

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva regolare $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \Leftrightarrow |\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$

voglio definire s su un intervallo della forma $[0, L(\gamma)]$

$$S(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \quad t \in [a, b]$$

$S(t)$ = lunghezza di γ in $[a, t]$

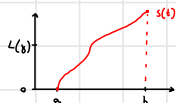
$$s(a) = 0 \quad s(b) = L(\gamma)$$

$s \in [0, L(\gamma)]$

Inoltre S é derivabile e $\frac{dS}{dt}(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$

Se la derivata $|\dot{\gamma}|$ che é continua quindi $S \in C^1([a, b])$

S é crescente



e in particolare S é invertibile

$t(s)$ é l'inversa $\frac{d}{ds} t(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} > 0$

$$t: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b] \quad t \in C^1([0, L(\gamma)]) \quad t(0) = a \quad t(L(\gamma)) = b$$

$$\sigma(s): [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \sigma(s) = \gamma(t(s))$$

Le curve $\sigma \circ \gamma$ sono equivalenti perché $\exists t: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ che é inietti o é surgettivo, di classe $C^1([0, L(\gamma)]) \neq \emptyset$

$$da \quad \sigma(s) = \gamma(t(s))$$

In particolare $\sigma \circ \gamma$ hanno lo stesso supporto (sono parametrizzazioni con lo stesso verso. $t(s) > 0$)

$$Se \quad \frac{d}{ds} \sigma(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \cdot t'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{|\dot{\gamma}(t(s))|}$$

$$|\dot{\sigma}(s)| = \frac{|\dot{\gamma}(t(s))|}{|\dot{\gamma}(t(s))|} = 1 \quad \text{La velocità della curva } \sigma \text{ é unitaria}$$

Def: la curva σ si chiama parametrizzazione per lunghezza dell'arco della γ .

La quantità s si chiama di parametro d'arco di γ o ascissa curvilinea

Se vogliamo calcolare $L(\gamma)$ scriveremo $L(\gamma) = \int_0^{L(\gamma)} |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_0^{L(\gamma)} 1 ds = L(\gamma)$

Definizione: Si definisce l'integrale curvilineo di $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sulla curva γ la quantità

$$\int_a^b f(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt \quad \text{e si scrive} \quad \int_{\gamma} f ds$$

Nel caso particolare in cui $f \equiv 1$

$$\int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma) \quad \text{ma anche} \quad \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{L(\gamma)} 1 ds = L(\gamma)$$

es: Calcolare $\int_{\gamma} 1 ds$

$$\gamma(x, y) = \sqrt{1 + 3x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (t, t^2) \Rightarrow \begin{pmatrix} x=t \\ y=t^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\int_{\gamma} 1 ds = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 3t^2 + t^4} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 3t^2} \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 1 + \frac{1}{3}$$

E: $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\rho(t), \theta(t)) \rightarrow \begin{cases} \rho(t) = \cos t \\ \theta(t) = t \end{cases}$

Calcolare la lunghezza $\int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt$ calcolo coordinate $\rightarrow (x, y)$

$$x(t) = (\cos \theta(t)) \rho(t) = \cos t \cos t$$

$$y(t) = (\sin \theta(t)) \rho(t) = \sin^2 t$$

$$\dot{x}(t) = -\sin^2 t$$

$$\dot{y}(t) = 2 \sin t \cos t$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin^2 t, 2 \sin t \cos t)$$

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\sin^4 t + 4 \sin^2 t \cos^2 t} = \sqrt{\sin^2 t (\sin^2 t + 4 \cos^2 t)} = \sin t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

E: Calcolare l'integrale curvilineo di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sulla curva $\gamma(0): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ in coord. polari
 $\rho(\theta) = 1 \quad \theta = \theta$

passo a coordinate cartesiane $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta = \cos \theta$

$$y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta = \sin \theta$$

$$\dot{\gamma}(\theta) = (\dot{x}(\theta), \dot{y}(\theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

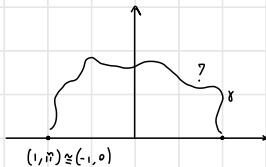
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad f(\theta) = \theta$$

$$\text{dunque} \quad \begin{aligned} x(\theta) &= \theta \cos \theta \Rightarrow x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = \theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta = \theta^2 \Rightarrow \sqrt{x(\theta)^2 + y(\theta)^2} = \theta \\ y(\theta) &= \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} f d\theta = \int_0^{2\pi} \theta \cdot \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \theta \cdot 1 = \int_0^{2\pi} \theta d\theta = \frac{1}{2} (1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$$

E: $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva della forma $\gamma(t) = (p(t), t)$ in coordinate polari tali che $\gamma(0) = (1, 0)$ coordinate polari
 $\gamma(\pi) = (1, \pi)$ polari

ovvero chiedo che $p(0) = 1 \quad p(\pi) = 1$



Calcolare il minimo valore che può assumere l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sulle curve γ .

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_0^{\pi} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \quad \gamma(t) = (p(t), t) \text{ coordinate polari} \quad \begin{aligned} x(t) &= p(t) \cos t \\ y(t) &= p(t) \sin t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x'(t) &= p'(t) \cos t - p(t) \sin t \\ y'(t) &= p'(t) \sin t + p(t) \cos t \end{aligned}$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{p'(t)^2 \cos^2 t + p'(t)^2 \sin^2 t - 2p'(t) \cos t \sin t + p'(t)^2 \sin^2 t + p(t)^2 \cos^2 t + 2p(t) p'(t) \cos t \sin t} = \sqrt{p'(t)^2 + p(t)^2}$$

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{p(t)^2 \cos^2 t + p(t)^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{p(t)}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{p(t)} \cdot \sqrt{p'(t)^2 + p(t)^2} dt \quad \text{è l'integrale curvilineo} \quad \geq \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{p'(t)^2}{p(t)^2} + 1} dt \geq \int_0^{\pi} 1 dt = \pi$$

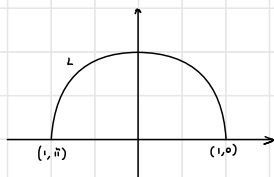
qualsiasi sia $p(t)$ l'integrale curvilineo viene $\geq \pi$. $\sum p(t) \geq 0 \Rightarrow \int_{\gamma} f(\gamma(t)) ds = \pi$

avevamo richiesto che $\left. \begin{aligned} \gamma(0) &= (1, 0) \\ \gamma(\pi) &= (1, \pi) \end{aligned} \right\} \text{ cond. pd.}$

$$\gamma(t) = (p(t), t) \quad \forall t \quad \text{necessariamente} \quad p(t) = 1 \Rightarrow p(0) = 1 \quad \gamma(0) = (1, 0)$$

$$\rho(\vec{r}) = 1 \Rightarrow \gamma(\vec{r}) = (1, \vec{r})$$

quindi la curva $\gamma(t) = (1, t)$ soddisfa che $\int_{\gamma} ds = \vec{r}$ che è il valore minimo



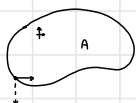
$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Superfici

Una superficie è una funzione $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove $K \subseteq \mathbb{R}^2$, ha le seguenti proprietà:

$\exists A \text{ aperto} : K = \bar{A} \cup A$ sia limitato e connesso

Inoltre richiedo che la funzione $\phi \in C^1(K)$, significa che $\phi \in C^0(K)$ e $\nabla \phi \in C^0(A)$



Una superficie si dice regolare se la ϕ ristretta all'aperto A ($\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$) risulta iniettiva.

Deve inoltre soddisfare la seguente proprietà

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0 \quad \text{in } A$$

Il prodotto vettoriale tra $a \in \mathbb{R}^3$ e $b \in \mathbb{R}^3$ è $a \wedge b = (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

Promemoria* $a \wedge b = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}^{3 \times 3}$

*Calcolo formale (non ha senso mettere le componenti di un vettore ad occupare una riga in una matrice)

$$= e_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + e_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + e_3(a_1 b_2 - b_1 a_2) = (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

Proprietà 1. $a \wedge b = -b \wedge a \Rightarrow a \wedge a = 0 \Rightarrow (\lambda a) \wedge a = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

se a e b sono paralleli allora $a \wedge b = 0$

Lemma: se $a \wedge b = 0$ allora a e b sono paralleli ($\exists \lambda \in \mathbb{R} : b = \lambda a$)

$$2. \text{ se } a, b, c \in \mathbb{R}^3 \quad (a \wedge b) \cdot c = (b \wedge c) \cdot a = (c \wedge a) \cdot b$$

$$\Rightarrow (a \wedge b) \cdot a = (a \wedge a) \cdot b = 0 \quad (a \wedge b) \cdot b = 0$$

Morale $a \wedge b$ é perpendicular sia ad a que a b