

$f_n \rightarrow f$ uniformemente se e solo se $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

OSS Se f è limitata $\Rightarrow \|f\|_\infty < +\infty$ quindi $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$

Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente e f è limitata su E , allora $\|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$

In particolare essendo il limite di resta un numero $< +\infty$, onde $\|f_n\|_\infty < +\infty$ per $n \geq \bar{n} \Leftrightarrow f_n$ è limit. per $n \geq \bar{n}$

Da una parte ho che $\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$ quindi posso passare al $\liminf_{n \rightarrow +\infty}$ nel membro dx

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$$

D'altra parte, sempre per la disuguaglianza triangolare

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty - \|f - f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty$$

passo al $\limsup_{n \rightarrow +\infty}$ nel membro di sx e ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (2)$$

Dalla (1) e (2) ho

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

essendo il membro di sx = membro di dx, tutti i $\leq$ sono $=$.

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty$$

$$e \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \square$$

$$\int_{a+b}^{a+c} f(x) dx = \int_{a+b}^a f(x) dx + \int_a^{a+c} f(x) dx$$

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme

$C(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ e sono continue e limitate su } E\}$

Allora si verifica subito che la $\|f\|_\infty$ è una norma sullo spazio vettoriale $C(E)$.

Teorema: lo spazio $C(E)$ è completo (tutte le successioni di Cauchy sono convergenti).

La norma $\| \cdot \|_\infty$ indice una distanza tra le funzioni $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$

Visto che $\| \cdot \|_\infty$ è norma $\Rightarrow \|f\|_\infty = 0$ se e solo se $f=0$

$$\Rightarrow d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$$

Sia $f_n \in C(E)$ di Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$

f_n di Cauchy è convergente se $\exists f \in C(E)$ t.c. $f_n \rightarrow f$ in $C(E)$



$$d(f_n, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

dim: Sia f_n una successione di Cauchy. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$

$$\textcircled{3} \quad \|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in E} \{ |f_n(x) - f_m(x)| \} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

per $x \in E$ ho che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$

ovvero le successioni $f_n(x) \in \mathbb{R}$ è di Cauchy e quindi è convergente in $\mathbb{R}$. Chiamo il limite $f(x)$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad n \rightarrow +\infty$$

Quindi $f_n \rightarrow f$ puntualmente su E . Tornando a $\textcircled{3}$ ho che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ per cui $\forall x \in E$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$
$$\text{ma per } m \rightarrow +\infty \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in E$$
$$\forall n \geq n_\varepsilon$$

faccio il sup nel membro di sx

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Abbiamo dimostrato che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c.

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

è la definizione di convergenza uniforme di $f_n \rightarrow f$. Per cui $f_n \rightarrow f$ uniformemente e f_n sono continue quindi anche f è continua perché è limite uniforme di funzioni continue

Abbiamo dimostrato che se f_n è di Cauchy in $C(E)$ allora $f_n \rightarrow f$ continua

Ci manca da mostrare che f é limitata per poi concludere che $f \in C(E)$

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_{\infty} + \|f_n\|_{\infty} < +\infty \quad \text{e so anche che} \quad \|f_n - f\|_{\infty} \leq \varepsilon \quad \text{per } n \geq n_{\varepsilon}$$

$$\|f\|_{\infty} \leq \|f_{n_{\varepsilon}} - f\|_{\infty} + \|f_{n_{\varepsilon}}\|_{\infty} \leq \varepsilon + \|f_{n_{\varepsilon}}\|_{\infty} < +\infty$$

$f \text{ é limitata} \Rightarrow f \in C(E)$

□

Grazie all'osservazione precedente avremmo anche che $\|f\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty}$

Def. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallo limitato sia

$$C'([a, b]) : \left\{ f \text{ continua su } [a, b], \text{ derivabili su } [a, b] \text{ con derivata } f' \in C([a, b]) \right\}$$

Derivabile in a significa che $\exists$ finito il $\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$

Derivabile in b significa che $\exists \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{f(t) - f(b)}{t - b} = f'(b)$

oss: se $f \in C'([a, b])$ allora f, f' sono limitate su $[a, b]$

Definiamo su $C'([a, b])$ la norma $\|\cdot\|_{C'}$ data da

$$\|f\|_{C'} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} < +\infty$$

Teo lo spazio $C'([a, b])$ é completo. Vogliamo usare il seguente teorema

se $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $f'_n \rightarrow g$ unif., allora $f' = g$

Dim: se $f_n \in C'([a, b])$ successione di Cauchy e sup. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} > 0$ t.c.

$$\|f_n - f_m\|_{C'} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} + \|f'_n - f'_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} > 0 \text{ t.c.}$$

$$a) \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

$$b) \|f'_n - f'_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_{\varepsilon}$$

a) $\Leftrightarrow f_n$ é t. Cauchy nello spazio $C([a, b])$

b) $\Leftrightarrow f'_n$ " " " " " "

per il teorema precedente ho che $f_n \rightarrow f$ in $C([a,b])$ e $f'_n \rightarrow g$ in $C([a,b])$

quindi $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $f'_n \rightarrow g$ uniformemente $\Rightarrow$ anche f_n continue ho anche che f é continua e pure g é continua.

Infine il teorema enunciato l'altra volta ci dice che $f' = g$ quindi f é derivabile e la sua derivata é g che é continua

$$\Rightarrow f \in C^1([a,b])$$

Devo controllare che effettivamente $f_n \rightarrow f$ in $C^1([a,b])$

$$\|f_n - f\|_{C^1} = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - f'\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - g\|_\infty$$

e ora il limite per $n \rightarrow +\infty$ di questa quantità é 0 perché $f_n \rightarrow f$ uniforme e $f'_n \rightarrow g$ unif.

$$\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ in } C^1[a,b] \quad \square$$

Serie di funzioni

Siamo $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ f. date. Possiamo considerare la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$

Def. Diremo che $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge puntevolmente su E se $S_n := \sum_{i=1}^n f_i$ converge puntevolmente ad una certa f su E. In tal caso scriveremo $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Diremo che $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge uniformemente ad f se $S_n \rightarrow f$ uniformemente

Diremo che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge totalmente su E se $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty$ converge.

Lemma: se la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge totalmente, allora la serie converge anche uniformemente su E

dim. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge totalmente $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty < +\infty$ in particolare avremo che $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty$

$$G_n := \sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty \text{ ammette limite } \Rightarrow G_n \text{ é di Cauchy}$$

Essendo di Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\|G_n - G_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$

Allora $\|S_n - S_m\|_\infty$ dove $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$ supponendo $n > m$

$$\|S_n - S_m\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n f_i - \sum_{i=1}^m f_i \right\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_\infty - \left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_\infty = G_n - G_m < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

Abbiamo ottenuto che $\|S_n - S_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon$, ovvero S_n é una successione di Cauchy $[NON \text{ in } C^1]$
non é detto che sia continua

$\forall x \in X$ allora (*) $|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow S_n(x)$ é di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \quad \forall x$$

Inoltre passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ sopra in (*)

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \|S_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

quindi S_n converge uniformemente ad f

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x) \quad \forall x \in X$$

Ovvero abbiamo dimostrato che $S_n \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x)$ uniformemente $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f_i$ sta convergendo unif. ad f

□

Corollario: se $f_n = \sum_{i=1}^n f_i$ converge totalmente allora

$$\left\| \sum_{i=1}^{+\infty} f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_\infty$$

dim: $S_n \rightarrow f, \sum_{i=1}^{+\infty} f_i$ uniformemente

$$\|S_n\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty$$

mandando $n \rightarrow +\infty$ otteniamo $\|S_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_\infty \quad \square$$

Corollario: Se $f_n = \sum_{i=1}^n f_i$ converge totalmente $\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} f_i$ converge uniformemente
 allora $\left\| \sum_{i=1}^{+\infty} f_i \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|f_i\|_\infty$
 dim: $S_n \rightarrow f = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i$ uniformemente