

Lemma: Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ converte uniformemente ed $f(x)$

Allora f è continua a
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

dim: $S_n(x) \rightarrow f$ uniformemente ci dice subito che f è continua.

Per S_n ho che $\int_a^b S_n(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x) dx$. Mostriamo che $\int_a^b S_n \rightarrow \int_a^b f$. Anzi con conseguenza che
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i dx$$

non è uguale a $\int_a^b f(x) dx$.

$$\left| \int_a^b S_n dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b S_n - f dx \right| \leq \int_a^b |S_n - f| dx$$

supiniamo che $|S_n(x) - f(x)| \leq \|S_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

$$\left| \int_a^b S_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f(x) \cdot S_n(x)| dx \leq \int_a^b \|S_n - f\|_{\infty} dx = \|S_n - f\|_{\infty} (b - a)$$

che tende a 0 quando $n \rightarrow +\infty$

Serie di potenze: sono le serie di funzioni per le quali $f_n(x) = a_n x^n$ per qualche $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

per $x=0$ Chiaramente la sia serie converge a a_0 .

per $x \neq 0$ non è chiaro cosa succeda, dipenderà dai valori di a_n

E: se $a_n = n^n$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n + 1 \quad \text{per } x=0 \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \right) + 1 \rightarrow 1$$

per $x \neq 0$: se $x \neq 0$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} n^n x^n$ converge solo se $n^n x^n \rightarrow 0$

Ma $n^n x^n \neq 0$ se $x \neq 0$

$$\text{se } n^n x^n \rightarrow 0 \iff |n^n x^n| \rightarrow 0 \iff n^n |x|^n \rightarrow 0 \quad \text{se } x \neq 0 \quad \exists m > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x| > \frac{1}{m}$$

$$n^n |x|^n > n^n \cdot \frac{1}{m^n} = \left(\frac{n}{m} \right)^n \rightarrow +\infty$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^x x^n$ non converge per nessuna $x \neq 0$.

Teorema: Supponiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x=y$ ($\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n < +\infty$)

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-|y|, |y|)$ ($\Leftrightarrow |x| < |y|$)

dim: Supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ converge $\Rightarrow a_n y^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$
 $a_n y^n$ sarà una successione limitata e quindi $\exists M > 0$ t.c. $|a_n y^n| < M \quad \forall n$

Se $|x| < |y|$ avremo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n y^n \frac{x^n}{y^n}| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n y^n| |\frac{x}{y}|^n \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{x}{y}|^n$
 il numero $|\frac{x}{y}| < 1 \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |\frac{x}{y}|^n$ converge.

e di conseguenza convergerà anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ grazie al criterio del confronto.

Corollario: Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n < +\infty$ allora $\forall n \in (-|y|, |y|)$ si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente su $(-r, r)$

dim: se $r < |y|$ avremo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge. Ma allora avendo $x \in (-r, r)$ avremo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ dove $\|g\|_{\infty, (-r, r)} = \sup \{|g(x)|\}$ converge poiché $\|a_n x^n\|_{\infty, (-r, r)} = |a_n| r^n$

$$(\Leftrightarrow \sup_{x \in (-r, r)} \|a_n x^n\| = \sup_{x \in (-r, r)} |a_n| |x|^n = |a_n| r^n)$$

Abbiamo mostrato che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge assolutamente su $(-r, r)$
 quindi per il lemma delle serie termine
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente su $(-r, r)$

ovv: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge per $x=y$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge $\forall x > |y|$

Supponiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ NON CONVERGE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \frac{x^n}{y^n}$$

$$\text{se } a_n y^n > 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \frac{x^n}{y^n} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$$

~~*~~

Allora notate che se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x=y$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-|y|, |y|)$
 per l'osservazione precedente ho anche che
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge $\forall x$ tale che $|x| > |y|$

Posso definire la quantità

$$R := \sup \left\{ |x| \text{ tale che } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty \right\}$$

 prende nome di raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
 e soddisfa le seguenti proprietà:

$$\text{se } |x| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty \text{ converge}$$

$$\text{se } |x| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > +\infty \text{ non converge}$$

Mettiamoci nel caso in cui $|x| < R$.

Per definizione di estremo superiore avremmo che $\exists y$ per cui $|y| > |x|$ e le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ converge
 $\Rightarrow$ teorema precedente ci dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty$

Se ci mettiamo nel caso in cui $|x| > R$

Chiaramente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge per def. di R

$$\text{se } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n \text{ non converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ non converge se } |x| > |y|$$

$$\text{se per assurdo } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n < +\infty$$

esempi

- ① $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
- ② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$
- ③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$

④ $R = \sup \left\{ |x| : \sum_{n=0}^{+\infty} x^n < +\infty \right\}$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$$\left| \frac{x^n}{n+1} \right| < |x^n| \quad \forall n$$

quindi per il criterio del confronto $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$
 converge se $\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n < +\infty$.
 otteniamo che $R \geq 1$ perché $\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n < +\infty$
 $\forall x \in (-1, 1)$