

Teo. Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(A)$. Sia $x \in A$

Allora vale la seguente formula di Taylor

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})] \cdot (x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

dove $R(x, \bar{x})$ soddisfa la seguente $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$

Dim: $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad |v| = 1$ posto considero $f(\bar{x} + tv) = g(t)$ e $g(0) = f(\bar{x})$

Adesso g risulta di classe C^2 su un intorno di $t=0$ e quindi per la classica formula di Taylor in una variabile ho che

$$g(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{t^2}{2} g''(\tau) \quad \text{dove } \tau \in (0, t) \quad \text{se } t > 0$$

$$g(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + \left[\frac{1}{6} g'''(\tau) - \frac{1}{2} g''(0) \right] t^3$$

Allora g' è dato da

$$g'(0) = \left. \frac{d}{dt} f(\bar{x} + tv) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot v$$

$$g''(0) = [\nabla^2 f(\bar{x}) v] \cdot v$$

$$g''(\tau) = [\nabla^2 f(\bar{x} + \tau v) v] \cdot v$$

Se sostituisco nella formula di Taylor per g ottengo

$$f(\bar{x} + tv) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot tv + \left[\nabla^2 f(\bar{x}) \cdot v \right] \cdot v \frac{t^2}{2} + R$$

$$R = \left[g''(\tau) \frac{t^2}{2} - g''(0) \frac{t^2}{2} \right] = \frac{t^2}{2} [\nabla^2 f(\bar{x} + \tau v) v] \cdot v - \frac{t^2}{2} [\nabla^2 f(\bar{x}) v] \cdot v = \frac{t^2}{2} [(\nabla^2 f(\bar{x} + \tau v) - \nabla^2 f(\bar{x})) v] \cdot v$$

Preso un caso particolare $v = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$ e posto $t = |x - \bar{x}|$

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \left[\frac{\nabla^2 f(\bar{x}) (x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} \right] \cdot \frac{(x - \bar{x}) \cdot |x - \bar{x}|}{|x - \bar{x}|^2}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})] \cdot (x - \bar{x}) + R$$

$$R = \frac{1}{2} |x - \bar{x}|^2 \left[\left[\nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right] \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \right] \cdot \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|}$$

$$R : \frac{1}{2} \left[\nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right] (x-\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})$$

Il teorema é dimostrato dalla formula del rettangolo a patto di far vedere che

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0 \quad \text{da } R(x, \bar{x}) = R$$

$$\frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} \left[\nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right] \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \cdot \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|}$$

$$\begin{aligned} \frac{|R(x, \bar{x})|}{|x - \bar{x}|^2} &\leq \frac{1}{2} \left| \left(\nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right) \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right| \left| \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right) \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right| \left| \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left| \nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right|$$

ricordiamo che $\tau \in (0, 1)$
 $\tau \in (0, |x - \bar{x}|)$

Essendo $f \in C^2(A)$ e $\nabla^2 f$ é continuo ed essendo continuo in $\bar{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left| \nabla^2 f \left(\bar{x} + \tau \frac{x-\bar{x}}{|x-\bar{x}|} \right) - \nabla^2 f(\bar{x}) \right| = 0$$

Teorema Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(A)$. Supponi $\bar{x} \in A$ sia un punto stazionario e che $\nabla^2 f(\bar{x})$ é una matrice definita positiva. Allora $\bar{x}$ é un punto di minimo relativo stretto

$$\Leftrightarrow \exists B_n(\bar{x}) \text{ t.c. } \forall x \neq \bar{x} \quad x \in B_n(\bar{x}) \quad f(x) > f(\bar{x})$$

Se $\bar{x} \in A$ é stazionario e $\nabla^2 f(\bar{x})$ definita negativa

Allora $\bar{x}$ é un punto di massimo relativo stretto