

Teorema

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe $C^2(A)$. Supponiamo $\bar{x} \in A$ sia un punto stazionario e supponiamo che $\nabla^2 f(\bar{x})$ sia definita positiva. Allora $\bar{x}$ è un punto di minimo relativo stretto

dim $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e quindi grazie alla formula di Taylor al secondo ordine posso scrivere

$$f(x) - f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})] \cdot (x - \bar{x}) + R(x, \bar{x})$$

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})] \cdot (x - \bar{x}) + R(x, \bar{x}) \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$$

Divido l'espressione precede per $|x - \bar{x}|^2$ e ottengo

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right] \cdot \frac{(x - \bar{x})}{|x - \bar{x}|} + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

$$\text{considero } v = \frac{x - \bar{x}}{|x - \bar{x}|} \quad \text{e } |v| = 1 \quad \frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

Abbiamo supposto $\nabla^2 f(\bar{x})$ definito positivo quindi $[\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v > 0 \quad \forall |v| = 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^n$: q.t.

$\{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\} \cap B_1(0)$ è un insieme chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto

$[\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v > 0 \quad \forall v$ con $|v| = 1$ e inoltre la funzione $v \mapsto [\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v$ è continua su $\partial B_1(0)$

quindi ammette un punto di minimo. Sia esso $\bar{v}$ avrò $m := [\nabla^2 f(\bar{x})\bar{v}] \cdot \bar{v} > 0$

$$\text{Allora} \quad \frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = \frac{1}{2} [\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \geq \frac{1}{2} m + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2}$$

Ricordiamo che $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} = 0$

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tale che se } x \in B_\epsilon(\bar{x}) \quad \text{allora} \quad \left| \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right| < \frac{1}{4} m$$

$$\text{Se} \quad \left| \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right| < \frac{1}{4} m \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \right| > -\frac{1}{4} m$$

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} \geq \frac{1}{2} m + \frac{R(x, \bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} > \frac{1}{2} m - \frac{1}{4} m = \frac{1}{4} m > 0 \quad \forall x \in B_\epsilon(\bar{x})$$

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{|x - \bar{x}|^2} > 0 \quad \forall x \in B_\alpha(\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(\bar{x}) \quad \forall x \in B_\alpha(\bar{x})$$

$\bar{x}$ è un punto di minimo relativo stretto.

□

Teo K è compatto in uno spazio metrico completo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato

se f è continua su $K \Rightarrow f$ omette max e min su K

olm: $m = \inf \{f(x) : x \in K\}$ per definizione di inf $\exists y_n \in \{f(x) : x \in K\}$

tale che $y_n \rightarrow m$ quando $n \rightarrow +\infty$ essendo $y_n \in \{f(x) : x \in K\} \Rightarrow y_n = f(x_n)$

per qualche $x_n \in K$ Essendo K compatto posso trovare una sottosuccessione convergente

$$x_{n_j} \rightarrow \bar{x} \in K \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty$$

$$f(x_{n_j}) = y_{n_j} \rightarrow m \quad \text{quando } j \rightarrow +\infty$$

essendo f continua

$$f(x_{n_j}) \rightarrow f(\bar{x}) \quad j \rightarrow +\infty$$

Da cui deduco $f(\bar{x}) = m$. $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in K$,

$\bar{x}$ è il punto di minimo.

□

Supponiamo in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ di aver trovato un punto stazionario $\bar{x}$ di $f \in C^1(A)$

Andiamo a studiare $\nabla^1 f(\bar{x})$

$$\nabla^1 f(\bar{x}) \text{ def. per } \forall v : |v| = 1$$

$$[\nabla^1 f(\bar{x})v] \cdot v > 0$$

Posso invece utilizzare il fatto che $\nabla^2 f(\bar{x})$ è una matrice simmetrica quindi è diagonalizzabile

Ovvero esiste una matrice ortogonale M tale che $\nabla^2 f(\bar{x}) = M^{-1} D M$ dove D è diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = M^T \Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x}) = M^T D M \quad \text{vado a studiare la quantità} \quad (M^T D M) \cdot v \quad \forall v : |v| = 1$$

Ricordiamo che $[\nabla^2 f(\bar{x})v] \cdot v = \nabla^2 f(\bar{x})_{ij} v_j v_i$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nabla^2 f(\bar{x})_{ij} v_j v_i \right)$$

convenzione di Einstein (si sottintende la sommatoria se ci sono 2 indici uguali, in questo caso j)

$$= (M^T D M)_{ij} v_j v_i$$

in generale $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}$

$$(M^T D M)_{ij} = M_{ik}^T D_{kh} M_{hj} \quad \text{modo a sostituire}$$

$$(*) \quad M_{ik}^T D_{kh} M_{hj} v_j v_i = M_{ki} D_{kh} M_{hj} v_j v_i = D_{kh} (M_{hj} v_j) (M_{ki} v_i)$$

$$w = M v \quad \Rightarrow \quad w_h = M_{hj} v_j \\ w_k = M_{ki} v_i$$

$$= D_{kh} w_k w_h$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} w \cdot w = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ \lambda_2 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$$

Se gli autovalori λ_1, λ_2 sono entrambi positivi $\Rightarrow \nabla^2 f(\bar{x})$ é definito positivo
 " " " negativi " " negativo

Se hanno segno discorde allora non é definito, visto che $[\nabla^2 f(\bar{x})] \cdot v \cdot v = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$

$[\nabla^2 f(\bar{x})] \cdot v \cdot v$ assume sia valori positivi che negativi $\Rightarrow$ il punto X non é né di massimo né di minimo relativo ma si chiama punto di stallo.

Se un autovalore é nullo, la matrice sarà solamente semidefinita.

$$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0 \quad = \text{def. pos.}$$

$$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad = \text{def. neg.}$$

$$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad = \text{punto di stallo}$$

$$\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad = \text{semi def. pos.}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad = \text{semi def. neg.}$$

$$\text{Se calcolo } \det(\nabla^2 f(\bar{x})) = \lambda_1 \lambda_2$$

- $\det \nabla^2 f(\bar{x}) > 0$ la matrice é definita o positiva o negativa
- $\det \nabla^2 f(\bar{x}) < 0$ la matrice non é definita (punto di sella)

• $\det \nabla^2 f(\bar{x}) = 0$ almeno uno degli autovalori é nullo, quindi é semidefinita. Non posso dire niente su f

Nel caso che $\det \nabla^2 f(\bar{x}) > 0$ posso guardare il primo elemento della matrice $\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\text{se } a_{11} > 0 \rightarrow \text{def. pos.}$$

$$a_{11} < 0 \rightarrow \text{def. neg.}$$

Nel caso in cui $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oppure anche $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad n \geq 3$

se X é un punto stazionario allora vado a studiare $\nabla^2 f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(\nabla^2 f(\bar{x})) > 0$$

$$\nabla^2 f(\bar{x}) \text{ ha } n \text{ autovalori } \det \nabla^2 f(\bar{x}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$\text{se } \lambda_1 \dots \lambda_n > 0 \text{ non posso concludere che } \lambda_1 > 0 \dots \lambda_n > 0$$

In generale non posso concludere che la matrice é definita positiva

o negativa. Però se $\nabla^2 f(\bar{x}) < 0$ posso sempre concludere che due autovalori hanno segno discorde $\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 < 0$
 $\Rightarrow$ punto sella

$\det \nabla^2 f(\bar{x}) = 0$ allora almeno un autovalore é nullo e anche in questo caso non posso concludere nulla

Supponiamo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \nabla^2 f(\bar{x}) = A$

Se A fosse diagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f(\bar{x}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\det(a_{11}) = a_{11} \lambda_1$$

$$\text{seguo } \left(\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \text{seguo } (\lambda_1 \lambda_2) \quad \text{seguo } (\det(a_{11})) = \text{seguo } \lambda_1$$

Se tutti i determinanti sono $> 0 \Rightarrow$ tutti gli autovalori sono $> 0 \Rightarrow$ la matrice é definita positiva

Esercizio $f(x,y) = x - x^2 - y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cerca i punti di massimo e minimo relativo

$$\nabla f(x,y) = (1-2x, -2y)$$

$$\stackrel{0}{=} \text{ per } \left\{ 1-2x=0 \text{ e } -2y=0 \right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \quad y=0$$

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

la matrice è già diagonale

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2$$

$\Downarrow$

$\nabla^2 f(x,y)$ è def. neg.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

sarà un massimo relativo stretto

Domanda. È un massimo assoluto?

$$f(x,y) \leq f\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad ?$$

$$x - x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$x - x^2 - y^2 \leq x - x^2$$

ha come grafico una parabola con concavità verso il basso $\rightarrow$ ammette massimo nel suo vertice

$$g(x) = x - x^2$$

$$g'(x) = 1 - 2x \quad \text{si annulla in } x = \frac{1}{2}$$

$$x - x^2 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



$$f(x,y) = x(x-y)e^{y-x}$$

$$\text{calcolo } \nabla f(x,y) = ((x+y)x^{y-x} + xe^{y-x} - x(x+y)e^{y-x}, xe^{y-x} + x(x+y)e^{y-x})$$

Cerca i punti stazionari

$$\begin{cases} (x+y)x^{y-x} + xe^{y-x} - x(x+y)e^{y-x} = 0 \\ xe^{y-x} + x(x+y)e^{y-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) + x - x(x+y) = 0 \\ x + x(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x(1+x+y) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & (1) \\ 1+x+y = 0 & (2) \end{cases}$$

nel caso (1) sostituisco nella 1^a equazione
 $\Rightarrow y=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$ e
 l'unico pto stazionario
 nel caso (2) $1+x+y=0 \Rightarrow x+y=-1$
 sostituisco nella prime eq.
 $\Rightarrow -1+x+x=0$
 $\Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

se $x=\frac{1}{2}$ e $x+y=-1 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$ quindi l'unico punto stazionario è $(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

Calcolo la matrice Hessiana

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{y-x} (x+y+x-x(x+y)) \\
 &= e^{y-x} [2x+y-x^2-xy] \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{y-x} [x+x^2+xy] \\
 \nabla^2 f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{y-x} (2x+y-x^2-xy) + e^{y-x} [2-2x-y]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{y-x} [x+x^2+xy] + e^{y-x} [x]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^{y-x} [x+x^2+xy] + e^{y-x} [1+2x+y] \quad (x,y)=(0,0) \quad (x,y)=(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$\nabla^2 f((0,0))$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -e^{y-x} (2x+y-x^2-xy) + e^{y-x} [2-2x-y] \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= e^{y-x} [x+x^2+xy] + e^{y-x} [x] \\
 \nabla^2 f(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) &= -e^{-2} (1-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}) \\
 &\quad + e^{-2} (2-1+\frac{3}{2})
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -e^{-2}\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) & // \\ + e^{-2}\left(2 - 1 + \frac{3}{2}\right) & \\ -e^{-2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right] & e^{-2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right] \\ + e^{-2}\left[2 - \frac{3}{2}\right] & + e^{-2} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}e^{-2} & e^{-2} \cdot \frac{1}{2} \\ e^{-2} \cdot \frac{1}{2} & e^{-2} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = e^{-4} > 0$$

$$\begin{aligned} \det \nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) &= \frac{5}{2}e^{-2} \cdot \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} \cdot \frac{1}{2}e^{-2} \\ &= \frac{5}{4}e^{-4} - \frac{1}{4}e^{-4} = e^{-4} > 0 \end{aligned}$$

il segno di $\frac{5}{2}e^{-2}$ è positivo
 $\Rightarrow \nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ è definita positiva
 $\Rightarrow f$ ha punto di minimo nel punto
in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$