

Successioni e serie di funzioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ consideriamo $\forall n \in \mathbb{N}$ una f. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$

Def: Diciamo che la successione $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ converge puntualmente ad una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se $\forall x \in E$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$

esempio: prendiamo $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = x^n$

$$f_n(x) = x^n \rightarrow \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

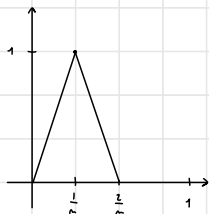
le funzioni $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ non convergono puntualmente a nessuna funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Se considero l'intervallo chiuso $[0, 1]$ allora

$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convergono puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

es: $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 2-nx & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$f_n(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$



$$\text{se } x > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$$

$$\text{t.c. } \frac{2}{\bar{n}} < x \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\frac{2}{n} < x \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = 0$$

$$\forall n \geq \bar{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

La f. $f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ puntualmente su $[0, 1]$.

OSS: $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ convergono puntualmente ad $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ se e solo se $\forall x \in E$ l.o.l. $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$
 $\forall m \geq n \quad |f_m(x) - f(x)| < \epsilon$

Definizione di CONVERGENZA UNIFORME

$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f_n converge a f uniformemente su E se $\forall \epsilon > 0 \exists n > 0 \text{ t.c.}$

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall m \geq n \quad \forall x \in E$$

Nel caso della convergenza puntuale

$$\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q.o.} \quad \forall \epsilon > 0 \exists n = n(E, x) \quad (\text{dipende da } E \text{ e } x)$$

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall m \geq n(E, x)$$

Nel caso della convergenza uniforme $\forall \epsilon > 0 \exists n > 0 \text{ e } n = n(\epsilon) \quad (\text{dipende da } \epsilon)$

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall m \geq n(\epsilon) \quad \forall x \in E$$

Dim. Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Allora $f_n \rightarrow f$ puntualmente

Infatti $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \quad \forall m \geq n(\epsilon)$

$$|f_m(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow f_m(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

OSS: convergenza puntuale delle $f_n \rightarrow f$ non implica necessariamente che $f_n \rightarrow f$ uniformemente

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2-nx & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

Abbiamo già osservato che $f_n \rightarrow f$ puntualmente dove $f = 0$ est.
 Verifichiamo che $f_n \not\rightarrow f$ uniformemente se converge uniformemente

$$\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) > 0 \text{ tale che} \quad \forall m \geq n(\epsilon) \quad |f_m(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in E$$

per esempio $\exists n(\frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m \geq n$

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

Tuttavia si ha che per $x = \frac{1}{m} \quad f(x) = 1$ e quindi

$$|f_m(x) - f(x)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$$

es: Consideriamo le funzioni $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite come $f_n(x) = \frac{n^2+1}{n^2} x$

$f_n(x) \rightarrow f(x) = x$ puntualmente su $[0, 1]$ per verificare la convergenza uniforme devo dimostrare che
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) > 0$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon) \quad \forall x \in [0, 1]$

$$f_n(x) - f(x) = \left(\frac{n^2+1}{n^2} x - x \right) = x \left[\frac{n^2+1}{n^2} - 1 \right] = x \frac{n^2+1-n^2}{n^2} = x \frac{1}{n^2}$$

$$\forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq |x| \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Visto che le successioni $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$

ho che $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon)$ t.c. se $n \geq n(\varepsilon)$ ho

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n > n(\varepsilon)$$

OSS: definiamo la seguente quantità

data $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in E} \{|f(x)|\} \quad \text{ed è facile verificare che } \|f\|_{\infty} \geq 0 \quad \forall f \quad \|f\|_{\infty} = 0 \quad \text{se e solo se } f \equiv 0$$

Inoltre $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ho che $\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$ e infine vale la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \quad \forall f, g$$

In particolare le quantità

$$\|f - g\|_{\infty} \quad \text{definisce una distanza tra le funzioni } f \text{ e } g$$

Teorema: siano $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni

Allora $f_n \rightarrow f$ uniformemente se e solo se $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$

Supponiamo $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n$ t.c. $\|f_n - f\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n \geq n$

ricordiamo che $\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in E} \{|f_n(x) - f(x)|\} \Rightarrow \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n$

quindi $f_n \rightarrow f$ uniformemente

Viceversa supponiamo $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n > 0$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n \quad \forall x \in E$

$$\sup_{x \in E} \{ |f_n(x) - f(x)| \} \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty \quad \square$$

oss: Se E è compatto e f_n e f sono continue $\|f_n - f\|_\infty = \max |f_n(x) - f(x)|$

Teorema $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua su E e supponiamo $f_n \rightarrow f$ uniformemente su E . Allora f è continua su E

dim: $f_n \rightarrow f$ uniformemente. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n$ t.c. $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n$.

Sia $x \in E \Rightarrow \exists \delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad \Leftrightarrow (|x - y| < \delta)$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f_n(x) - f_n(y) + f_n(x) - f(x) + f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| + \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow f$ continua in x

Teorema: siano $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni integrabili e supponiamo $f_n \rightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente

Allora f è it. e si ha $\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) dx$

OSS: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili tali che $h \leq f \leq g$ e $\int_E g dx - \int_E h dx < \varepsilon$

dim: Essendo h e g integrabili $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \psi \leq h \leq \varphi \quad \exists \hat{\psi} \leq g \leq \hat{\varphi}$ con $\varphi, \psi, \hat{\psi}, \hat{\varphi}$ semplici t.c.

$$\int_E \varphi - \int_E \psi < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_E \hat{\varphi} - \int_E \hat{\psi} < \varepsilon$$

$$\text{se } h \leq f \leq g \Rightarrow \psi \leq f \leq \hat{\varphi}$$

$$\int_E \hat{\varphi} - \int_E \hat{\psi} = \int_E \hat{\varphi} - \int_E g + \int_E g + \int_E h - \int_E \psi$$

$$\int_E \hat{\varphi} - \int_E g \leq \int_E \hat{\varphi} - \int_E \hat{\psi} < \varepsilon$$

$$\int_E \varphi - \int_E h < \varepsilon \quad \text{per } h_p$$

$$\int_E h - \int_E \psi \leq \int_E \varphi - \int_E \psi < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int_E \hat{\varphi} - \int_E \psi < 3\varepsilon$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ f.f. ~~non~~ $\hat{\varphi}, \psi$ con $\hat{\varphi} \geq f \geq \psi$ t.c.

$$\int_E \hat{\varphi} - \int_E \psi < 3\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \text{Vieta che } \varepsilon \text{ é arbitrario, } f \text{ é integrabile}$$

Viceversa se f é integrabile ovviamente esistono funzioni integrabili h e g con $h \leq f \leq g$

$$\text{e } \int_E g \, dx - \int_E h \, dx < \varepsilon$$

$$\text{Basta } h = f = g$$

dim: f_n stanno convergendo uniformemente a $f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n > 0$ t.c. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E$
 $\forall n \geq n$

$$\Rightarrow f_n(x) - f(x) < \varepsilon \quad f_n(x) - \varepsilon < f(x) \quad \forall x \in E \quad \forall n \geq n$$

$$\text{Similmente } f(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) < f_n(x) + \varepsilon \quad \forall n \geq n \quad \forall x \in E$$

$$\text{chiamo } h(x) = f_n(x) - \varepsilon \quad g(x) = f_n(x) + \varepsilon$$

$$h(x) < f(x) < g(x) \quad \forall x \in E \quad \text{due ho fissato } n \geq n.$$

h é integrabile, g é integrabile

$$\Rightarrow \int_E g \, dx - \int_E h \, dx = \int_E (f_n + \varepsilon) \, dx - \int_E (f_n - \varepsilon) \, dx$$

$$= \int_E f_n \, dx + \varepsilon m(E) - \int_E f_n \, dx + \varepsilon m(E) = 2\varepsilon m(E)$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h, g$ integrabili tali che $h < f < g$ e $\int g \, dx - \int h \, dx < 2\varepsilon m(E)$

Per l'osservazione precedente f é integrabile.

Dimostriamo che

$$\int_E f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n(x) \, dx$$

Voglio dimostrare che $\left| \int_E f(x) - \int_E f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_E f(x) - \int_E f_n(x) \right| = \left| \int_E (f - f_n) \, dx \right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)| \, dx \leq \int_E \|f - f_n\|_\infty \, dx = \|f - f_n\|_\infty m(E).$$

visto che $f_n \rightarrow f$ unif. ho che $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ questo conclude la dimostrazione.

Teorema: Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $f_n \in C^1([a, b])$ e suppongo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $f_n' \rightarrow g$ uniformemente.

Allora f è di classe $C^1([a, b])$ e $f' = g$

dim: Utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale che dice che

$$(*) \quad f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Il teorema precedente ci dice che g , essendo limite uniforme di funzioni integrabili (f_n'), è integrabile (g è continua perché limite uniforme di funzioni continue)

$$\text{e inoltre} \quad \int_a^x f_n'(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

D'altro conto so che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $f_n(a) \rightarrow f(a)$ poiché $f_n \rightarrow f$ uniformemente e quindi anche puntualmente

Ponendo il limite nella (*) otteniamo

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt.$$

quindi il teorema fondamentale del calcolo integrale mi dice $f' = g$

□

