

Integrazione in più variabili

Def: un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è un insieme della forma $[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}$

In $\mathbb{R}$ con $n > 2$ possiamo comunque definire i rettangoli come prodotto di intervalli semiaperti.

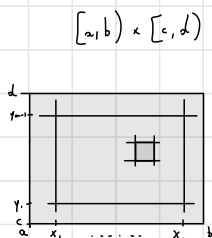
Ad esempio

$$R : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Def: Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definisco la funzione caratteristica di E come X_E

$$X_E(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E \\ 0 & (x, y) \notin E \end{cases}$$

Dato un rettangolo posso considerare la sua divisione in rettangoli più piccoli nel seguente modo:



considero una sequenza di punti

$$\begin{array}{ccc} x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m & & \\ a & & b \\ c & & d \\ y_0 < y_1 < \dots < y_n < y_{n+1} & & \end{array}$$

Considero per ogni $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ il rettangolo

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

in tutto ho $n \times m$ rettangolini e $\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n R_{ij} = [a, b] \times [c, d]$

Osservo anche che $R_{ij} \cap R_{kl} = \emptyset$ se $(i, j) \neq (k, l)$

Def. Sia $[a, b] \times [c, d]$ un rettangolo e $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dico che f è una funzione semplice se $\exists$ una suddivisione di $[a, b] \times [c, d]$ in rettangolini (come sopra) R_{ij} con $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ed f è costante su ognuno di questi R_{ij}

$$\Rightarrow f(x) = \lambda_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{quando } x \in R_{ij}$$

Per le funzioni semplici posso definire l'integrale nel seguente modo

Def: Sia $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ^{reale}. Allora

$$\int f \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} m(R_{ij})$$

$$\text{dove } m(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \text{area di } R_{ij}$$

Def: Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisco il supporto di f come l'insieme

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq 0\}}$$

Ovviamente $\text{supp}(f)$ è compatto ($\Leftrightarrow$ è limitato)

allora dico che f ha supporto compatto o f è una funzione a supporto compatto

Def: Sia $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ supponiamo f limitata. Definisco

$$\mathcal{F}^+ = \{ \varphi \text{ semplice tale che } \varphi \geq f \}$$

$$\mathcal{F}^- = \{ \varphi \text{ semplice tale che } \varphi \leq f \}$$

Def: Dico che $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ limitata è innegabile secondo Riemann se

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{F}^+} \int \varphi \, dx \, dy = \inf_{\varphi \in \mathcal{F}^-} \int \varphi \, dx \, dy$$

In tal caso dirò che $\int_{\mathbb{R}} f \, dx \, dy =$ al valore comune all'uguaglianza precedente

$$\int f \, dx \, dy = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}^+} \int \varphi \, dx \, dy = \inf_{\varphi \in \mathcal{F}^-} \int \varphi \, dx \, dy$$

$$\int^* f \, dx \, dy = \inf_{\varphi \in \mathcal{F}^+} \int \varphi \, dx \, dy$$

$\Rightarrow f$ è integrabile se è solo se $\int^* f = \int_* f$

$$\int_* f \, dx \, dy = \sup_{\varphi \in \mathcal{F}^-} \int \varphi \, dx \, dy$$

Se $E \subseteq [a, b) \times [c, d)$ posso anche definire l'integrale di f su E come

$$\int_E f \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_E \, dx \, dy \quad \chi_E = \int_0^1 \begin{matrix} (x,y) \in E \\ \text{"} \end{matrix} \, dy$$

mi aspetto che $\int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_x = \int_{\mathbb{R} \setminus E} f \cdot \chi_x + \int_E f \cdot \chi_x$

" " " "

0 $\int_E f$

Osservazione $f: [a, b) \times [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ limitato risulta integrabile se e solo se

$$\exists \varphi \in \mathcal{J}^+ \text{ e } \psi \in \mathcal{J}^- \text{ t.c.}$$

$$\int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy < \varepsilon$$

In altre parole,
se f è integrabile

$$\Rightarrow \inf_{\varphi \in \mathcal{J}^+} \int \varphi \, dx \, dy = \int f \, dx \, dy$$

$$\sup_{\psi \in \mathcal{J}^-} \int \psi \, dx \, dy = \int f \, dx \, dy$$

per definizione di inf $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{J}^+$
t.c. $\int \varphi \, dx \, dy - \int f \, dx \, dy < \varepsilon/2$ ①

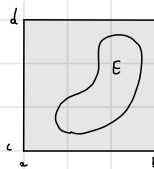
per def. di sup $\forall \varepsilon > 0 \exists \psi \in \mathcal{J}^-$ t.c. che
 $\int f \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy < \varepsilon/2$ ②

somma ① + ② ottengo quello che ho osservato
prima

Def. Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato si dice misurabile secondo Peano-Jordan se

χ_E è integrabile secondo Riemann

$\int \chi_E \, dx \, dy$ è chiamata misura (di PEANO JORDAN) dell'insieme E .

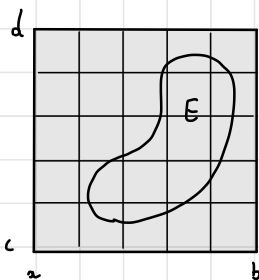


χ_E è definibile su un rettangolo $[a, b) \times [c, d)$ di cui E

$$\int \chi_E \, dx \, dy = \int^* \chi_E \, dx \, dy = \int_* \chi_E \, dx \, dy$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{J}^+, \psi \in \mathcal{J}^- \text{ t.c.}$$

$$\int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy < \varepsilon$$



$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{in } E \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$$

φ deve soddisfare $\varphi \geq \chi_E$

prendo $\varphi = 0$ su R_{ij} quando $R_{ij} \subseteq E^c$
 prendo $\varphi = 1$ su R_{ij} quando $R_{ij} \subseteq E$
 prendo $\varphi = 1$ su R_{ij} quando $R_{ij} \cap E \neq \emptyset$ e $R_{ij} \cap E^c \neq \emptyset$

prendo $\psi = 0$ su R_{ij} quando $R_{ij} \subseteq E^c$
 prendo $\psi = 1$ su R_{ij} quando $R_{ij} \subseteq E$
 prendo $\psi = 0$ su R_{ij} quando $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$

$$\int \varphi \, dx \, dy = \int \psi \, dx \, dy = \sum \lambda_{ij} m(R_{ij}) = \sum \mu_{ij} m(R_{ij})$$

dove λ_{ij} = valore che assume φ su R_{ij}

dove μ_{ij} = valore che assume ψ su R_{ij}

$\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ sui rettangoli R_{ij} o $R_{ij} \subseteq E$
 o $R_{ij} \subseteq E^c$

$\lambda_{ij} = 1$
 $\mu_{ij} = 0$ sui rettangoli R_{ij} con $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$

ottengo che

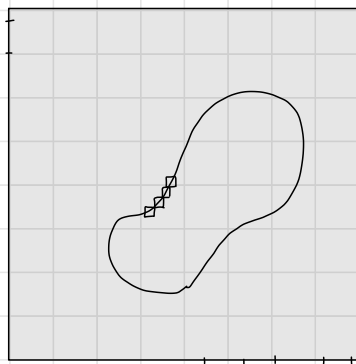
$$\int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy = \sum_{\substack{i,j \text{ tale da} \\ R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset}} m(R_{ij})$$

dove la somma è su tutti i rettangoli che intersecano ∂E .

Richiedo che E è misurabile (cioè χ_E è integrabile) e' equivalente a richiedere che $\forall \varepsilon > 0$

Esiste una suddivisione in rettangoli R_{ij} tale che

$$\sum_{R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon$$



Def. Dico che P è un plico rettangolo se $P \subseteq \mathbb{R}$ è Unione finita di rettangoli



Dalle osservazioni precedenti posso dire che $E \subseteq \mathbb{R}^1$ limitato risulta misurabile secondo se è solo se $\forall \epsilon > 0 \exists$ un plirettangolo P tale che $P \supseteq E$ ed $\exists$ un plirettangolo Q tale che $Q \subseteq E$ ali che $m(P) - m(Q) < \epsilon$

$\Leftrightarrow E$ è misurabile se e solo se $\inf \{ m(P) : P \text{ plirettangolo } P \supseteq E \} =$

$= \sup \{ m(Q) : Q \text{ plirettangolo } Q \subseteq E \}$

$m(P) = \sum m(\text{rectangle})$ dove sommo si tutti i rettangoli che formano parte del plirettangolo

Def: $m(E) = \inf \{ m(P) : P \text{ plirettangolo } P \supseteq E \}$
 $\sup \{ m(Q) : Q \text{ plirettangolo } Q \subseteq E \}$

Corollario: un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^1$ limitato è misurabile se e solo se $\forall \epsilon > 0 \exists P$ plirettangolo t.c.

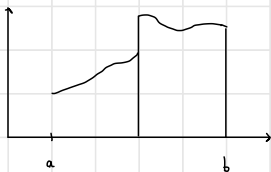
$$P \supseteq \partial E \text{ e } m(P) < \epsilon \Rightarrow m(\partial E) = 0$$

Oss: Se A, B sono insiemi limitato misurabili, allora anche $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sono insiemi misurabili.

Il motivo è che $m(\partial A) = 0$ $m(\partial B) = 0$ tutti gli insiemi precedenti $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$

hanno la proprietà che il loro bordo è sempre contenuto in $\partial A \cup \partial B$. E quindi avrà misure di nulla

E, Sia $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ supponiamo g sia integrabile secondo Riemann



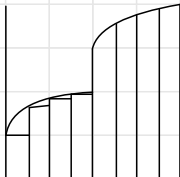
il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è l'insieme
 $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x) \}$

Dico che questo insieme risulta misurabile secondo

Infatti essendo $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann posso trovare delle funzioni semplici $h, k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

t.c. $h(x) \leq g(x) \leq k(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b k(x) dx - \int_a^b h(x) dx < \epsilon$$



Il sottografo di h è un'area $\leq g$ rettangoli $\Rightarrow$ plurirettangolo
 $H = \{x \in [a, b) \mid y \in [0, h(x)]\}$ soddisfa $H \subseteq$ sotto grafico di g

Similmente il sotto grafico di K è un plurirettangolo

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b) \mid y \in [0, k(x)]\}$ t.c. $K \supseteq$ sotto grafico di y

$$m(K) = \int_a^b k(x) dx \quad m(H) = \int_a^b h(x) dx \quad \text{nel momento in cui} \quad \int_a^b k(x) dx - \int_a^b h(x) dx < \varepsilon$$

$$\Rightarrow m(K) - m(H) < \varepsilon$$

ho verificato che $\forall \varepsilon > 0 \exists$ plurirettangolo K $\exists$ Plurirettangolo H t.c.

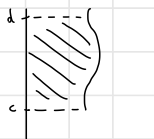
$\Rightarrow m(K) - m(H) < \varepsilon$
 ho verificato che $\forall \varepsilon > 0 \exists$ plurirettangolo K
 e $\exists$ plurirettangolo H tali che
 $K \supseteq$ sottografo di $y \supseteq H$
 e $m(K) - m(H) < \varepsilon$
 $\Rightarrow$ il sottografo di y è misurabile
 secondo Riemann - Jordan
 e risulta $m(E) = \int_a^b f(x) dx$
 $E = \{(x, y) : x \in [a, b) \mid y \in [0, f(x)]\}$

Insiemi di questo tipo $y \in [0, f(x)]$

Insiemi di questo tipo prendono nome di INSIEMI NORMALI RISPETTO L'ASSE Y

Se $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^+$ è integrabile secondo Riemann posso considerare il grafico di f

$$x = f(y)$$



$\{(x, y) : y \in [c, d) \mid x \in [0, f(y)]\}$ INSIEME NORMALE RISPETTO L'ASSE X

Esempio 2. date $g_1, g_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$
 tali che $g_1(x) < g_2(x) \quad \forall x \in (a, b)$
 e tali che g_1, g_2 sono integrabili rispetto Riemann
 Allora posso considerare l'unione
 $E = \{(x, y) : x \in [a, b), y \in [g_1(x), g_2(x)]\}$



sotto grafico di g_2 a cui
 sottraggo il sotto grafico di g_1

$\Rightarrow E$ è normale

$$m(E) = \int_a^b g_2(x) dx - \int_a^b g_1(x) dx = \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx$$

$g_1 < g_2$ posso sempre definire l'insieme E

$g_1 < g_2$ posso sempre definire l'insieme E
 E è sempre misurabile e $m(E) = \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx$
 anche se g_1 e g_2 assumono valori negativi
 l'importante è che siano integrabili secondo Riemann

ANCHE QUESTI SI CHIAMANO INSIEMI NORMALI RISPETTO L'ASSE Y

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \times [f_1(y), f_2(y)]\}$$

ANCHE QUESTI SI CHIAMANO INSIEMI NORMALI
 RISPETTO L'ASSE Y

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d] \text{ e } x \in [f_1(y), f_2(y)]\}$$

dove $f_1, f_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabili
 con $f_1(y) < f_2(y)$

$\Rightarrow F$ misurabile $m(F) = \int_c^d f_2(y) - f_1(y) dy$

F è un insieme NORMALE RISPETTO L'ASSE X.

Teorema Supponiamo f : funzione continua su
 un rettangolo chiuso $[a, b] \times [c, d]$

Allora f è integrabile secondo Riemann

Vale il seguente enunciato: f continua su un compatto $K \rightarrow f$ uniformemente continua su K

Una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall p, q \in E$ con $|p - q| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$

Facciamo vedere che f continua su $K \rightarrow f$ uniformemente continua.

Supponiamo per assurdo non lo sia.

$\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall n \quad \exists p_n, q_n \in K$ tale che $|p_n - q_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(p_n) - f(q_n)| \geq \varepsilon_0$

Estraggo una sottosuccessione di (p_n)

$$p_{n_k} \text{ t.c. } p_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p$$

Corrispondentemente a (p_{n_k}) ho (q_{n_k}) Estraggo un'ulteriore sottosuccessione da (q_{n_k})

$$q_{n_{k_j}} \text{ t.c. } q_{n_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} q \in K$$

Corrispondentemente avrò $p_{n_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} p$

$$|p_{n_{k_j}} - q_{n_{k_j}}| < \frac{1}{n_{k_j}}$$

$$\text{quindi } j \rightarrow +\infty \quad |p_{n_{k_j}} - q_{n_{k_j}}| \rightarrow 0$$

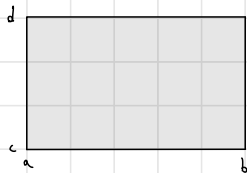
$\Rightarrow p$ e q devono coincidere.
 $p = q$
 $|f(p_{n_{k_j}}) - f(q_{n_{k_j}})| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$
per cui $p_{n_{k_j}}, q_{n_{k_j}} \rightarrow p = q$
questo annulla l'ipotesi - ovvero arriva
 $|f(p_{n_{k_j}}) - f(q_{n_{k_j}})| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall j$
□

Dim: se f è continua su $[a, b] \times [c, d]$ allora f è integrabile secondo Riemann

So che f è uniformemente continua su $[a, b] \times [c, d]$

Fisso $\varepsilon > 0$ e $\exists \delta > 0$ t.c. se

$$|p - q| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon \quad p, q \in \mathbb{R}$$



Suddivido R in rettangolini R_{ij} t.c. $\text{diam}(R_{ij}) < \delta$
su ogni rettangolo per angolo definisco

$$\lambda_{ij}^+ = \max_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$$

$$\lambda_{ij}^- = \min_{(x,y) \in R_{ij}} f(x,y)$$

Per uniforme continuità di f so che $|f(p) - f(q)| < \varepsilon \quad \forall p, q \in R_{ij} \Rightarrow \lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^- \leq \varepsilon$

Definisco φ funzione semplice come

$$\varphi(x) = \lambda_{ij}^+ \quad \text{se } x \in R_{ij}$$

Definisco ψ funzione semplice come

$$\psi(x) = \lambda_{ij}^- \quad \text{se } x \in R_{ij}$$

$$\begin{aligned} \int \varphi \, dx \, dy &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}^+ m(R_{ij}) \\ \int \psi \, dx \, dy &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}^- m(R_{ij}) \\ \Rightarrow \int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy &= \sum_{i,j} (\lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^-) m(R_{ij}) \leq \varepsilon \sum_{i,j} m(R_{ij}) = \varepsilon m(R) \end{aligned}$$

$m(R) = (b-a) \cdot (d-c)$ quindi ho fatto vedere che posso sempre trovare

$\varphi \in \mathcal{J}^+$ e $\psi \in \mathcal{J}^-$ tale che $\int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy$ arbitrariamente piccolo

$\Rightarrow f$ è integrabile

Teorema Sia f una funzione continua su $R = [a, b] \times [c, d]$ e sia $E \subset R$ misurabile. Allora la funzione $f \cdot \chi_E$ è integrabile e $\int f \chi_E \, dx \, dy = \int_E f \, dx \, dy$

ovvero equivalentemente posso definire l'integrale di f su ogni sottoinsieme misurabile di R