

Teorema: Sia $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua nel rettangolo $R: [a, b] \times [c, d]$ e sia $E \subseteq R$ misurabile.
Allora f è integrabile in E ($\Leftrightarrow f \cdot \chi_E$ è Riemann integrabile)

dim: Fissiamo $\varepsilon > 0$. Supponiamo che f è uniforme continua su $R \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. se $p, q \in R$ e $|p - q| < \delta$
 $\Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$. Quindi prendiamo una partizione di R in rettangolini R_{ij} $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

talche $\text{diam}(R_{ij}) < \delta$ Visto che E è misurabile $\rightarrow m(\partial E) = 0$

e quindi a meno di infinitare le partizioni di R in rettangolini R_{ij} più piccoli possiamo supporre che se

$$R_{\partial E} = \{R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset\}$$

$$\text{Dico e anzi} \quad \sum_{R_{ij} \in R_{\partial E}} m(R_{ij}) < \varepsilon$$

$$\text{Def: } M^+ := \max_{p \in R}$$

Introduco $\psi \in \mathcal{Y}^-$ e $\varphi \in \mathcal{Y}^+$ fr. sopra t.c.

$$\varphi := \sum_{R_{ij} \in R_{\partial E}} M^+ \chi_{R_{ij}} + \sum_{R_{ij} \in E} \lambda_{ij}^+ \chi_{R_{ij}}$$

$$\psi := \sum_{R_{ij} \in R_{\partial E}} M^- \chi_{R_{ij}} + \sum_{R_{ij} \in E} \lambda_{ij}^- \chi_{R_{ij}}$$

$$\text{dico } \lambda_{ij}^+ = \max_{q \in R_{ij}} f(q)$$

$$\lambda_{ij}^- = \min_{q \in R_{ij}} f(q)$$

$$\text{Anzi } \psi \leq f \cdot \chi_E \leq \varphi$$

$$\int \varphi \, dx \, dy = \sum_{R_{ij} \in R_{\partial E}} M^+ m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \in E} \lambda_{ij}^+ m(R_{ij})$$

$$\int \psi \, dx \, dy = \sum_{R_{ij} \in R_{\partial E}} M^- m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \in E} \lambda_{ij}^- m(R_{ij})$$

$$\text{Vado a sottrarre} \quad \int_R \varphi \, dx \, dy - \int_R \psi \, dx \, dy$$

$$\int_R \varphi \, dx \, dy = \int_R \psi \, dy = \sum_{R_{ij} \in E} (M^+ - M^-) m(R_{ij}) + \sum_{R_{ij} \in E} (\lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^-) m(R_{ij})$$

$$\leq (M^+ - M^-) \varepsilon + \varepsilon \sum_{R_{ij} \in E} m(R_{ij}) \leq \varepsilon [(M^+ - M^-) + m(R)]$$

quindi $f \cdot \chi_E$ risulta integrabile secondo Riemann.

□

Consideriamo una funzione semplice $\varphi: R \rightarrow \mathbb{R}$ $R = [a, b] \times [c, d]$ possiamo trovare una suddivisione di R in rettangolini

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

$$R_{ij} =$$

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

fisso in valore $x \in [x_{i-1}, x_i] = I_i$, dunque $J_j = [y_{j-1}, y_j] \quad \forall i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n$, e mi chiedo se posso integrare la funzione $\varphi(x, y)$ solo in y . Considero la funzione $y \in [c, d] \rightarrow \varphi(x, y)$ e osservo che

$$y \mapsto \varphi(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}(x, y)$$

assume i valori $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}$ rispettivamente sugli intervalli $J_1, J_2, \dots, J_n$.

Infatti se $y \in J_1$, ho che $\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}(x, y)$ ed essendo $x \in I_1$ e $y \in J_1 \Rightarrow \varphi(x, y) = \lambda_{11}$

$$\text{se } y \in J_2 \Rightarrow \varphi(x, y) = \lambda_{12}$$

$$\dots y \in J_n \Rightarrow \varphi(x, y) = \lambda_{1n}$$

$\Rightarrow \varphi(x, y)$ è integrabile secondo Riemann nella variabile y sull'intervallo $[c, d]$ e il suo integrale

$$\int_c^d \varphi(x, y) \, dy = \lambda_{11} m(J_1) + \lambda_{12} m(J_2) + \dots + \lambda_{1n} m(J_n)$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_{ij} m(J_j)$$

$$\int_c^d \varphi(x, y) \, dy = \lambda_{11} m(J_1) + \lambda_{12} m(J_2) + \dots + \lambda_{1n} m(J_n)$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} m(J_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} (y_j - y_{j-1})$$

L'ultimo addendo dipende da due variabili.

fissato $x \in [x_{i-1}, x_i]$

la funzione

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \lambda_{ij} & y \in J_j \end{cases}$$

In particolare

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy =$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \lambda_{1j} (y_j - y_{j-1}) & x \in I_1 \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} (y_j - y_{j-1}) & x \in I_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{nj} (y_j - y_{j-1}) & x \in I_n \end{cases}$$

Pertanto se vado a vedere la funzione $x \in [a, b) \mapsto \int_c^d \varphi(x, y) dy$ mi accorgo che anche questa é una funzione semplice, costante a tratti che assume valori

$I_i \quad i=1, \dots, n$

$$g(x) : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \int_c^d \varphi(x, y) dy$$

Le posso integrare su $[a, b)$

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) m(I_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} m(R_{ij}) = \int_R \varphi(x, y) dx dy$$

Abbiamo dimostrato che se φ é una funzione semplice

Allora

$$\int_a^b \int_c^d \varphi(x, y) dx dy = \int_R \varphi(x, y) dx dy$$

Allo stesso modo posso dimostrare che

$$\int_c^d \int_a^b \varphi(x, y) dx dy = \int_R \varphi(x, y) dx dy$$

Teorema di Fubini:

Sia f funzione definita su $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo f sia integrabile secondo Riemann.

Supponiamo anche che $\forall x \in [a, b)$ fissato, la funzione $y \mapsto f(x, y)$ é integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[c, d)$. Allora $\int_c^d f(x, y) dy$ é una funzione semplice.

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \text{ risulta integrabile su } [a, b) \text{ e}$$

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{risulta integrabile su } [a, b] \text{ e } \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_R f(x, y) dx dy$$

dim.: Essendo f integrabile posso trovare due funzioni semplici $\psi \in \mathcal{H}^-$ e $\varphi \in \mathcal{H}^+$ t.c.

$$\int \psi dx dy - \int \varphi dx dy < \varepsilon$$

E inoltre $\psi(x, y) \leq f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ integro rispetto la variabile y sull'intervallo $[c, d]$ e allora

$$\int_c^d \psi(x, y) dy \leq \int_c^d f(x, y) dy \leq \int_c^d \varphi(x, y) dy$$

Quindi per la dimostrazione precedente risulta che ci sono due funzione semplici

$$\Psi(x) = \int_c^d \psi(x, y) dy \quad \Phi(x) = \int_c^d \varphi(x, y) dy$$

che soddisfano $\Psi(x) \leq F(x) \leq \Phi(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\text{Inoltre } \int_a^b \Phi(x) dx - \int_a^b \Psi(x) dx = \int_a^b \int_c^d \varphi(x, y) dx dy - \int_a^b \int_c^d \psi(x, y) dx dy = \int_R \varphi(x, y) dx dy - \int_R \psi(x, y) dx dy < \varepsilon$$

$\Rightarrow F$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$

$$\text{Inoltre } \int_a^b \Psi(x) dx = \int \psi(x, y) \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_a^b \Phi(x) dx = \int \varphi(x, y)$$

$$\int_R \psi(x, y) dx dy \leq \int_R f(x, y) dx dy \leq \int_R \varphi(x, y) dx dy$$

$$\text{quindi } \left| \int_a^b F(x) dx - \int_R f(x, y) dx dy \right| \leq \int_R \varphi(x, y) dx dy - \int_R \psi(x, y) dx dy < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x) dx - \int_R f(x, y) dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \int f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad \square$$

Teorema (formula di cambio di variabili)

Sia $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti e sia $\phi: A \rightarrow B$ biunivoca tale che $\phi \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ e $\phi^{-1} \in C^1(B; \mathbb{R}^n)$

Supponiamo inoltre che il $\det \nabla \phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$

Se f è una funzione a supporto compatto in B integrabile secondo Riemann $f: B \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Allora vale } \int_B f(y) dy = \int_A f(\phi(x)) |\det \nabla \phi(x)| dx$$

dove $y = (y_1, \dots, y_n) \in B$

oss. $\Phi: A \rightarrow B$ $L_A \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad B \subseteq \mathbb{R}^n$ quindi $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x))$

$$\nabla \Phi(x) = \begin{pmatrix} \nabla \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \nabla \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ne posso fare il determinante

Esempio nel caso di una sola variabile la formula data prima é coerente col classico cambio di variabili in $\mathbb{R}$

$$A: (a, b) \quad B: (c, d) \subseteq \mathbb{R}$$

posso considerare un'applicazione biunivoca $\Phi: A \rightarrow B$ che suppongo di classe C^1 con Φ^{-1} di classe C^1

$$\Phi(x) = y \quad x \in (a, b) \quad y \in (c, d)$$

ho $\Phi'(x) > 0$ oppure $\Phi'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$ f funzione integrabile su (c, d)

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx$$

$$\int_c^d f(y) dy = \int_{\Phi^{-1}(c)}^{\Phi^{-1}(d)} f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx$$

se $\Phi'(x) > 0 \Rightarrow \Phi(a) = c \quad \Phi(b) = d$
 e quindi $\Phi^{-1}(c) = a \quad \Phi^{-1}(d) = b$

$$\Rightarrow \int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx$$

se $\Phi'(x) < 0 \Rightarrow \Phi(a) = d \quad \Phi(b) = c$
 $\Rightarrow \Phi^{-1}(d) = a \quad \Phi^{-1}(c) = b$

$$\Rightarrow \int_c^d f(y) dy = \int_b^a f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = - \int_a^b f(\Phi(x)) \Phi'(x) dx = \int_a^b f(\Phi(x)) |\Phi'(x)| dx$$

($\Phi'(x)$ è negativo)

$\Rightarrow$ sia se $\Phi' > 0$ che se $\Phi' < 0$ vale

$$\int_c^d f(y) dy = \int_a^b f(\Phi(x)) |\Phi'(x)| dx$$

$$\nabla \Phi = \Phi'$$

$$\text{det } \nabla \Phi = \Phi'$$

$$|\text{det } \nabla \Phi| = |\Phi'|$$

Teorema Siano σ e σ' curve equivalenti.
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ o $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\exists \varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$
 surgettiva di classe C^1 e $\dot{\sigma}(t) \neq 0 \forall t$
 $\gamma(t) = \sigma(\varphi(t))$
 Allora $L(\gamma) = L(\sigma)$
Dim. 1° caso $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in (c, d)$
 $\dot{\gamma}(t) = \sigma'(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(\varphi(t))| \dot{\varphi}(t)$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\sigma}(\varphi(t))| \dot{\varphi}(t) dt \quad \text{facciamo il cambio di variabile} \quad s = \varphi(t) \quad = \int_c^d |\dot{\sigma}(s)| ds = L(\sigma)$$

2° caso $\dot{\varphi}(t) < 0 \forall t \in (a, b)$ $\dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)| = -\dot{\varphi}(t) |\dot{\sigma}(\varphi(t))|$
 $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = - \int_a^b |\dot{\sigma}(\varphi(t))| \dot{\varphi}(t) dt \quad s = \varphi(t) \quad \text{cambio variabile}$
 $\varphi(t): [a, b] \rightarrow [c, d] \Rightarrow \varphi(a) = d, \varphi(b) = c$
 $= - \int_d^c |\dot{\sigma}(s)| ds = \int_c^d |\dot{\sigma}(s)| ds = L(\sigma) \quad \square$

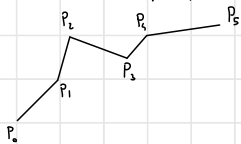
La lunghezza di una curva regolare a tratti si definisce allo stesso modo

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

Sia $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ una partizione di $[a, b]$, con $t_0 = a$ e $t_n = b$.

Consideriamo la curva γ def. come segue

Siano dati i punti $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$



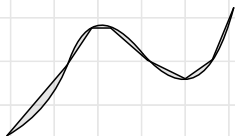
$$\gamma(t) = p_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (p_{i+1} - p_i) \quad t \in (t_i, t_{i+1}]$$

$$\forall i = 0, \dots, m-1$$

quando $t = t_i$ $\gamma(t_i) = p_i$

quando $t = t_{i+1}$ $\gamma(t_{i+1}) = p_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, m-1$

Vogliamo dimostrare il seguente fatto



Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare e σ una parametrizzazione $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ di una spezzata che ha punti sulla curva γ , allora
 $L(\gamma) = \sup_{\sigma} L(\sigma)$
 dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le spezzate ottenute come sopra.

Lemma: sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua assegnata. Sia $\tau \in (a, b)$. Allora

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \geq \int_a^b |\gamma(t)| dt - 2 \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt$$

dim: Da una parte abbiamo che $|\gamma(\tau)|(b-a) = \int_a^b \gamma(\tau) dt = \int_a^b \gamma(t) dt - \int_a^b (\gamma(t) - \gamma(\tau)) dt$

$$\Rightarrow |\gamma(\tau)|(b-a) \leq \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| + \left| \int_a^b \gamma(t) - \gamma(\tau) dt \right| \leq \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| + \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt$$

$$\Rightarrow |\gamma(\tau)|(b-a) \leq \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| + \left| \int_a^b \gamma(t) - \gamma(\tau) dt \right| \leq \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| + \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt$$

Inoltre per la disuguaglianza triangolare

$$|\gamma(\tau)| \geq |\gamma(t)| - |\gamma(t) - \gamma(\tau)|$$

Integro su $[a, b]$ ottengo

$$|\gamma(\tau)|(b-a) \geq \int_a^b |\gamma(t)| dt - \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt$$

Utilizzando la (4) ottengo

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| + \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt \geq \int_a^b |\gamma(t)| dt - \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \geq \int_a^b |\gamma(t)| dt - 2 \int_a^b |\gamma(t) - \gamma(\tau)| dt \quad \square$$

Teorema: Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare e sia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ una partizione di $[a, b]$

Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la spezzata che unisce i punti $P_i = \gamma(t_i)$ come definita prima.

Allora:
 a) $L(\sigma) \geq L(\gamma)$
 b) $L(\sigma) = \sup_{\sigma} L(\sigma)$
 dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le spezzate come nell'enunciato.

$$\text{dim: } L(\sigma) = \int_a^b |\dot{\sigma}(t)| dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\sigma}(t)| dt \geq \sum_{i=0}^{m-1} |\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)|$$

$$= L(\gamma)$$

punto 2 Sappiamo che $L(x) \geq L(\sigma) \quad \forall \sigma$ ripartite

$$\Rightarrow L(x) \geq \sup_{\sigma} L(\sigma)$$

δ è continua su $[a, b]$ quindi δ uniformemente continua e quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $s, t \in [a, b]$ soddisfa $|t - s| \leq \delta$ allora $|\delta(t) - \delta(s)| \leq \varepsilon$

Fissato $\varepsilon > 0$ scelgo una partizione di $[a, b]$ tale che $t_{i+1} - t_i < \delta \quad \forall i = 0, \dots, m-1$

$$|\delta(t_{i+1}) - \delta(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t) dt \right| \leq \varepsilon (t_{i+1} - t_i)$$

il lemma precedente mi dice che

$$\begin{aligned} |\delta(t_{i+1}) - \delta(t_i)| &= \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t) dt \right| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\delta(t)| dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\delta(t) - \delta(t_i)| dt \\ \text{essendo ora } \delta, \gamma \in [A_1, A_{i+1}] \Rightarrow |t - \tau| < \delta \\ \Rightarrow |\delta(t) - \delta(\tau)| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$|\delta(t_{i+1}) - \delta(t_i)| \geq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\delta(t)| dt - 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varepsilon dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\delta(t)| dt - 2\varepsilon (t_{i+1} - t_i)$$

$$\text{Sommo le espressioni precedenti} \quad \sum_{i=0}^{m-1} \text{da} \quad L(\sigma) = \sum_{i=0}^{m-1} |\delta(t_{i+1}) - \delta(t_i)| \geq \int_a^b |\delta(t)| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

$$L(\sigma) \geq L(\delta) - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\sup L(\sigma) \geq L(\delta) - 2\varepsilon(b-a)$$

$$\text{essendo } \varepsilon \text{ arbitrario allora} \quad \sup L(\sigma) \geq L(\delta)$$