

exemple Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ déf. $h \mapsto f(x, x_2) = x_1 + x_2^2$

Calc. de la dérivée partielle au point $\bar{x} = (1, 2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h + 4 - (1 + 4)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + (h+2)^2 - (1+4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 4h + 4 - (1+4)}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = \frac{df}{dh}(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) \Big|_{h=0}$$

$$= \frac{d}{dx_1} f(x_1, \bar{x}_2) \Big|_{x_1 = \bar{x}_1}$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = 0 + 2x_2 \Big|_{\bar{x} = x} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

$$f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) = f(\bar{x} + h e_1)$$

$$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \quad h e_1 = (h, 0)$$

$$\bar{x} + h e_1 = (\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2)$$

Faisons un autre $v = (v_1, v_2)$ à supposer $|v| = 1$ on a $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ à calculer la dérivée partielle de $f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})$

Definisco la derivata f in $\bar{x}$ e calcolo in $\bar{x}$ come al solito

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})}{h}$$

Parentesi: dati un punto $p \in \mathbb{R}^2$ è un vettore $v_i (v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 = 1$
 definisco l'insieme dei punti $r(p, v)$ come

$$r(p, v) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = p + t v \text{ per qualche } t \in \mathbb{R} \}$$

$$r(p, v) = \{ p + t v : t \in \mathbb{R} \}$$

Se $x \in r(p, v) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tale che

$$x = p + t v = p_1 + t v_1, p_2 + t v_2$$

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t v_1 \\ x_2 = p_2 + t v_2 \end{cases}$$

Esprimendo t ($t = \frac{x_1 - p_1}{v_1}$)

$$\Rightarrow x_2 = p_2 + \frac{x_1 - p_1}{v_1} \cdot v_2 = m x_1 + q$$

$$\text{dove } m = \frac{v_2}{v_1} \quad q = p_2 - p_1 \frac{v_2}{v_1}$$

troviamo che ogni $x \in p + t v$ deve soddisfare l'eq. (3)

Necessario trovare che ogni punto c che soddisfa l'equazione della retta deve stare in $r(p, v)$

Se $v_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = p_1 \\ x_2 = p_2 + t v_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dalle prime equazioni deduco che } x_1 \text{ è costante quindi tutti i} \\ \text{punti } x \in (p, v) \text{ devono appartenere alla retta verticale } x_1 = p_1 \end{array}$$

Tornando alle derivate direzionali

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})}{h}$$

Calcoliamo la derivata in direzione $v = (v_1, v_2)$ e nel punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h v) - f(\bar{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h v_1, \bar{x}_2 + h v_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_1 + h v_1 + (\bar{x}_2 + h v_2)^2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{x}_1 + h v_1 + \bar{x}_2^2 + 2 \bar{x}_2 h v_2 + h^2 v_2^2 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2^2}{h}$$

$$= \frac{h v_1 + h^2 v_2^2 + 2 \bar{x}_2 h v_2}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = v_1 + 2 \bar{x}_2 v_2$$

espr. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$ allora

Calcoliamo per ogni v le derivate direzionali in $\bar{x} = (0, 0)$

Th: $\forall$ vettore $v = (v_1, v_2)$
 Teorema Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sia $\bar{x} \in A$
 Supponiamo f differenziabile in $\bar{x}$
 e quindi ammette derivate parziali
 e (quindi) ammette derivate direzionali
 Allora f è continua in $\bar{x}$,
 ammette tutte le derivate direzionali in $\bar{x}$
 $\forall v = (v_1, v_2)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$

dim: essendo il differenziabile in $\bar{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

Voglio far vedere che f è continua in $\bar{x}$ quindi prendo una successione $x^n \rightarrow \bar{x}$ e far vedere

$$f(x^n) - f(\bar{x}) =$$

$$\frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} \cdot |x^n - \bar{x}| + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})$$

Passo ai valori assoluti e posso scrivere

$$|f(x^n) - f(\bar{x})| \leq |f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})| |x^n - \bar{x}| + |\nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})|$$

$$\leq \left| \frac{f(x^n) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^n - \bar{x})}{|x^n - \bar{x}|} \right| |x^n - \bar{x}| + |\nabla f(\bar{x})| \cdot |x^n - \bar{x}|$$

Quindi $n \rightarrow +\infty$ ho $x^n \rightarrow \bar{x}$

tutto il membro destro della disug. tende a 0 quindi anche
 $|f(x^n) - f(\bar{x})| \rightarrow 0$
 $\Rightarrow f(x^n) \rightarrow f(\bar{x})$
 $\Rightarrow f$ è continua in $\bar{x}$.

Con $v = (v_1, v_2)$ a calcolare il limite

il limite
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h}$
 Il punto $\bar{x} + hv \rightarrow \bar{x}$ quando $h \rightarrow 0$
 Per questo grazie alla differenziabilità di f in $\bar{x}$
 posso concludere che
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (\bar{x} + hv - \bar{x})}{|h|} = 0$

$$\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (hv)}{|hv|} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x}) \cdot v}{|h| \cdot |v|} = 0$$

$$\text{se } |v| = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x}) - h \nabla f(\bar{x}) \cdot v}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{|h|} - \frac{h}{|h|} \nabla f(\bar{x}) \cdot v = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} - \nabla f(\bar{x}) \cdot v \right) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

$$h < 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\bar{x} + h\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{-h} + \nabla f(\bar{x}) \cdot \mathbf{v} \right]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{-h} = -\nabla f(\bar{x}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h\mathbf{v}) - f(\bar{x})}{h} = \nabla f(\bar{x}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \mathbf{v}$$

□