

Teorema: Supponiamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ammetta raggio di convergenza $R > 0$

Allora la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è derivabile in $(-R, R)$ $\forall x \in (-R, R)$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

dim.: Dimostriamo che la serie in ① converge nell'intervallo $(-R, R)$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^n$ converge perché la seconda serie si ottiene dalle prime moltiplicando per x.

Dimostriamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$ converge. Visto che abbiamo scelto $x \in (-R, R)$ t.c. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n < +\infty$

$$\Rightarrow a_n y^n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists M > 0 \text{ t.c. } |a_n y^n| \leq M \quad \forall n \geq 0.$$

$$\|n a_n x^n\|_{\infty, (-R, R)} = \sup_{x \in (-R, R)} \{ |n a_n x^n| \} \cdot |x a_n| / R^n = n |a_n| y^n \left(\frac{R}{y}\right)^n \leq n M \left(\frac{R}{y}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n M \left(\frac{R}{y}\right)^n < +\infty \text{ grazie al criterio delle radici o del rapporto.}$$

$$\Rightarrow \text{converge anche la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \|n a_n x^n\|_{\infty, (-R, R)}$$

$$\Rightarrow \text{la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \text{ converge totalmente sull'intervallo } (-R, R)$$

$$\text{Voglio far vedere che } f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{dove } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\text{dove } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \xrightarrow{\text{teorema di Weierstrass}} f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x^i$$

$\Rightarrow$ uniformemente

$$S_n'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1} \xrightarrow{\text{teorema di Weierstrass}} \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i x^{i-1} = g(x)$$

$\Rightarrow$ grazie al teorema già visto concludiamo che

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ ha raggio di convergenza } R > 0 \text{ allora su ogni intervallo } (-R, R)$$

con $x \in (-R, R)$ la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ammette derivata prima $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge totalmente su $(-R, R)$ e quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ è $> R$.

E: Mostrare che il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ è R

Oss.

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge $\forall x \in (-R, R)$ possiamo applicare il teorema appena dimostrato alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x)$

Deduciamo che $f'(x)$ ammette derivata e la $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ e questa serie converge totalmente in $(-R, R)$ $\forall x \in (-R, R)$

Corollario Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge su $(-R, R)$ totalmente allora $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ammette derivate di ogni ordine sull'intervallo $(-R, R)$

$$\text{Se } k \geq 1, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

$$\text{oss: per } x=0 \text{ ho } f^{(k)}(0) = \frac{k!}{0!} a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

è lo sviluppo di Taylor di f in $x=0$.

Corollario: Se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge su $(-R, R)$ allora la serie di Taylor di f in $X=0$ converge totalmente su $(-R, R)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-R, R)$$

Allora, valgono le seguenti affermazioni:
 a) Se $L = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
 b) Se $L = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge solo per $x=0$.
 c) Se $L \in (0, +\infty)$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R = \frac{1}{L}$.
 dimo: Studiamo la convergenza della serie per un certo $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dice che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge se } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$$