

Teorema (del differenziale totale)

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in A$. Supponiamo f abbia derivate parziali in un intorno $B_\delta(\bar{x})$

Allora f è differenziabile in $\bar{x}$.

dim. ricordiamo che f è differenziabile in $\bar{x}$ se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(\bar{x}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x})(x_2 - \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|}$$

per $t \in \mathbb{R}$ tale che il punto $\bar{x} + te_1 \in B_\delta(\bar{x})$

$$\text{ha da } \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x} + te_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + te_1 + he_1) - f(\bar{x} + te_1)}{h}$$

fissato un punto $(x_1, x_2) \in B_\delta(\bar{x})$, rispetto a una parte di grandità che $x_1 > x_1$.

$x_2 > \bar{x}_2$, la funzione $t \mapsto f(\bar{x}_1, t)$

$t \mapsto f(t, \bar{x}_2)$ sono derivabili

negli intervalli $(\bar{x}_1, x_1)$ e $(\bar{x}_2, x_2)$ rispettivamente

Risultato che $f(\bar{x}_1, t)$ è anche continua $[\bar{x}_1, x_1]$

però usiamo il teo di Lagrange che ci dà

$$f(x_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1)$$

dove ξ_1 è un valore in $(\bar{x}_1, x_1)$

Similmente per trovare un valore $\xi_2 \in (\bar{x}_2, x_2)$ tale che

$$f(x_1, x_2) - f(x_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2)$$

Sommando le due espressioni precedenti ho

$$f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2)$$

Dev. lim. de

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x_1, x_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

Sostituisco l'espressione sopra in quella che devo dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2)(x_2 - \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2) \right] (x_2 - \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|}$$

$$\left| \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right] (x_1 - \bar{x}_1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2) \right] (x_2 - \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|} \right|$$

$$\leq \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|} (x_1 - \bar{x}_1) \right| + \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2)}{|x - \bar{x}|} (x_2 - \bar{x}_2) \right|$$

ricordando che $|x - \bar{x}| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2}$

ho che $\frac{(x_1 - \bar{x}_1)}{(x - \bar{x})} \leq 1$ e $\frac{(x_2 - \bar{x}_2)}{(x - \bar{x})} \leq 1$

quindi l'espressione precedente è $\leq$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2) \right|$$

quando $x \rightarrow \bar{x} \Rightarrow x_1 \rightarrow \bar{x}_1, x_2 \rightarrow \bar{x}_2$
 $\xi_1 \in (\bar{x}_1, x_1) \quad \xi_2 \in (\bar{x}_2, x_2)$
 quindi anche $\xi_1 \rightarrow \bar{x}_1 \quad \xi_2 \rightarrow \bar{x}_2$

quindi anche $\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_1$ $\bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$

quindi le due quantità in un solo tendono
a zero per cui si può dire che le derivate
parziali sono continue in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

ovvero f è differenziabile in $\bar{x}$.

Posso raggruppare le derivate in
un'unica matrice, detta matrice Hesse
di f , nel seguente modo

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$[\nabla^2 f(\bar{x})]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}) \quad i, j \in \{1, 2\}$$

Se la f. f fosse def. su un open R^n e $f: A \subseteq R^n \rightarrow R$

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) \in R^{n \times n}$$

$$[\nabla^2 f(\bar{x})]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$$

$$[\nabla^2 f(\bar{x})]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$E_2. \quad f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2^2$$

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) \right) = (1, 4\bar{x}_2)$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Teorema di Schwarz: Supponiamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che f ammette derivate parziali seconde in A

Supponiamo che le derivate parziali seconde siano continue in $\bar{x} \in A$. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$$

la matrice Hess. è sim.

Def: siano $h, k: \begin{pmatrix} \bar{x}_1 + h \\ \bar{x}_2 + k \end{pmatrix} \in A$ In particolare se $|(h, k)| < \delta \Rightarrow (\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) \in B_\delta(\bar{x})$ per cui $\in A$

$$\text{Def: } g(h, k) = f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2 + k) - f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + k) + f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$\text{pongo } F(t) = f(t, \bar{x}_2 + k) - f(t, \bar{x}_2) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Osservo che } g(h, k) = F(\bar{x}_1 + h) - F(\bar{x}_1)$$

$$F \text{ é una funzione di una variabile derivabile e risulta } F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2 + k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \bar{x}_2)$$

② $\tan \alpha = \mu_d \Rightarrow v_0 = \text{costante} \quad \text{o} \quad \text{moto rett. uniforme}$

③ $\tan \alpha < \mu_d \Rightarrow a_x < 0$
moto unif. decelerato.

Lezione 7 - 21/03/2023 - Esercitazione
stolzi3@unisi.it $\rightarrow$ per chiarimenti su esercizi.

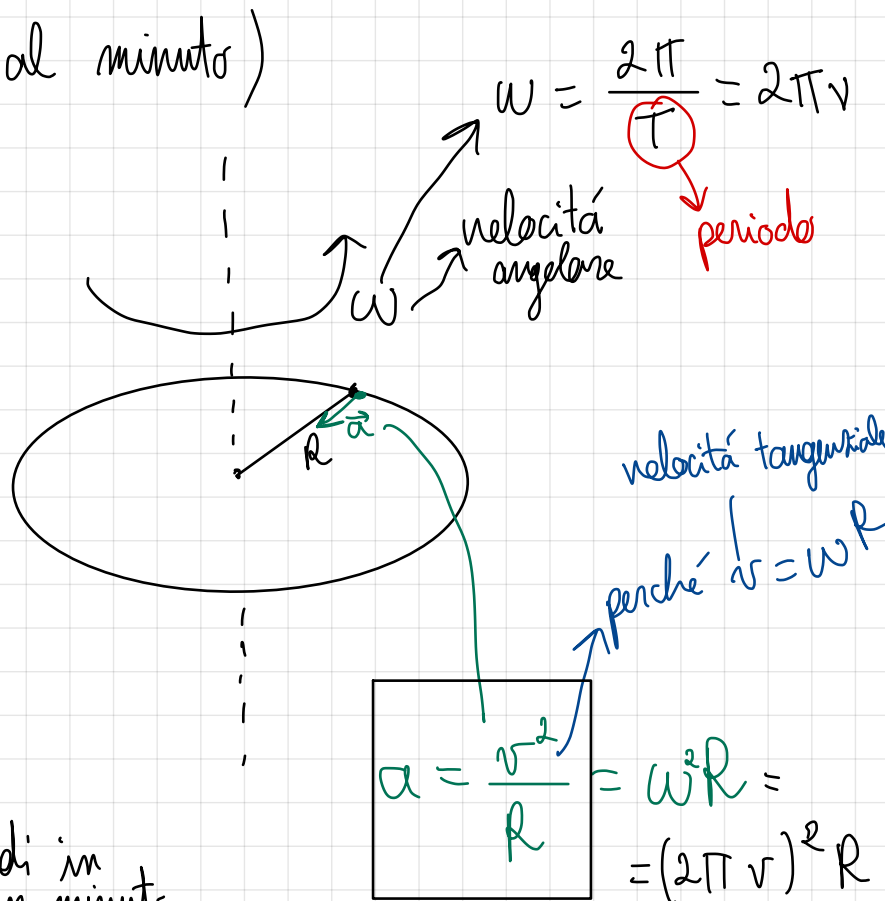
Esercizio 1:

moto circolare uniforme:

$\nu \rightarrow$ frequenza (in giri al minuto)

$R = \text{raggio} = 3 \text{ m}$

$a = 10g = 98 \text{ m/s}^2$



Calcolare ν ?

$\Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{a}{4\pi^2 R}} \cdot 60s \quad \text{secondi in un minuto} = \sqrt{\frac{98 \text{ m/s}^2}{4\pi^2 \cdot 3 \text{ m}}} \cdot 60s \approx 55 \text{ giri/minuto}$

Esercizio 2:

moto circolare uniforme

$$L = 1 \text{ m}$$

$$v = 2 \text{ giri/s}$$

$$\text{velocità?} \Rightarrow v = \frac{2\pi L}{T} = 2\pi L \cdot v = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12 \text{ m/s}$$

Esercizio 3: moto circolare uniforme

$$R = 2 \text{ m}$$

$$v = \frac{1 \text{ giro}}{3 \text{ secondi}} \Rightarrow T = 3 \text{ s}$$

$$a_{\text{centripeta}} = ?$$

$$\Rightarrow a_c = \omega^2 R = (2 \text{ rad/s})^2 \cdot 2 = 8 \text{ m/s}^2$$

$$\downarrow$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} = 2 \text{ rad/s}$$

Esercizio 3: moto circolare uniforme

$$|\vec{a}_{\text{centripeta}}| = ?$$

$$v = 33 \text{ giri/minuto} = \frac{33}{60} \approx \frac{1}{2} \text{ giri/secondo}$$

$$\text{diametro} = 0.30 \text{ m}$$

$$\text{raggio} = r = 0.15 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \approx \pi \text{ rad/s}$$

$$\downarrow$$
$$T = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ s}$$

$$\Rightarrow a_c = \omega^2 R = \pi^2 \cdot 0.15 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 4:

Longitudine = $L = 45^\circ$

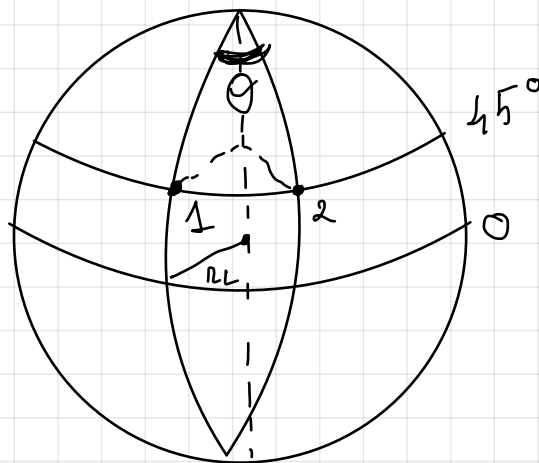
$$R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$L_{g_1} = 12^\circ 10'$$

$$L_{g_2} = 13^\circ 25'$$

$$T = 2h = 2 \cdot 3600s = 7200s \rightarrow \text{trovare velocità!}$$

distanza tra g_1 e $g_2 = ?$



↗ distanza

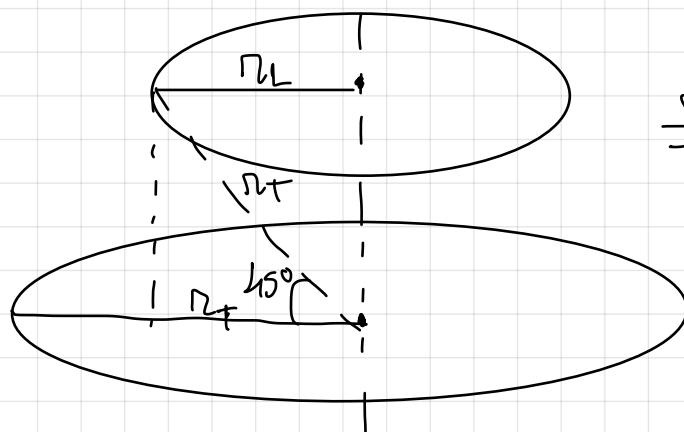
$$\Rightarrow d(1,2) = \Theta \cdot R_L$$

$$\Theta = 13^\circ 25' - 12^\circ 10' = 1^\circ 15' = 1.25^\circ$$

$\Rightarrow$ in radianti:

$$1.25 : 360 = x : 2\pi$$

$$\Rightarrow x = 2.18 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = R_L$$



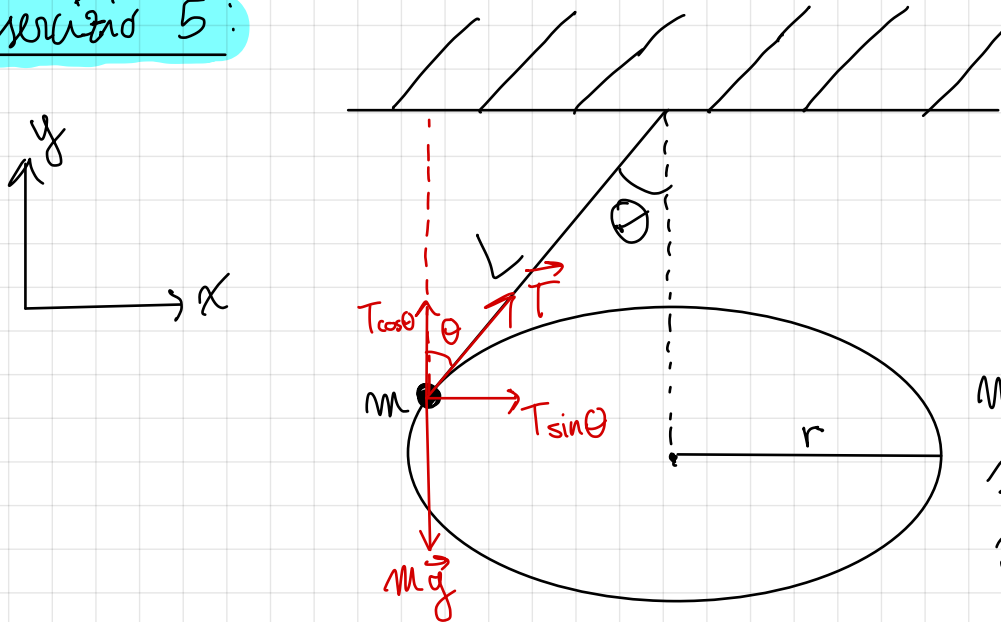
$$\begin{aligned} \Rightarrow R_L &= R_T \cos 45^\circ = \\ &= 6.37 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(1,2) = \Theta \cdot r_L = 2.18 \cdot 10^{-2} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 9 \cdot 10^4 \text{ m}$$

LATITUDE:
"verticale"
LONGITUDE:
"orizzontale"

$$\Rightarrow v = \frac{d(1,2)}{7200 \text{ s}} \approx 14 \text{ m/s} \approx 50 \text{ km/h}$$

Esercizio 5:



moto circolare uniforme
1) $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c = \cancel{\alpha r} + \omega^2 r$
2) $r = L \sin \theta$

$\omega = ?$

Tensione del filo = $T = ?$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$y: \begin{cases} T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

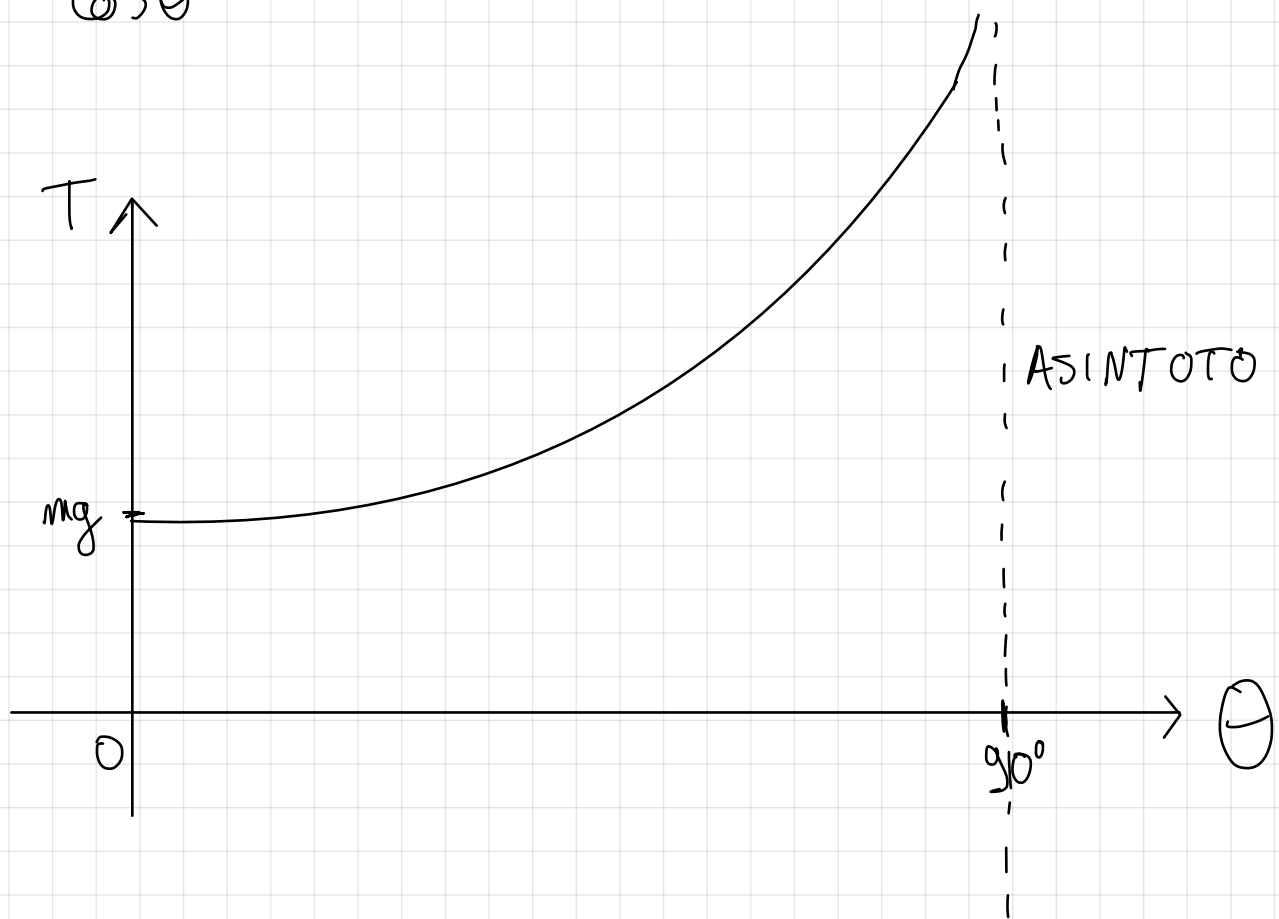
$$x: \begin{cases} T \sin \theta = m\alpha = m \cdot \omega^2 r = m \cdot \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

velocità tangenziale

$$\begin{cases} T \cos \theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \theta} \end{cases}$$

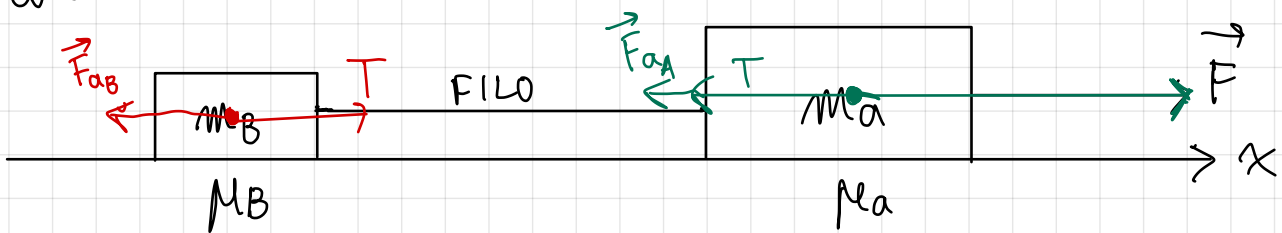
$$\begin{cases} T \sin \theta = m \omega^2 L \sin \theta \Rightarrow T = \frac{\omega^2}{m L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{\cos \theta} = m \omega^2 L \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L \cos \theta}$$



Esercizio 6:

Con attrito



$|\vec{F}| = ?$ quando il moto è rettilineo uniforme

$\vec{T} = ?$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$F_{ag} = M_B \cdot m_B g$$

$$F_{aA} = M_A \cdot m_A g$$

$$B: \begin{cases} T - M_B m_B g = m_B a \end{cases}$$

$$A: \begin{cases} F - T - M_A m_A g = m_A a \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = M_B m_B g$$

$$\Rightarrow F - \mu_B m_b g - \mu_A m_a g = 0$$

$$\Rightarrow F = g (\mu_B m_b + \mu_A m_a)$$