

Lunghezza di una curva

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare. Allora definiamo la lunghezza della curva γ il numero

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

oss: Per il teorema del calcolo integrale si ha $\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt$

Quindi se vogliamo calcolare la distanza tra i punti $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$ *non* calcoliamo

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| = \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \stackrel{?}{\leq} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma)$$

da: della disuguaglianza

$$\int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt = 0 = \dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(a)$$

la disug. $|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ è sempre soddisfatta perché il termine a sinistra è nullo e quello a destra sempre positivo

$$\text{Supponiamo } \gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \neq 0$$

Prendiamo un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, ovvero

$$\left(\int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right) \cdot v = \int_a^b \dot{\gamma}(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| |v| dt = L(\gamma) |v|$$

$$\text{Scegliendo } v = \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \Rightarrow \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right|^2 \leq L(\gamma) \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

$$\text{Posso dividere ambo i membri per } \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \neq 0 \Rightarrow \left| \int_a^b \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq L(\gamma)$$

Esempio: ① $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ calcoliamo la lunghezza $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

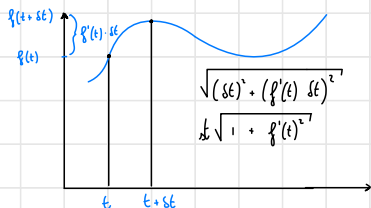
② Consideriamo due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ $P \neq Q$ vogliamo γ che parametrizza il segmento PQ
 $\gamma(t) = P + (Q-P)t$ è la retta in forma parametrica parametrizzata per $t \in [0, 1]$ dove $t \in \mathbb{R}$
 per $t=0$ $\gamma(0) = P$ per $t=1$ $\gamma(1) = Q$
 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà una parametrizzazione del segmento PQ $\Rightarrow \gamma(t) = P + (Q-P)t \quad t \in [0, 1]$

(3) Sia $f \in C^1([a, b])$ funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 e consideriamo il grafico di f
 $\gamma(t) = (t, f(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

Calcoliamo $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + |f'(t)|^2}$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt$$



Può essere che le curve siano espresse in coordinate polari

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$