

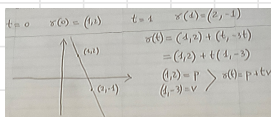
$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma \text{ è detta } C^1([a, b])$$

γ è la rappresentazione parametrica di una curva in $\mathbb{R}^n$

esempi $p \in \mathbb{R}^n \quad v \in \mathbb{R}^n \quad |v|=1$ allora la funzione $\gamma(t) = p + tv$ definita $\forall t \in \mathbb{R} \quad ([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$
 è la rappresentazione parametrica della retta passante per il punto p e con direzione V

es $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ è la rappresentazione della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1

es $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (1+t, 2-3t)$



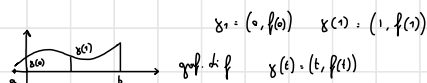
Def: La derivata di γ si chiama velocità della curva. Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e nella derivata prima in t_0 , $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$
 allora avremmo la retta di equazione $\gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)(t - t_0) =: n(t)$
 che risulterà tangenti alla curva nel punto $\gamma(t_0)$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - v(t - t_0)}{t - t_0} = 0 \quad \text{dove } v = \dot{\gamma}(t_0)$$

Def. Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta $C^1([a, b])$ e $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$ allora la curva γ si dice regolare. Si dirà regolare a tratti se esistono punti $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$
 t.c. γ è regolare su $[t_{i-1}, t_i]$ $\forall i = 1, \dots, n$

es: Sia $f \in C^1([a, b]) \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora la curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, f(t))$ risulta regolare su $[a, b]$. Infatti $\gamma(t) = (t, f(t))$ soddisfa $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2} > 0$ in particolare $\dot{\gamma}(t) \neq (0, 0)$ quindi γ è regolare.

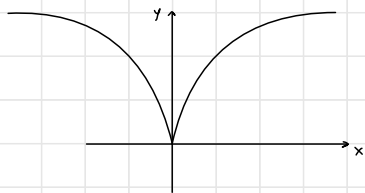
Disegniamo l'immagine della curva $[a, b]$



Def: Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ allora la curva $\gamma(t) = (t, f(t)) \Rightarrow \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$
 $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^m$

si chiama rappresentazione parametrica del grafico di f .

E₂: $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ def. da $x(t) = (t^2, t^3)$ la velocità sarà $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2)$ osserviamo che in $t=0$ risulta $\dot{\gamma}(0) = (0,0)$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{2/3}\}$ è il graf. della fn. $x^{2/3}$

$$\begin{aligned} x &= t^2 & y &= t^3 \\ \downarrow \\ t &= x^{1/2} \\ \Rightarrow y &= x^{3/2} \end{aligned}$$

Nel punto $y=0 \quad x=0$ che corrisponde al valore $t=0$ la curva γ non ammette rette tangenti perché forma un angolo in $\gamma(0)$ questo è dovuto al fatto che $\dot{\gamma}(0) = 0$

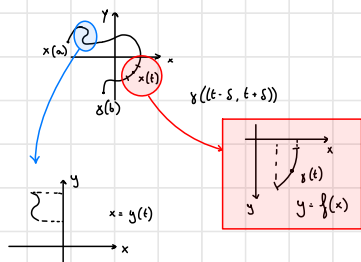
come abbiamo osservato prima se $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ γ avrebbe avuto retta tangente

$$u(t) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)(t-0) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)t$$

Lemma: $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regolare

Allora $\forall t \in (a,b) \quad \exists$ un intorno di t della forma $(t-\delta, t+\delta)$ t.c. $\gamma: (t-\delta, t+\delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$

rappresenta il grafico di una funzione $x = f(y)$ oppure $y = g(x)$.



dim: la curva è regolare quindi $\forall t \in (a,b)$ abbiamo che $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. In particolare almeno una coordinata di $\dot{\gamma}(t)$ non si annulla $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$

Supponiamo $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0$ $\Rightarrow \dot{x}_1(t) > 0 \quad \exists$ un intorno di t della forma $(t-\delta, t+\delta)$ t.c. $\dot{\gamma}_1(s) \neq 0 \quad \dot{x}_1(s) > 0$

$$\forall s \in (t-\delta, t+\delta) \quad [\text{se } \dot{x}_1(t) < 0 \Rightarrow \dot{x}_1(s) \neq 0 \quad \dot{x}_1(s) < 0 \quad \text{in } (t-\delta, t+\delta)]$$

Se $\dot{x}_1(t) > 0$ in $(t-\delta, t+\delta)$ risulterà che $x_1(t)$ sarà strettamente crescente in $(t-\delta, t+\delta)$

Se $\dot{x}_1(t) < 0$ in $(t-\delta, t+\delta)$ x_1 è strettamente decrescente in $(t-\delta, t+\delta)$ in ambo i casi γ_1 sarà invertibile denotiamo con

$$\gamma_1^{-1}(x) \text{ l'inversa } \Leftrightarrow \gamma_1(t(x)) = x \quad \gamma_1: (t-\delta) \rightarrow (x_1(t-\delta)) \quad \exists$$

$$\gamma_1(t) = x \Rightarrow x \in \mathbb{J}$$

$$\gamma_1^{-1}(x) = t \quad \gamma_1^{-1}: \mathbb{J} \rightarrow (t-\delta, t+\delta)$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), x_2(t)) \Rightarrow x(\gamma_1^{-1}(x)) = (\gamma_1(\gamma_1^{-1}(x)), \gamma_2(\gamma_1^{-1}(x)))$$

$$\gamma(t) = \gamma(\gamma_i^{-1}(x)) = (\gamma_i(\gamma_i^{-1}(x)), \gamma_i(\gamma_i^{-1}(x))) = (x, \gamma_i(\gamma_i^{-1}(x)))$$

ho trovato che sull'intervallo $(t-\delta, t+\delta)$ posso scrivere la curva come $\gamma(t) = \gamma(\gamma_i^{-1}(x)) = (x, \gamma_i \circ \gamma_i^{-1}(x)) \quad \forall x \in J$

poiché $f: \gamma_i \circ \gamma_i^{-1}$ abbiamo ottenuto che $\gamma(\gamma_i^{-1}(x)) = (x, f(x))$

da cui il grafico della funzione f su J .

Se invece $\gamma_i(t) = 0$ necessariamente $\gamma_i(t) \neq 0$ quindi come prima posso trovare un intervallo $(t-\delta, t+\delta)$

$\rightarrow (\gamma_i(t-\delta), \gamma_i(t+\delta)) = J$ avrei che, chiamato $y \in J$

$\gamma_i^{-1}: J \rightarrow (t-\delta, t+\delta)$ è l'inversa di γ_i . $\forall s \in (t-\delta, t+\delta) \quad y = \gamma_i(s) \Rightarrow \gamma_i^{-1}(y) = s$

$$\forall s \in (t-\delta, t+\delta) \quad \gamma(s) = \gamma(\gamma_i^{-1}(y)) = (\gamma_i(\gamma_i^{-1}(y)), \gamma_i(\gamma_i^{-1}(y))) = \gamma_i(\gamma_i^{-1}(y))$$

$\gamma(s) = \gamma(\gamma_i^{-1}(y)) = (g(y), y)$ da cui per $\gamma_i \circ \gamma_i^{-1} = \text{id}$ quindi $\gamma(s)$ è il grafico di g su J

□

Def: due curve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se $\exists p: [a, b] \rightarrow [c, d]$

$p \in C^1([a, b])$ e monotona t.c. $\gamma(t) = \sigma(p(t)) \quad \forall t \in [a, b]$

Def: data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ chiamo sostegno della curva l'insieme

$$J^\gamma = \gamma([a, b])$$

oss: due curve γ e σ equivalenti hanno lo stesso sostegno $J^\gamma([a, b]) = J^\sigma([c, d])$

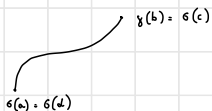
Potrebbero percorrere il sostegno con verso opposto. Ad esempio se $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ è crescente

$\Rightarrow p(a) = c$ e $p(b) = d$ Allora avremmo che $\gamma(a) = \sigma(p(a)) = \sigma(c)$ quindi γ e σ avranno lo stesso punto di partenza

ed hanno lo stesso punto di arrivo perché $\gamma(b) = \sigma(p(b)) = \sigma(d)$.

Viceversa se $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ è decrescente si avrà $p(a) = d$ $p(b) = c$ e quindi il punto di partenza della curva

γ è $\gamma(a) = \sigma(p(a)) = \sigma(d)$ coincide con il punto di arrivo di σ . Mentre il punto finale di γ nella $\gamma(b) = \sigma(p(b)) = \sigma(c)$ coincide con il punto di partenza di σ



Def: se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è regolare allora $\forall t \in [a, b]$ definiamo $\tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$
 prende il nome di versore tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t)$

Teorema: Se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono curve regolari e equivalenti allora $\forall t \in (a, b)$ risulta $\tau_\gamma(t) = \tau_\sigma(p(t))$
 se hanno lo stesso verso mentre $\tau_\gamma(t) = -\tau_\sigma(p(t))$ se hanno verso opposto.

$$\text{dim: } \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t) = \frac{d}{dt} \sigma(p(t)) = \dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)$$

se γ e σ hanno stesso verso allora $\dot{p}(t) > 0$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)| = \dot{p}(t) |\dot{\sigma}(p(t))|$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)}{|\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t))}{|\dot{\sigma}(p(t))|} = \tau_\sigma(p(t))$$

Se invece hanno verso opposto avremmo $\dot{p}(t) < 0 \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)| = -\dot{p}(t) |\dot{\sigma}(p(t))|$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)}{-|\dot{p}(t)|} = -\frac{\dot{\sigma}(p(t))}{|\dot{\sigma}(p(t))|}$$

se σ e γ hanno stesso verso allora $\dot{p}(t) > 0$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)| = \dot{p}(t) |\dot{\sigma}(p(t))|$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)}{|\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t))}{|\dot{\sigma}(p(t))|} = \tau_\sigma(p(t))$$

Se invece hanno verso opposto avremmo $\dot{p}(t) < 0$

$$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)| = -\dot{p}(t) |\dot{\sigma}(p(t))|$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\dot{\sigma}(p(t)) \dot{p}(t)}{-|\dot{p}(t)|} = -\frac{\dot{\sigma}(p(t))}{|\dot{\sigma}(p(t))|} = -\tau_\sigma(p(t))$$

□