

Esercizio Anal ~~II~~

01/04/22

Limiti di funzioni in 2 variabili

1) Verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)^2 (y-1)}{(x-2)^4 + (y-1)^2}$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$

$\Leftrightarrow$

da ogni direzione

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$$

$y = y(x)$

Qualunque sia la direzione, deve convergere a quel valore, da zero al negativo, se lim dipende da un parametro, su

a) consideriamo il fascio di rette passante

per il punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ con } m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = 1 + m(x - 2)$$

calcoliamo il limite della funzione rispetto al fascio di rette.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x, 1 + m(x-2)) =$$

per tutte le rette, se $x \neq 2, y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 (1 + m(x-2) - 1)}{(x-2)^4 + (1 + m(x-2) - 1)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 m(x-2)}{(x-2)^4 + m^2 (x-2)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)^3}{(x-2)^2 [(x-2)^2 + m^2]} = 0 \text{ per } m \neq 0$$

b) consideriamo le parabole aventi vertice in $(x_0, y_0) = (2, 1)$

$$y = y_0 + m(x - x_0)^2 \text{ con } m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, 1 + m(x-2)^2) =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)^2 (1 + m(x-2)^2 - 1)}{(x-2)^4 + (1 + m(x-2)^2 - 1)^2}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{m \cancel{(x-2)^4}}{\cancel{(x-2)^4} [1+m^2 y]} = \frac{m}{1+m^2}$$

- indipendente da x
- è dipendente da m ,
- è diverso per ogni parabola considerata,
IL LIMITE NON ESISTE.

2) Verificare l'esistenza del limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

a) Consideriamo il fascio di rette passanti per il punto $(0,0)$: $y = mx$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
calcoliamo il limite della funzione rispetto al fascio di rette:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, mx) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - mx}{x + mx} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

oss. il valore del limite dipende dal parametro m . Il limite non esiste

$$3) f(x, y) = \sqrt{1 + 3x^2 + 5y^2}$$

Studiare $\lim_{(x,y) \rightarrow 00} f(x, y)$ WARNING!!!
 provare con le coordinate polari
 Somma di quadrati.

$$x = \rho \cos \vartheta \quad y = \rho \sin \vartheta$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta \\ &= \rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \rho^2 \end{aligned}$$

$$f(\rho, \vartheta) = \sqrt{1 + 3\rho^2 \cos^2 \vartheta + 5\rho^2 \sin^2 \vartheta} =$$

$$= \sqrt{1 + \underbrace{3\rho^2 \cos^2 \vartheta + 5\rho^2 \sin^2 \vartheta}_{3\rho^2}} = \sqrt{1 + 3\rho^2}$$

$$= \sqrt{1 + 3p^2 + 2p^2 \sin^2 \vartheta} \quad \text{Maggiorazione}$$

$$0 \leq \sin^2 \vartheta \leq 1$$

$$2p^2 \sin^2 \vartheta \leq 2p^2$$

$$0 \leq h(p, \vartheta) \leq \sqrt{1 + 3p^2 + 2p^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 5p^2}$$

$$h_1(p, \vartheta)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} h_1(p, \vartheta) = 0$$

Teo. Canal.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} h(p, \vartheta) = 0$$

3) studiare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^3)}{e^{x^2 + y^2} - 1}$$

lim. notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

||
✓

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^3)}{x^4 + y^3} \cdot \frac{x^4 + y^3}{e^{x^2 + y^2} - 1}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^3)}{x^4 + y^3} \cdot \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2 + y^2} - 1} \cdot \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$$

limite del prodotto = prodotto limiti.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^3)}{x^4 + y^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{e^{x^2 + y^2} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$$

reciproco limite notevole

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} = \text{lo risolviamo in coord. polari.}$$

$q(x,y)$

$$q(\rho, \vartheta) = \rho^4 \cos^4 \vartheta + \rho^3 \sin^3 \vartheta$$

$$\frac{\cancel{\rho^2}}{\cancel{\rho^2}} (\rho^2 \cos^4 \vartheta + \rho \sin^3 \vartheta) =$$

$$= \rho \sin^3 \vartheta + \rho^2 \cos^4 \vartheta$$

$$\rho \sin^3 \vartheta \leq \rho$$

$$\rho^2 \cos^4 \vartheta \leq \rho^2$$

$$0 \leq |q(\rho, \vartheta)| \leq |\rho + \rho^2| = \rho + \rho^2$$

Se $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

allora $\rho \rightarrow 0$, ϑ viene estraneo

perché ϑ non può essere $(0, 0)$

Seo e coseno non possono essere 0 nello stesso momento

$$\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} q(\rho, \vartheta) = 0$$

I due limiti esistono finiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5m(x^4 + y^3)}{e^{x^2 + y^2} - 1} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Alternative

$$q(x,y) = \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$$

bra neccessari, pome alle 1 concol polari?

$$0 \leq |q(x,y)| = \left| \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \stackrel{\text{distrib. Brückner}}{\leq} \left| \frac{x^4}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^4}{x^2} \right| + \left| \frac{y^3}{y^2} \right| = x^2 + |y| \quad \underbrace{(x,y) \rightarrow (0,0)}_{\rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |q(x,y)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} q(x,y) = 0$$

EX

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

5) Studiare il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x^2 - xy - xy + xy - y^2}{x^2 - y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x^2 - 2xy + xy - y^2}{x^2 - y^2} =$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{2x(x+y) - y(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(2x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{3}{2}$$

Sostituire

6) Studiare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

$\Rightarrow$ Studiare il limite sulla funzione

rispetto a $y = x^3$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot x^3}{x^6 + x^6} =$$

$$\frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

limite per questo iter. è $\frac{1}{2}$

// Restringo $\mathcal{D}$ ora x ($y=0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot 0}{x^6 + 0} = 0$$

il limite non esiste