

$$f(x_1, x_2) \quad x_1 = x \quad x_2 = y$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f è continua in $(0, 0)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 + y^4} = 0$$

$$\left| \frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} \right| + \left| \frac{y^3 x}{x^4 + y^4} \right|$$

$$x^4 + y^4 \geq x^4$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{x^4 + y^4} \leq \frac{1}{x^4}$$

$$\left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} \right| = |xy| \frac{x^2}{x^4 + y^4} \leq |xy| \frac{x^2}{x^4} = |xy|$$

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \quad |xy| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} \rightarrow 0$$

anch.

$$\left| \frac{y^3 x}{x^4 + y^4} \right| \leq |xy|$$

$$\frac{y^3 x}{x^4 + y^4} \rightarrow 0 \quad \text{quando } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 + y^4} = 0$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|}$$

Calcolo le derivate parziali e mostro che sono continue in $(0, 0)$. Grazie al teo del differenziabile in $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cdot 0 - 0 \cdot h}{h^4} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^4 y - y^4 x}{x^4 + y^4} \right]_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y}}}$$

$$= \frac{(3x^4 y - y^4)(x^4 y^3) - (x^4 y - y^4 x) 2x^3}{(x^4 + y^4)^2} = \frac{3x^8 y + 3x^4 y^5 - y^8 x^2 - y^5 \cdot 2x^4 y + 2x^3 y^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{x^4 y - 4x^4 y^3 - y^5}{(x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^4 \bar{y} + 4\bar{x}^4 \bar{y}^3 - \bar{y}^5}{(\bar{x}^4 + \bar{y}^4)^2}$$

$$f(y, x) = \frac{y^3 x - x^3 y}{x^4 + y^4} = - \frac{x^3 y - y^3 x}{x^4 + y^4} = -f(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (-f(y, x)) = - \frac{\partial}{\partial y} f(y, x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^4 y^3 - y^5}{(x^4 + y^4)^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Monkwe da

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq \left| \frac{x^4 y}{(x^4 + y^4)^2} \right| + \left| \frac{4x^4 y^3}{(x^4 + y^4)^2} \right| + \left| \frac{y^5}{(x^4 + y^4)^2} \right|$$

$$① = |y| \frac{x^4}{(x^4 + y^4)^2} \leq |y| \frac{x^4}{(x^4)^2} = |y|$$

$$② = 4|y| \frac{x^4 y^3}{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4} \leq 4|y| \frac{x^4 y^3}{2x^2 y^2} = 2|y|$$

$$2|y| \geq 0 \quad \text{unde } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

$$③ = |y| \frac{y^5}{(x^4 + y^4)^2} \leq |y| \frac{y^5}{(y^4)^2} = |y|$$

$$\text{unde } (3) \Rightarrow 0 \quad \text{unde } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Andiamo a calcolare $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0), \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0)$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

Sott. $(h,0)$ a (x,y) nell'espressione di $\frac{\partial f}{\partial x}$ che è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

Mostro che

$$\lim_{(h,0) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def. Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ allora f si dice di classe $C^1(A)$

se è derivabile in A e le derivate parziali sono continue su A . Dirò che f è di classe $C^2(A)$ se le derivate parziali sono derivabili e le derivate seconde sono continue in A . In generale $f \in C^k(A)$ se f ammette derivate parziali di ordine $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$ e tali derivate sono continue su A

Ques. Se f è di classe $C^1(A) \Rightarrow f$ risulterà differenziabile in A e il gradiente $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$

Ques. $\nabla f, A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

è f.t. continua

Analizziamo il caso generico in cui una funzione $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$

ognuna di queste componenti $g_i, i = 1, \dots, m$ è f.t. $g_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

In particolare possiamo chiederci se g_i è differenziabile. In tal caso

$$\nabla g_i(x) = \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Def. $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice differenziabile in $\bar{x}$ se ogni componente $g_i \quad i=1, \dots, m$ risulta differenziabile in $\bar{x}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$\forall i = 1, \dots, m$

$$\text{Se } g \text{ \u00e8 diff. in } \bar{x} \text{ allora } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

PAUSA

facciamo vedere che se g \u00e8 differenziabile in $\bar{x}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_m^2} \quad \text{se } v \in \mathbb{R}^m$$

$$|x - \bar{x}| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_m)^2} \quad x - \bar{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow |v| \leq \sum_{i=1}^m |v_i|$$

$$|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})| \leq \sum_{i=1}^m |g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sum_{i=1}^m \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}$$

Essendo g differenziabile ogni g_i \u00e8 differenziabile e quindi

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\begin{aligned} |g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})| &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m |g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})| \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} &\leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sum_{i=1}^m \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \\ \text{Essendo } g \text{ differenziabile ogni } g_i \text{ \u00e8 diff.} \\ \bullet \text{ quindi: } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq \sum_{i=1}^m \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

Viceversa se ho che g soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

anche

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \\ & \leq \sum_{i=1}^m \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Viceversa se ho che g soddisfa

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$$

Infatti $|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})| \leq |g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|$

perché se $v \in \mathbb{R}^n$ $|v_i| \leq \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2} = |v|$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}$$

Allora anche $\forall i = 1, \dots, m$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} = 0$$

Infatti $|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|$

$$\leq |g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|$$

perché se $v \in \mathbb{R}^m$

$$|v_i| \leq \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_m|^2} = |v|$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g_i(x) - g_i(\bar{x}) - \nabla g_i(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}$$

Def: $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\bar{x}$ se $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{|g(x) - g(\bar{x}) - \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x})|}{|x - \bar{x}|} = 0$

Def: Una fun $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice classe $C^1(A, \mathbb{R}^m)$

se essa risulta differenziabile in A e il gradiente (o le derivate parziali equivalenti) sono continue in A.

$\forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq 1$ diremo che g è di classe $C^k(A; \mathbb{R}^m)$

se essa ammette derivate parziali di ordine k e queste risultano continue su A

Iniziamo a considerare le composizioni di funzioni. Se $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ed $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ posso definire la funzione composta

$$f \circ g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in A$$

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$f \circ g$

Esempio: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$g(t) = \bar{x} + tv \quad \text{dove } \bar{x} \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^m \quad |v|=1$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e posso quindi scrivere la funzione composta

$$f \circ g(t) = f(g(t)) = f(\bar{x} + tv)$$

Supponiamo adesso che $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ allora posso chiedermi chi è la derivata di fog per esempio in $t=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(h) - f \circ g(0)}{h} = (f \circ g)'(0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + hv) - f(\bar{x})}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

In modo simile potrei calcolare la derivata di fog in $t \neq 0$

$$(f \circ g)'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \circ g(t+h) - f \circ g(t)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + (t+h)v) - f(\bar{x} + tv)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + tv + hv) - f(\bar{x} + tv)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv) = \nabla f(\bar{x} + tv) \cdot v$$

La formula precedente dice che fog è derivabile in ogni $t \in \mathbb{R}$ e vale

$$(f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + tv)$$

Essendo fog derivabile su $\mathbb{R}$ (in particolare fog sarà continua su $\mathbb{R}$) posso scrivere

$\forall t > 0$

$$f \circ g(t) - f \circ g(0) = (f \circ g)'(\xi) t$$

dove $\xi \in (0, t)$ (lo applico al teo di Lagrange)

$$f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x} + \xi v) \cdot t \quad *$$

Teo: (di derivabilità delle funzioni composte)

Sia $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ f.t. di classe $C^1(A, \mathbb{R}^m)$ e sia $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ f.t. di classe $C^1(\mathbb{R}^m)$

Allora la funzione composta $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $C^1(A)$ e $\forall \bar{x} \in A$ ho che

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) = \nabla f(g(\bar{x})) \nabla g(\bar{x}) \quad \text{ricordiamo che } \nabla f \text{ é un vettore}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m} \right)$$

Le variabili in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ le denotiamo con $x = (x_1, \dots, x_n)$
 $\mathbb{R}^m$ " " $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$\begin{array}{ccc} A \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \downarrow x & & \downarrow y \end{array}$$

Il gradiente di g invece sarà una matrice

$$\nabla g: \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{quindi } \nabla(f \circ g)(\bar{x}) = \underbrace{\nabla f(g(\bar{x}))}_{\in \mathbb{R}^m} \underbrace{\nabla g(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

$$\nabla f \circ g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(g(\bar{x})), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(\bar{x})) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ g)(\bar{x})_1 &= \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y_2}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\bar{x}) \end{aligned}$$

$$\nabla(f \circ g)(\bar{x}) = (\nabla(f \circ g)_1 \bar{x}, \dots, \nabla(f \circ g)_m \bar{x})$$

$$\nabla(f \circ g)_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \quad i = \{1, \dots, m\}$$

$$\nabla(f \circ g)_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m [\nabla f(g(\bar{x}))]_j [\nabla g(\bar{x})]_{ji}$$

Essendo $f \circ g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ il suo gradiente sarà

$$\nabla(f \circ g) = \left(\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_n} \right)$$

*** $\Rightarrow \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m [\nabla f(g(\bar{x}))]_j [\nabla g(\bar{x})]_{ji} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}) \quad , \dots , \dots$

dimostriamo il Teo delle funzioni composte

dim: fog iniziamo a calcolare le derivate direzionali. Fisso un vettore $V \in \mathbb{R}^m$ e vado a calcolare

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ g(\bar{x} + tV) - f \circ g(\bar{x})}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(\bar{x} + tV)) - f(g(\bar{x}))}{t}$$

$$f(g(\bar{x} + tV)) = f(g(\bar{x})) + f(g(\bar{x} + tV)) - f(g(\bar{x}))$$

$$f(g(\bar{x} + tV)) = f(g(\bar{x}) + g(\bar{x} + tV) - g(\bar{x}))$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(g(\bar{x}) + g(\bar{x} + tV) - g(\bar{x})) - f(g(\bar{x}))$$

$$\text{def. } w := \frac{g(\bar{x} + tV) - g(\bar{x})}{s} \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{dove } s := |g(\bar{x} + tV) - g(\bar{x})| \quad \text{e assumo che } |w| = 1$$

L'espressione precedente diventa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(\bar{x}) + sw) - f(g(\bar{x}))}{t}$$

Ora bisogna ricordare una formula passata chiamata *** e la applico per scrivere

$$f(g(\bar{x}) + sw) - f(g(\bar{x})) = \frac{\partial f}{\partial w}(g(\bar{x}) + \xi w) s \quad \text{dove } \xi \in (0, s)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s \frac{\partial f}{\partial w} (g(\bar{x}) + \xi w)}{t}$$

Essendo f differenziabile ho che

$$\frac{\partial f}{\partial w} (g(\bar{x}) + \xi w) = \nabla f (g(\bar{x}) + \xi w) \cdot w$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s \nabla f (g(\bar{x}) + \xi w) \cdot w}{t}$$

Ricordiamo che $w = \frac{g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})}{s}$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0}} \frac{\nabla f (g(\bar{x}) + \xi w) \cdot [g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})]}{t}$$

essendo $\xi \in (0, s)$ si ha $s = |g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x})|$

lo da quando $t \rightarrow 0$ anche $s \rightarrow 0$ perché g è continua in $\bar{x}$ quindi anche $\xi \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \nabla f (g(\bar{x}) + \xi w) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \nabla f (g(\bar{x}))$$

mentre $g(\bar{x} + tv) - g(\bar{x}) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla g(\bar{x}) \cdot v$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} (\dots) = \nabla f (g(\bar{x})) [\nabla g(\bar{x}) \cdot v]$$

nel caso in cui v sia $v = e_i$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ g(\bar{x} + te_i) - f \circ g(\bar{x})}{t} = \nabla f (g(\bar{x})) [\nabla g(\bar{x}) e_i]$$

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \nabla f (g(\bar{x})) [\nabla g(\bar{x}) e_i] = \nabla f (g(\bar{x})) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \nabla f (g(\bar{x}))_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f (g(\bar{x}))}{\partial y_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

Il teorema della differenziabilità totale

$\Downarrow$

$f \circ g$ è differ.

$$\nabla (f \circ g) = \left(\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla (f \circ g)(\bar{x}) = \nabla f (g(\bar{x})) \cdot \nabla g(\bar{x})$$

□

$\Rightarrow \nabla (f \circ g)(\bar{x})$ è un vettore la cui componente i -esima è data da

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\bar{x})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\bar{x})$$

essendo $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ e $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ continue rispettivamente
che anche $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}$ è continua su A .