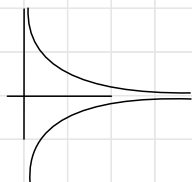


Sia  $D = \{x \geq 1, -\frac{1}{x} < y \leq \frac{1}{x}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

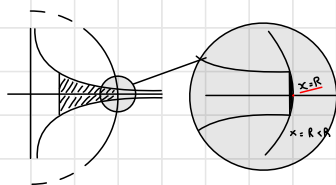


determinare se  $f(x, y)$  è integrabile in senso improprio su  $D$

$$f(x, y) = 1 \quad f(x, y) = \frac{1}{x}$$

Def:  $f(x, y)$  è integrabile in senso improprio se  $\int_{B_n(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} L < +\infty$

$$L = \int_D f(x, y) \, dx \, dy$$



$$\int_{B_n(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy = \int_1^{R^*} \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_E f(x, y) \, dx \, dy$$

$E$ : dominio colorato in nero

oss:  $\int_{B_n(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy \geq 0$  se  $f(x, y) \geq 0$

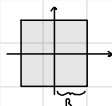
e se  $\bar{R} > R$   $\int_{B_{\bar{R}}(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy \geq \int_{B_R(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy$

si vede che  $\int_{B_R(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy$  è crescente in  $R$

$\exists \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(0) \cap D} f(x, y) \, dx \, dy = L$

La domanda è:  $L < +\infty$ ?

$Q_R = [-R, R] \times [-R, R]$



$$\int_{Q_R \cap D} f(x, y) \, dx \, dy$$

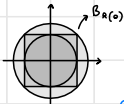
in questo caso se  $\bar{R} > R$

$\int_{Q_{\bar{R}} \cap D} f(x, y) \, dx \, dy \geq \int_{Q_R \cap D} f(x, y) \, dx \, dy \Rightarrow \exists \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R \cap D} f(x, y) \, dx \, dy = \hat{L}$

Teorema  $L = \hat{L}$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(o) \cap D} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{Q_R \cap D} f(x,y) \, dx \, dy$$

dim:  $B_R(o) \subseteq Q_R$



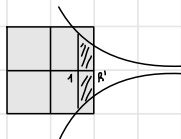
$$\int_{B_R(o) \cap D} f(x,y) \, dx \, dy \stackrel{(1)}{\leq} \int_{Q_R \cap D} f(x,y) \, dx \, dy \stackrel{(2)}{\leq} \int_{B_{4R}(o) \cap D} f(x,y) \, dx \, dy \stackrel{(3)}{\leq} L$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R(o) \cap D} f(x,y) \, dx \, dy = L \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R \cap D} f(x,y) \, dx \, dy \geq L$$

d'altro canto per le disuguaglianze 2 e 3

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R \cap D} f(x,y) \, dx \, dy \leq L \Rightarrow L' = L$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{D \cap Q_{R^1}} f(x,y) \, dx \, dy$$



Se  $f$  è integrabile in senso improprio

$$\Rightarrow \lim_{R^1 \rightarrow +\infty} \int_{D \cap Q_{R^1}} f(x,y) \, dx \, dy = \int_D f(x,y) \, dx \, dy = \lim_{D \cap B_R(o)} \int_{D \cap B_R(o)} f(x,y) \, dx \, dy$$

$$\text{come conv.} \Rightarrow \int_{D \cap B_R(o)} f \, dx \, dy - \int_{D \cap Q_{R^1}} f \, dx \, dy \rightarrow 0$$

$$\parallel$$

$$\int_E f \, dx \, dy$$

$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+|y|}}$  ci chiediamo se è integrabile in senso improprio su  $D$

$$\int_{D \cap Q_R} f(x,y) \, dx \, dy = \int_1^R \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} \, dy \, dx$$

per far vedere che  $f$  è integrabile in senso improprio è sufficiente mostrare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D \cap Q_R} f(x,y) \, dx \, dy < +\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+|y|}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \geq 1 \quad \forall y \in \left[-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right]$$

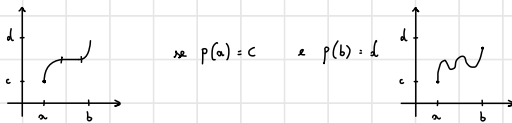
$$\int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} dy dx \leq \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x}} dy dx = \int_1^R \frac{2}{x\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^R x^{-3/2} dx = 2 \left( -2x^{-1/2} \right)_1^R = -4 \left( R^{-1/2} - 1 \right) = 4 \left( 1 - R^{-1/2} \right)$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \int_{-1/x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{x+|y|}} dy dx \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} 4 \left( 1 - R^{-1/2} \right) = 4$$

quindi  $f$  è integrabile in senso improprio su  $D$

Abbiamo definito 2 curve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  essere equivalenti se  $\exists \rho: [a, b] \rightarrow [c, d]$   
 $\rho \in C^1([a, b])$  regolare t.c.  $\gamma(t) = \sigma(\rho(t)) \quad \forall t \in [a, b]$

La domanda: NON devo supporre che  $\rho'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$  se voglio garantire che  $\gamma$  e  $\sigma$  sono regolari?



Se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1([a, b])$  e regolare  $\Leftrightarrow |\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ .

Se  $\sigma: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è equivalente a  $\gamma$  allora  $\forall t \in [a, b] \quad \gamma(t) = \sigma(\rho(t)) \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(\rho(t)) \dot{\rho}(t)$   
 $|\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(\rho(t))| |\dot{\rho}(t)| \neq 0 \quad \uparrow$  perché  $\gamma$  è regolare

Concludo che  $\dot{\rho}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

Lemma Se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva regolare e  $\sigma$  è equivalente a  $\gamma$  allora

1.  $\dot{\rho}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$

2. Se  $\sigma$  è di classe  $C^1$ , allora è regolare anche lei.

dim: al punto 2 regge perché  $|\dot{\gamma}(t)| = |\dot{\sigma}(\rho(t))| |\dot{\rho}(t)| \neq 0 \Rightarrow |\dot{\sigma}(\rho(t))| \neq 0 \Rightarrow \sigma$  è reg.

## Superfici

Abbiamo definito  $\Phi: K \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad K \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $K: \bar{A}$  dove  $A$  è aperto connesso limitato

$$\Phi \in C^1(A) \cap C(\bar{K})$$

$\Phi$  è regolare se  $\Phi$  è invertibile in  $A$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \neq 0$$

$$\Rightarrow: \phi(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \sin y)$$

$$x \in [0, 2\pi]$$

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$x = \begin{cases} x = \theta \\ y = \varphi \\ \rho = 1 \end{cases}$$

mi accorgo che le coordinate di  $\phi(x, y)$  sono le coordinate cartesiane di un punto le cui coordinate sferiche sono

$$\rho = 1, \theta, \varphi$$

$\Rightarrow$  la superficie  $\phi$  parametrizza tutte le sfere di raggio uno centrate nell'origine

$$\text{Supporto di } \phi = \phi([0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \\ = \partial B_1(0)$$

$$B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$$

L'iniettività di  $\phi$  su  $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  è "abbastanza" evidente dal fatto che la parametrizzazione data da  $\phi$  è quella delle coordinate sferiche

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (-\sin x \cos y, \cos x \cos y, 0)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (-\cos x, \sin x, \cos y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} = (\cos x \cos^2 y, \sin x \cos^2 y, \sin^2 x \cos y \sin y + \cos^2 x \cos y \sin y)$$

$$= (\cos x \cos^2 y, \sin x \cos^2 y, \cos y \sin y)$$

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| = \cos y$$