i) $\forall x_m \to x_0$ è $d(x_m, x_0) \to 0$;
ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$;
iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\square$

Svolgimento:

Si noti che
$$d(x_n, y) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, y)$$

$$\forall x_0 \in X, \quad x_n \to x_0 \Rightarrow |d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \to 0$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$|d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \leq d(x_n, \bar{x}) \leq \varepsilon$$

2) $d : X \times X \to [0, +\infty)$

Dimostriamo che d è continua

Procedimento $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times X$

$$(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(\bar{x}, \bar{y})$$

Se $n \geq n_\varepsilon$

$$|d(x_n, y) - d(\bar{x}, y)| \leq d(x_n, \bar{x}) \leq \varepsilon$$

$$|d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| \longrightarrow 0$$

$$|d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, y_n) + d(\bar{x}, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})| \leq$$

$$\leq |d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, y_n)| + \underbrace{|d(\bar{x}, y_n) - d(\bar{x}, \bar{y})|}_{\alpha_n \to 0} \to 0$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, \bar{x}) + d(\bar{x}, y_n) \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$|d(x_n, y_n) - d(\bar{x}, y_n)| \leq d(x_n, \bar{x}) \to 0$$

$g : X \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana se $\exists L > 0$ t.c. $|g(x) - g(y)| \leq L \cdot d(x,y)$

<u>Sv.</u> $|g(x) - g(x_0)| \to 0$ se $x \to x_0$ $\qquad |g(x) - g(x_0)| \leq L \cdot d(x, x_0)$

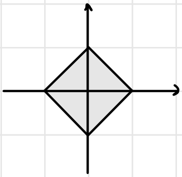
$X = \mathbb{R}^2$

$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$

$d_1(\vec{x}, \vec{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$B_1((0,0), r) = \{\vec{x} : d(\vec{0}, \vec{x}) < r\}$

$\{(x,y) : |x| + |y| < 1\}$



$\max (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|$

$|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$