

Def: Sia $E \subseteq X$ dove (X, d) è uno spazio metrico allora $\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$

Altrimenti visto che data $B_\epsilon(x)$ accade che $\text{diam}(B_\epsilon(x)) \leq 2\epsilon$

Dati $y, z \in B_\epsilon(x)$ si ottiene grazie alla disug. triangolare che

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$$\forall y, z \in B_\epsilon(x) \Rightarrow \sup\{d(y, z) : y, z \in B_\epsilon(x)\} \leq 2\epsilon$$

Def. Sia (X, d) sp. metr. Una successione $(x_n) \subseteq X$ si dice successione di Cauchy se $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ $\forall n, m \geq N_\epsilon$

Def: Uno sp. metr. (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente. Inoltre $E \subseteq X$ è completo se ogni successione di Cauchy $(x_n) \subseteq E$ ammette un limite in $E \iff [E, d]$ è completo

eseg. $\mathbb{R}$ con la distanza $|x - y| = d(x, y)$ $\mathbb{R}$ è completo poiché $x_n \in (a, b)$ con $x_n \rightarrow a$ è di Cauchy
 x_n NON CONVERGE IN (a, b)

Dim: Ogni succ. conq. è di Cauchy (ANCHE negli spazi NON completi)

sia x_n t.c. $x_n \rightarrow x \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon > 0$ t.c. $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $n \geq N_\epsilon$.

Se prendo $m \geq N_\epsilon$ allora $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

per ogni $n, m \geq N_\epsilon$

Dim: Sia (X, d) spazio metrico completo e sia $E, E \subseteq X$ completo. Allora E è chiuso.

Prendo $x_n \in E$ tale che $x_n \rightarrow x$. x_n essendo succ. di Cauchy. Essendo E completo essa deve convergere ad un punto di $E \Rightarrow x \in E \Rightarrow E$ è chiuso.

Viceversa se (X, d) è completo ed $E \subseteq X$ chiuso allora E è completo. [Esercizio]

Def: Un insieme $E \subseteq X$ si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall \epsilon > 0$ posso trovare delle pille centrate in $x_1, x_2, \dots, x_n$ di raggio $\epsilon/2$

Viceversa $x \in (X, d)$ è completo ed $E \subseteq X$ chiuso

Allora E è completo. [ESERCIZIO]

Def.: Un insieme $E \subseteq X$ si dice TOTALMENTE LIMITATO se $\forall \varepsilon > 0$ posso trovare delle palle ~~di~~ centrate in $x_1, x_2, \dots, x_n$ di raggio $\varepsilon > 0$.
 $B_\varepsilon(x_1), B_\varepsilon(x_2), \dots, B_\varepsilon(x_n)$ in numero finito $n < \infty$ tali che
$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

Def.: Un insieme $E \subseteq X$ si dice limitato se

$\exists R > 0 \quad \exists x \in X$ tale che

$$B_R(x) \supseteq E$$

$$\Rightarrow \text{diam}(E) \leq \text{diam}(B_R(x)) \leq 2R$$

Es.: E limitato $\Leftrightarrow \text{diam}(E) < \infty$
con $C > 0$

Fatto generale Ci sono spazi metrici in cui la nozione di limitatezza e quella di totalmente limitatezza NON sono equivalenti

esempi in $\mathbb{R}$ una palla di raggio 1 è $B_1(x)$

$$B_1(x) = (x-1, x+1) \quad \text{diam}(B_1(x)) = 2$$

è totalmente limitato se $\forall \varepsilon > 0$ posso trovare dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che

$$B_\varepsilon(x_i) = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

ricoprono tutto $(x-1, x+1)$

Alcuni esempi $x_1 = x-1, \quad x_2 = x, \quad x_3 = x+1, \dots$

$$(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) = B_\varepsilon(x_i)$$

oss. se $n \approx \frac{2}{\varepsilon}$ e le $B_\varepsilon(x_i)$ ricoprono tutto $(x-1, x+1)$

$X = \mathbb{R}^2$ considero la palla di raggio 1

$B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$ se vogliamo ricoprire $B_1(x)$ con palle di raggio $\frac{1}{2}$.

$X = \mathbb{R}^2$
 $B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < 1\}$
se vogliamo ricoprire $B_1(x)$ con palle di raggio $\frac{1}{2}$. L'area di $B_1(x)$ è pari a π . L'area delle palle di raggio $\frac{1}{2}$ è $\frac{\pi}{4}$.
Deduco che come minimo sono necessarie $\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4$ palle di raggio $\frac{1}{2}$ per coprire tutta $B_1(x)$.
 $X = \mathbb{R}^3$ e considero $B_1(x) = \frac{4}{3}\pi$

Un insieme totalmente limitato è limitato ($\times$ ex). Il viceversa è sempre vero.

Def.: Un insieme $K \subseteq X$ si dice compatto per successioni: se $\forall (x_n) \subseteq K$ esiste una sottosuccessione x_{n_k} che converge ad un punto $x \in K$.

oss.: Se non si capatteria per successioni, non sono sempre equivalenti negli spazi topologici, ma lo sono in quelli metrici.

per successioni
negli spazi topologici, ma si risultano essere equivalenti negli spazi metrici.
Teorema (X, d) spazio metrico $K \subseteq X$.
 K è compatto se e solo se è compatto per successioni.
Segue come corollario delle prop. seguenti:
Proposizione K compatto, in (X, d) allora K compatto per successioni

Prop. 2) K compatto per successioni, allora K è compatto e totalmente limitato.

Prop. 3) K è compatto e tot. limitato $\Rightarrow$ compatto

Dim: (prop 1) H_p : K compatto

Ricordiamo che K si dice compatto se per ogni ricoprimento $\{A_i\}_{i \in I}$ di insiemi aperti tali che

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq K$$

possiamo trovare un sottoricoprimento finito di K

$$\left(\text{ovvero } \exists J \subseteq I \text{ con } \#J < \infty \text{ e t.c. } \bigcup_{j \in J} A_j \supseteq K \right)$$

Supponiamo per assurdo che K non é compatto per successioni.

Possiamo trovare $(x_n) \subseteq K$ t.c. nessuna sottosc. di x_n converge in K .

Per ogni punto $x \in K$ so ch esiste un intorno $B_{r(x)}(x)$ con $r(x) > 0$ tale che l'insieme

$$\# \{n \in \mathbb{N} \text{ per cui } x_n \in B_{r(x)}(x)\} < +\infty$$

Infatti se $\exists \bar{x} \in K$ t.c. $\forall r > 0$ $B_r(\bar{x})$ contiene ∞ elementi della successione

$\Rightarrow$ potrei estrarre una sottosuccessione $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$

$\Rightarrow$ Possiamo trovare $(x_n) \subseteq K$ tale che
nessuna sottosuccessione di x_n converge in K .
Per ogni punto $x \in K$ so che esiste un intorno
 $B_{r(x)}(x)$ con $r(x) > 0$ tale che l'insieme
 $\# \{n \in \mathbb{N} \text{ per cui } x_n \in B_{r(x)}(x)\} < +\infty$.
Infatti se $\exists \bar{x} \in K$ tale che $\forall r > 0$
 $B_r(\bar{x})$ contiene ∞ elementi della successione
 $\Rightarrow$ potrei estrarre una sottosuccessione $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$
Considero la famiglia di palline $\{B_{r(x)}(x) : x \in K\}$

Essendo $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{r(x)}(x)$ ed avendo K compatto

$\Rightarrow \exists$ una sottofamiglia finita di $\{B_{r(x)}(x) : x \in K\}$ tali che essa continua a ricoprire K

$$\exists N > 0 \text{ e dei punti } \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N \text{ tale che } K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{r(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)$$

Questo é un assurdo perché per definizione di $r(\bar{x}_i)$ avessi che $\forall i = 1, \dots, N$

$$\# \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{r(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)\} < +\infty$$

$$\text{quindi } \# \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \bigcup_{i=1}^N B_{r(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)\} < +\infty$$

questo é assurdo perché $(x_n) \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{r(\bar{x}_i)}(\bar{x}_i)$
(x_n) contiene infiniti punti

Abbiamo dimostrato la proposizione 1 ovvero K compatto $\Rightarrow$ compatto per successioni

Mostriamo la proposizione 2 ovvero I compatto per successioni $\Rightarrow K$ compatto + totalmente limitato

olm: Mostriamo che K è completo. Sia $(x_n) \subseteq K$ successione di Cauchy. Abbiamo mostrato $\exists \bar{x} \in K$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$.
 $\exists (x_{n_k})$ sottosuccessione di (x_n) tale che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x}$ per qualche $\bar{x} \in K$.

Evidentemente da tutte le successioni (x_n) due convergono a $\bar{x}$ e quindi K è completo.

Dimostriamo che K è anche totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che lo sia.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(\bar{x}_i)$

Ma $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall$ finito finito di punti $\forall m > 0$

$$K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_0}(\bar{x}_i)$$

Iniziamo a prendere $x_1 \in K$. Se prendo $B_{\varepsilon_0}(x_1)$ questo non può ricoprire tutto K

$$K \not\subseteq B_{\varepsilon_0}(x_1)$$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in K \setminus B_{\varepsilon_0}(x_1)$$

$\Rightarrow$ considero la palla

che $K \not\subseteq B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2)$
 $\Rightarrow \exists x_3 \in K \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2))$
considero $B_{\varepsilon_0}(x_3)$ e deduco che $\exists x_4$
 $x_4 \in K \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_1) \cup B_{\varepsilon_0}(x_2) \cup B_{\varepsilon_0}(x_3))$

Andando avanti ricorsivamente $\forall m \in \mathbb{N}$ trovo un punto $x_m \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} B_{\varepsilon_0}(x_i) \right)$

Ho costruito una successione di punti $x_m \in K$ e facile vedere che $d(x_m, x_n) > \varepsilon_0$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$. Infatti se supponiamo $m > n$ anzi $x_m \in K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_0}(x_i) \right)$
 $m \neq n$

$$\Rightarrow x_m \in K \setminus B_{\varepsilon_0}(x_n)$$

$$\Rightarrow x_m \notin B_{\varepsilon_0}(x_n)$$

$$\Rightarrow d(x_m, x_n) > \varepsilon_0$$

$\Rightarrow (x_n)$ non è una successione di Cauchy quindi non può convergere

Inoltre nessuna successione è di Cauchy.

Nessuna sottosuccessione può convergere. Questo contraddice l'ipotesi che K fosse compatto per successioni.

Teorema sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti

- (i) K compatto
- (ii) K compatto e limitato
- (iii) K chiuso e totalmente limitato

In particolare K limitato $\Leftrightarrow$ totalmente limitato

Mettiamoci nello spazio $\mathbb{R}^n$, quindi ogni punto X si può scrivere come un vettore con n coordinate

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Enunciamo dei termini che descrivono le proprietà di continuità, derivabilità, differenziabilità, ecc di funzioni

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per semplicità di me ne sono sicuro che ho quasi sempre in $\mathbb{R}^n$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e prendiamo una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Def: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in A$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$ [ovvero $\forall y: |y-x| < \delta$]

ATTENZIONE $|x-y| = d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2}$ talvolta $\|x-y\|$ è la notazione

f è continua su A

OSS: f continua in x se e solo se
 $\forall (x_n) \subseteq A$ tale che $x_n \rightarrow x$
si ha $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Def: Sia $x \in A$. Diremo che f ammette derivata parziale in x rispetto alla prima variabile e esiste il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

e scrivo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

Similmente posso definire $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

Nel caso in cui f ammette derivate parziali in x sia rispetto la prima sia rispetto la seconda variabile dico che f è derivabile in x .

Se f è derivabile in ogni $x \in A$ dico che f è derivabile in A .

Nel caso che f risulta derivabile nel punto x di A , chiamo gradiente di f in x il vettore

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) \quad \nabla = \text{mole}$$

eseg. Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$
Allora f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}^2$

Prendiamo $x \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$f(x_1 + h, x_2) = x_1 + h + x_2 + 1$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

$$f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + h + x_2 + 1 - (x_1 + x_2 + 1)}{h}$$

$$= \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

$$\text{Analogamente } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 1 \Rightarrow \nabla f(x) = (1, 1)$$

La funzione $u_n f$ inoltre risulta continua di $\mathbb{R}^2$. Infatti prendiamo un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ facciamo veder che se $x^h \rightarrow \bar{x}$

$$\Rightarrow f(x^h) \rightarrow f(\bar{x})$$

per $\mathbb{R}$. In particolare
 facciamo vedere che se $x_n^h \rightarrow \bar{x}$
 $\Rightarrow f(x_n^h) \rightarrow f(\bar{x})$

se $x_n^h \rightarrow \bar{x} \iff d(x_n^h, \bar{x}) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$
 $d(x_n^h, \bar{x}) =$

$$= \sqrt{|x_1^n - \bar{x}_1|^2 + |x_2^n - \bar{x}_2|^2} \longrightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow x_1^n \rightarrow \bar{x}_1 \text{ e } x_2^n \rightarrow \bar{x}_2$$

$$\text{Infatti } |x_n^h - \bar{x}| \leq \sqrt{|x_1^n - \bar{x}_1|^2 + |x_2^n - \bar{x}_2|^2}$$

per $n \rightarrow +\infty$ il membro destro tende a zero quindi anche $|x_n^h - \bar{x}| \rightarrow 0$ stessa cosa per $|x_i^n - \bar{x}_i|$

$$f(x^n) = x_1^n + x_2^n + 1 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

$$f(x^n) \rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 1 = f(\bar{x}) \text{ quindi } f \text{ è continua}$$

esempio

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

Verif. che f è continua in x

$\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Esercizio

Esercizio f è continua in $x = (0, 0)$?

Iniziamo col calcolare le derivate parziali di f in $x = (0, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$f(h, 0) = \frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} = 0$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \partial f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Def.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x \in A$. Allora diremo che f é differenziabile in $\bar{x}$ se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

ov: $\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) \quad x - \bar{x} = (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)$

$$\Rightarrow \frac{\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})$$

Oss.: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} = ?$ sto calcolando il
limite per $x = (x_1, x_2) \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
quindi sto calcolando ~~il~~
 $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$ e $x_2 \rightarrow \bar{x}_2$
Dire che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} F(x) = L$ significa
che $\forall (x^n)$ t.c. $x^n \rightarrow \bar{x}$ ho
 $F(x^n) \rightarrow L$.