

$$f(t) = \bar{x} + tv \quad \text{dove } \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$v \in \mathbb{R}^n \quad |v| = 1$$

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

se consideriamo una $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo considerare $g \circ f(t) = g(f(t)) = g(\bar{x} + tv)$

$$g \circ f(t) = g(f(t)) = g(\bar{x} + tv)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\bar{x} + tv) = \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{x} + tv)$$

Applichiamo il teorema di derivazione della funzione composta

$$(g \circ f)'(t) = \nabla g(f(t)) \cdot \nabla f(t) = \nabla g(f(t)) \cdot v = \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{x} + tv)$$

$$\nabla f(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) = f'(t) = v$$

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla g(f(t)) \cdot v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(t)) v_j$$

Supponiamo che $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Posso andare a calcolare la derivata seconda di $(g \circ f)''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)'(h) - (g \circ f)'(0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(h)) v_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(0)) v_j}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(f(h)) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(0))}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x} + hv) - \frac{\partial g}{\partial x_j}(\bar{x})}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n v_j \left(\frac{\Psi(\bar{x} + hv) - \Psi(\bar{x})}{h} \right)$$

$$\boxed{\Psi = \frac{\partial g}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial \Psi}{\partial v}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial x_j}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n v_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i \right)$$

essenzialmente

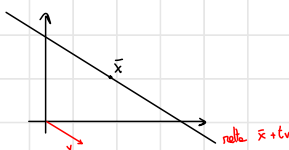
$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right) (\bar{\mathbf{x}}) v_i \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}) v_i\end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che

$$(g \circ f)'(0) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n v_j \frac{\partial g}{\partial x_i x_j}(\bar{\mathbf{x}}) v_i$$

$$(g \circ f)'(0) = v \cdot \left(\nabla g(\bar{\mathbf{x}}) v \right) = \frac{d}{dt} g(\bar{\mathbf{x}} + tv) \Big|_{t=0}$$

Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f(t) = \bar{\mathbf{x}} + tv$
quando calcolo $g(\bar{\mathbf{x}} + tv)$



$$\frac{d}{dt} (g(\bar{\mathbf{x}} + tv)) \Big|_{t=0} = \nabla g(\bar{\mathbf{x}}) \cdot v, \text{ derivate in } \bar{\mathbf{x}} \text{ della funzione } g \text{ ristretta alla retta } \bar{\mathbf{x}} + tv$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (g(\bar{\mathbf{x}} + tv)) = v \cdot \left(\nabla^2 g(\bar{\mathbf{x}}) v \right) \text{ derivata seconda della funzione } g \text{ ristretta alla retta } \bar{\mathbf{x}} + tv$$

Una funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che ammette derivata seconda ha un punto di massimo relativo in $t=0$ deve avere derivata prima nulla in $t=0$ e derivata seconda $(h'') \leq 0$

Def: Supponiamo $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora il punto $\bar{x}$ si dice punto di massimo per f se $\forall x \in A$ nulla
 $f(\bar{x}) \geq f(x)$

per f se $\forall x \in A$ risulta
 $f(\bar{x}) \geq f(x)$
 Si dice di massimo stretto se $\forall x \in A$ $x \neq \bar{x}$
 $f(\bar{x}) > f(x)$
 Si dice punto di minimo se $\forall x \in A$
 $f(\bar{x}) \leq f(x)$
 e punto di minimo stretto se
 $f(\bar{x}) < f(x) \quad \forall x \in A \quad x \neq \bar{x}$
 Dirò che $\bar{x}$ è un punto di massimo relativo
 se $\exists r > 0$ per cui
 $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in B_r(\bar{x})$

e dirò che è di massimo relativo stretto se

$$f(\bar{x}) > f(x) \quad \forall x \in B_r(\bar{x}), \quad x \neq \bar{x}$$

$\bar{x}$ è minimo relativo se $\exists r > 0$ p.c.

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in B_r(\bar{x})$$

E minimo relativo stretto se $f(\bar{x}) < f(x)$

Se f è differenziabile in $\bar{x}$ diremo che $\bar{x}$ è un punto stazionario per f se $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è un punto di massimo. Allora $\forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$

la derivata necessariamente la sua derivata in $t=0$ si annulla

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

In particolare si sceglie $v = e_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

quindi $\nabla f(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ è pto. stazionario

Stessa cosa sarà vera se X è un punto di minimo. Similmente se è massimo relativo o minimo relativo.

La derivata seconda rispetto a t di $f(\bar{x} + tv)$ deve essere ≤ 0 in $t=0$ se X è un punto di massimo o massimo relativo

$$\Rightarrow v \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) v) \leq 0$$

$$v \cdot (\nabla f(\bar{x}) v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) v_i = 0 \quad \forall v \text{ con } |v|=1$$

Similmente se $\bar{x}$ è un punto di minimo o minimo relativo deve avere che la derivata seconda di $f(\bar{x} + tv)$ in $t=0$ deve essere ≥ 0

$$v \cdot (\nabla^2 f(\bar{x}) v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, |v|=1$$

Def Sia M una matrice $n \times n$. Diremo che M è definita positiva se $\forall v \text{ con } |v|=1$ ha che $v \cdot (Mv) > 0$

Invece diremo che è definita negativa se $\forall v \in \mathbb{R}^n \text{ con } |v|=1$ ha che $v \cdot (Mv) < 0$

$v \cdot (Mv) > 0$

Invece diremo che M è definita negativa se $\forall v \in \mathbb{R}^n \text{ con } |v|=1$ ha che $v \cdot (Mv) < 0$.

Diremo che M è semidefinita positiva se $\forall v$

$$v \cdot (Mv) \geq 0 \quad \text{ed esiste } \nabla \in \mathbb{R}^n, |\nabla|=1$$

per cui $\nabla \cdot (M\nabla) = 0$

Diremo che M è semidefinita negativa se $\forall v$

$$|v|=1 \quad \text{ha} \quad v \cdot (Mv) \leq 0 \quad \text{ed esiste}$$

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^n, |\bar{v}|=1 \quad \text{t.c.} \quad \bar{v} \cdot (M\bar{v}) = 0.$$

Teo Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un p.b. di max. Allora $\bar{x}$ è stazionario $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e la matrice $\nabla^2 f(\bar{x})$ deve essere semi definita negativa o definita negativa

