

Teo. Supponiamo $\Phi: A \rightarrow B$ ~~apli. lineare~~ ~~di classe~~ $C^1(A, B)$ e inversa di classe $C^1(A, B)$ tale che

$$|\det \nabla \Phi(x)| \neq 0 \quad \forall x \in A$$

Supponiamo inoltre $|\det \nabla \Phi(x)|$ sia limitato su A e supponiamo A e B insieme misurabili. Allora se

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann. Risulta

$$\int_B f(y) dy = \int_A f \circ \Phi(x) |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

Esempio: supponiamo $E \subseteq B$ misurabile e voglio calcolare la misura di Peno-Jordan di E.

$$\text{dobbiamo calcolare } m(E) = \int_E 1 dx = \int_B \chi_E(x) dx$$

$$\text{dovremmo calcolare } \chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Grazie al teorema precedente possiamo scrivere

$$\int_B \chi_E(x) dx = \int_A \chi_E(\Phi(z)) |\det \nabla \Phi(z)| dz$$

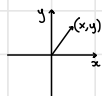
$$\chi_E(\Phi(z)) = \begin{cases} 1 & \Phi(z) \in E \\ 0 & \Phi(z) \notin E \end{cases}$$

$$\Phi(z) \in E \iff z \in \Phi^{-1}(E)$$

$$\chi_E(\Phi(z)) = \begin{cases} 1 & z \in \Phi^{-1}(E) \\ 0 & z \notin \Phi^{-1}(E) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(E)}(z)$$

$$\int_E 1 dx = \int_B \chi_E(x) dx = \int_A \chi_{\Phi^{-1}(E)}(z) |\det \nabla \Phi(z)| dz = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(z)| dz$$

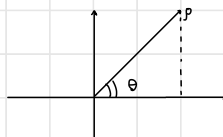
Coordinate polari



$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Θ = angolo compreso tra l'asse X positivo e la direzione delle rette che passano per l'origine è il punto (x, y)



$$\text{Dati } \rho \in [0, +\infty) \quad \Theta \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \Theta \\ y = \rho \cdot \sin \Theta \end{cases}$$

Definisco la mappa $\Phi(p, \theta) = (x, y)$

$$\Phi(p, \theta) = (p \cos \theta, p \sin \theta)$$

$$\Phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

quando $p=0 \Rightarrow x = p \cos \theta = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$
 $y = p \sin \theta = 0$

La mappa $\Phi: [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ non é iniettiva perché $\Phi(0, \theta) = (0, 0) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi)$

Se escludo $p=0$ la mappa é **INIETTIVA**

$$\nabla \Phi(p, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{da } \Phi_1 = p \cos \theta \\ \text{" } \Phi_2 = p \sin \theta \end{array}$$

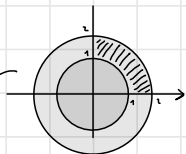
$$\nabla \Phi(p, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -p \sin \theta \\ \sin \theta & p \cos \theta \end{pmatrix} \quad \det \nabla \Phi(p, \theta) = p \cos^2 \theta + p \sin^2 \theta = p$$

Esempio $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \in (1, 4) \}$
 $x > 0 \quad y > 0$

$$x^2 + y^2 \in (1, 4)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \in (1, 2)$$

$$p \in (1, 2)$$



E é l'intersezione dell'anello compreso tra le circonferenze di raggio 1 e 2, e il primo quadrante

Calcoliamo $m(E)$ ← (cambio di variabile)
 $\int_E 1 \, dx \, dy$

L'insieme $\Phi^{-1}(E) = \{(p, \theta) : p \in (1, 2) \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

$$\int_E 1 \, dx \, dy = \int p \, dp \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 p \, dp \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} p^2 \right]_{p=1}^{p=2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} d\theta = \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi$$

Area del cerchio di raggio 2 é 4π

" " " " " π

Area dell'anello é $4\pi - \pi = 3\pi$

" " ristretta al 1° quadrante $= \frac{3}{4} \pi$

Esempio Coordinate cilindriche

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$x \quad y \quad z$

Esprimo le x e y in coordinate polari

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = z$$

Quindi le nuove coordinate sono (ρ, θ, z)

$$\rho \in (0, +\infty) \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad z \in \mathbb{R}$$

La mappa di cambio di variabile é Φ

$$\Phi: \begin{matrix} (0, +\infty) & \times & [0, 2\pi) & \times & \mathbb{R} \\ \rho & & \theta & & z \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \\ \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y) : (0, 0) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{matrix}$$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Phi_1 = \rho \cos \theta \\ \quad \quad \quad \rho \sin \theta \\ \Phi_2 = \rho \sin \theta \\ \quad \quad \quad \rho \cos \theta \\ \Phi_3 = z \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio: Considero E il solido su $\mathbb{R}^3$ ottenuto intersecando il cilindro di equazione $z^2 < x^2 + y^2 < 2x$

Calcolare $m(E)$

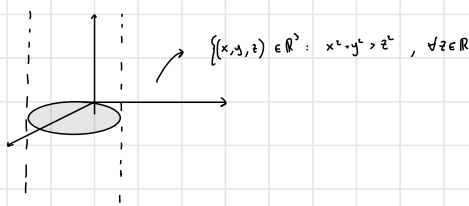
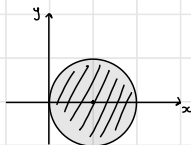
Se considero l'equazione $x^2 + y^2 = 2x$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1$$

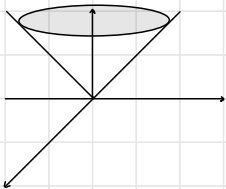
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

descrivere le circonferenze di centro $(x, y) = (1, 0)$ e raggio $= 1$



$$z^2 < x^2 + y^2 \quad \text{Considero } f \text{ funzione} \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

$$\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\} = \text{grafico della } f(x, y)$$



$$z = f(x, y)$$

$$z^2 < x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|z| < \sqrt{x^2 + y^2} \\ -\sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

L'insieme $\{z^2 < x^2 + y^2\}$ corrisponde a tutti i punti in $\mathbb{R}^3$ che stanno sotto il cono superiore e sopra quello inferiore

$$A = \{x^2 + y^2 < 2x\} \quad B = \{z^2 < x^2 + y^2\}$$

$m(E) = m(A \cap B)$ in coordinate cilindriche supponiamo che

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad x = \rho \cos \theta \quad \text{quindi l'insieme } A \text{ diventa}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(A) &= \{(\rho, \theta, z) : \rho^2 < 2\rho \cos \theta \} \\ &= \{(\rho, \theta, z) : \rho < 2 \cos \theta \} \\ &= \{(\rho, \theta, z) : \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ &\quad \rho < 2 \cos \theta \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(B) &= \{(\rho, \theta, z) : z^2 < \rho^2 \} \\ &= \{(\rho, \theta, z) : |z| < \rho \} \\ &= \{(\rho, \theta, z) : -\rho < z < \rho \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_E 1 \, dx \, dy \, dz &= \int |dt| \sqrt{\phi(\rho, \theta, z)} \, d\rho \, d\theta \, dz = \int \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \int_{-\rho}^{\rho} \rho \, dx \, d\rho \, d\theta \end{aligned}$$

$$\Phi^{-1}(E) = \Phi^{-1}(A) \cap \Phi^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, z) : \rho < 2 \cos \theta, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), -\rho < z < \rho \}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} \left(\rho \int_{-\rho}^{\rho} dz \right) d\rho \, d\theta =$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} 2\rho^2 \, d\rho \, d\theta &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\rho^3]_{\rho=0}^{\rho=2 \cos \theta} \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

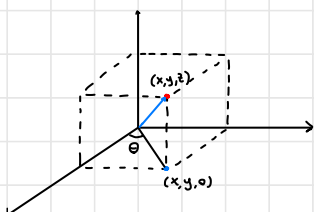
$$s = \sin \theta \quad \cos \theta = (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} \quad \cos^3 \theta = (1 - s^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$ds = \cos \theta d\theta = (1 - s^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$\frac{16}{3} \int_{-1}^1 \frac{(1 - s^2)^{\frac{3}{2}} ds}{(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{16}{3} \int_{-1}^1 (1 - s^2) ds = \frac{16}{3} \left[2 - \frac{2}{3} \right]$$

Coordinate sferiche



L'angolo θ è l'angolo formato tra l'asse delle X positive e il vettore $(x, y, 0)$

dove $(x, y, 0)$ è la proiezione del vettore (x, y, z) nel piano xy

L'angolo φ è quello formato tra il vettore (x, y, z) e il vettore $(x, y, 0)$

$$\text{L'angolo } \varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|(x, y, z)\|$$

$$\theta \in [0, 2\pi) \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Phi: (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$$

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi_1(r, \theta, \varphi) \times \Phi_2(r, \theta, \varphi) \times \Phi_3(r, \theta, \varphi)$$

$$\Phi_1(r, \theta, \varphi) = r$$

$$\Phi_2(r, \theta, \varphi) = \theta$$

$$\Phi_3(r, \theta, \varphi) = \varphi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta = \Phi_1 \\ y = r \cos \varphi \sin \theta = \Phi_2 \\ z = r \sin \varphi = \Phi_3 \end{cases} \quad \nabla \Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \nabla \Phi = r \cos \varphi \left[r^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi + r^2 \cos^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \right] + r \cos \varphi \left[r \cos^2 \varphi \cos \theta + r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \right]$$

$$= r \sin \varphi r^2 \left[\cos \varphi \sin \theta \right] + r^2 \left[\cos^2 \varphi \right] \cos \varphi = r^2 \left[\cos \varphi \sin^2 \varphi + \cos^3 \varphi \right] = r^2 \cos \varphi \left[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right] = r^2 \cos \varphi$$

Esempio

Calcoliamo il volume del solido in $\mathbb{R}^3$ ottenuto dall'intersezione del cono

$$\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \quad \text{e della sfera} \quad \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$$

$$\text{risultato} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 \leq 1$$

$$x^2 + y^2 + \underbrace{(z-1)^2}_{\text{distanza}^2((x, y, z), (0, 0, 1))} \leq 1$$

$$\text{distanza}^2((x, y, z), (0, 0, 1)) \leq 1$$

$$= |(x, y, z) - (0, 0, 1)|^2 < 1$$

$$|(x, y, z-1)|^2 < 1$$

Sono i punti interni ad una sfera di raggio 1 e centro in (0,0,1)

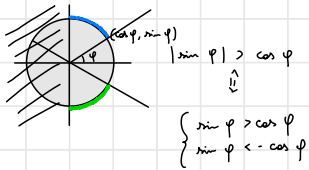
$$x^2 + y^2 + z^2 < 2z \Rightarrow r^2 < 2z$$

$$r^2 < 2r \sin \varphi$$

$$r < 2 \sin \varphi$$

$$\{x^2 + y^2 < z^2\} \Rightarrow r^2 \cos^2 \varphi < r^2 \sin^2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi < \sin^2 \varphi$$



cercare i punti $\varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ tali che $\cos \varphi < \sin \varphi$

$$\begin{matrix} x & & y \\ & < & \\ \hline \end{matrix}$$

Inoltre i punti tali che $\sin \varphi < -\cos \varphi$

$$y < -x$$

$$|\sin \varphi| > \cos \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Cono} : \{r, \theta, \varphi\} : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Sfera} : \{x^2 + y^2 + z^2 < 2z\} = \{r^2 < 2r \sin \varphi\} = \{r < 2 \sin \varphi\}$$

$$\int_{E = \text{cono} \cap \text{sfera}} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi| \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} r^2 \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Phi^{-1}(E) : \text{cono} \cap \text{sfera} = \{r, \theta, \varphi\} : r < 2 \sin \varphi, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\}$$

$$\int_0^{2 \sin \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr = \cos \varphi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=2 \sin \varphi} = \cos \varphi \frac{8 \sin^3 \varphi}{3} = \frac{8}{3} \cos \varphi \sin^3 \varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8}{3} \cos \varphi \sin^3 \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin^4 \varphi}{4} \right|_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \frac{3}{16} d\theta = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{16} \cdot 2\pi = \pi.$$

Integrali impropri

Supponiamo $E \subset \mathbb{R}^n$ sia illimitato e sia f una funzione ≥ 0 su E , integrabile sull'insieme $E \cap B_R(0) \quad \forall R > 0$

Dico che f é integrabile in senso improprio su E se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) \, dx$$

$$\text{Altrimenti } \int f(x) \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) \, dx$$

Oss.! $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) \, dx$ esiste sempre perché, essendo $f \geq 0$, ha che $R > R' > 0$

$$\int_{E \cap B_R(0)} f(x) \, dx \geq \int_{E \cap B_{R'}(0)} f(x) \, dx$$

Poss. accadere che il limite sia $+\infty$, ma esiste sempre perché $R \rightarrow \int_{E \cap B_R(0)} f(x) \, dx$ è non decrescente.

Def: supponiamo $f \geq 0$ su un insieme E limitato e supponiamo $\bar{x} \in$ punto di accumulazione per E

Supponiamo che f sia integrabile su $E \setminus B_n(\bar{x})$

$\forall n > 0$, allora se esiste finito il limite $\lim_{n \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus B_n(\bar{x})} f(x) \, dx$

in senso improprio su E e si scrive

Definizione: dico che f é integrabile in senso improprio su E se f^+ e f^- sono integrabili in senso improprio su E

f^+ : parte positiva di $f \quad f^+(x) = \max \{0, f(x)\}$

f^- : parte negativa di $f \quad f^-(x) = \max \{0, -f(x)\}$

quindi $\forall x \Rightarrow f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad \text{Se } f \text{ é integrabile in senso improprio allora definisco}$

$$\int_E f(x) \, dx = \int_E f^+(x) \, dx - \int_E f^-(x) \, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

Esercizio per casa Provo a dire se
 $\int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ è finito o no.
Dire se $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è integrabile
in senso improprio su $B_1(0)$.
 $\Leftrightarrow \exists \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_r(0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$