

Esercizio.

Sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1$

$$f_n(x) = x^n (1 - x^n) \quad \forall n \geq 1$$

a) Determinare l'insieme di convergenza

PUNTO $\subseteq I$ e la funzione limite

b) Studiare la conv. uniforme

di $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su I e sugli intervalli

$[0, b]$ con $0 < b < 1$

Def. (quando f_n converge puntualmente in I ?)

f_n conv. punt. a f in I sse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Def. Conv. UNIFORME

f_n conv. UNIF. a f sse

è più forte che conv. puntuale

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

a) $f_n(0) = 0 \quad f_n(1) = 0$

CONSIDERO $(0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n (1 - x^n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - x^n) =$$

$$= 0 \cdot (1 - 0) = 0$$

$$[0, 1] = I$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

b) Step 1 $[0, 1]$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| =$$

$\Rightarrow$ Basteria il modulo.

$$= \limsup_{n \rightarrow +\infty} (x^n (1 - x^n)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} f_n(x)$$

definito su un insieme
compatto, avendo sup e inf.
WEIERSTRASS

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in I} f_n(x)$$

Domanda $\max_{x \in I} f_n(x) = ?$

Si fa derivata e si mette = 0

$$f'_n(x) = \frac{d}{dx} (x^n(1-x^n)) =$$

$$\frac{d}{dx} h \cdot g = h'g + g'h$$

$$= f'_n(x) = n x^{n-1} (1-x^n) + x^n (-n x^{n-1}) =$$

$$= n x^{n-1} (1-2x^n)$$

Si pone $f'_n(x) = 0$

$$n x^{n-1} (1-2x^n) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$f_n(x_1) = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

$$f_n(x_2) =$$

$$= f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n =$$

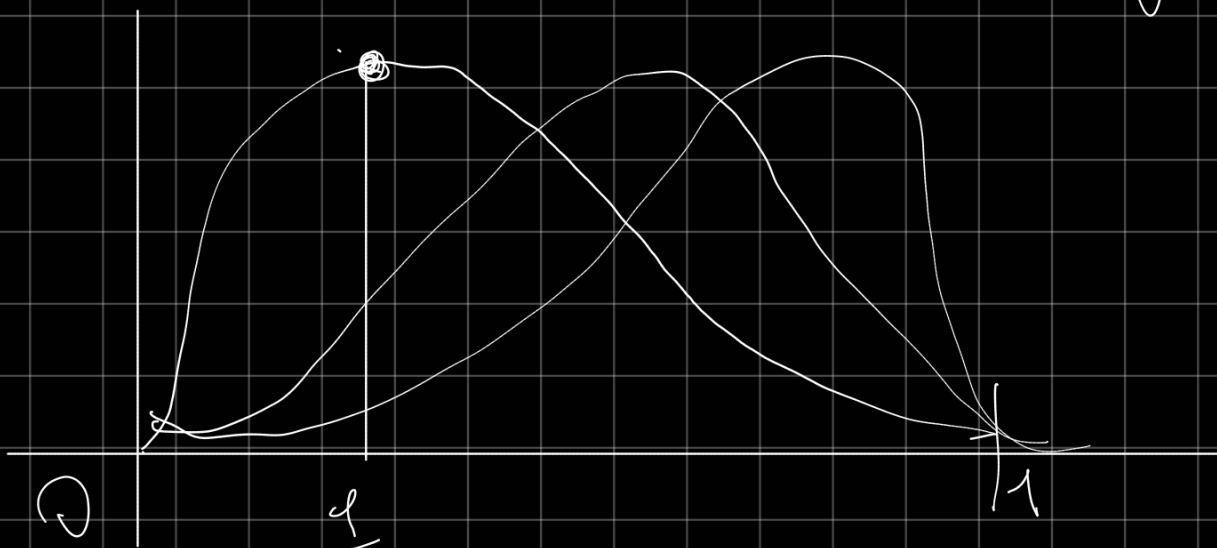
$$= \frac{1}{4}$$

disposta $\max_{x \in I} f_n(x) = \frac{1}{4}$

NON CONV. in I

b) Step 2 $[0, b]$ con $0 < b < 1$

Un massimo di $f_n(x)$ è in $\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, b]} f_n(x) = \frac{1}{4}$

Da prima sappiamo che $f_n(x)$ cresce
fino a raggiungere $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ e poi decresce

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-\frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[1]{2}} = \frac{1}{2}$$

$b = \frac{1}{2}$ per la funzione

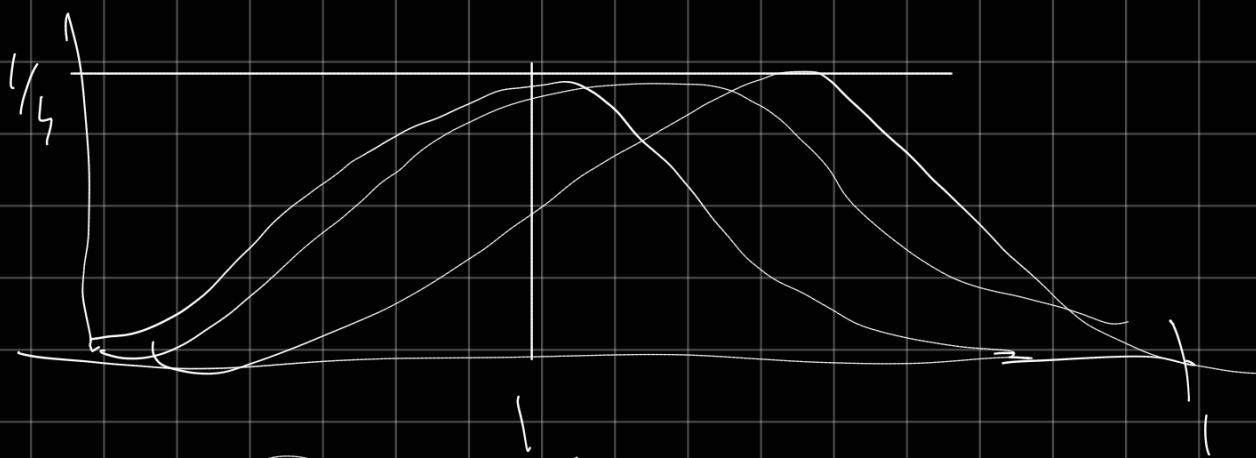
Conv. $b = \frac{1}{2}$ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

La serie risp. di $\sum_{n \in \mathbb{N}} T.C.$

$$\forall n \geq m \quad \frac{1}{\sqrt[n]{2}} > b$$

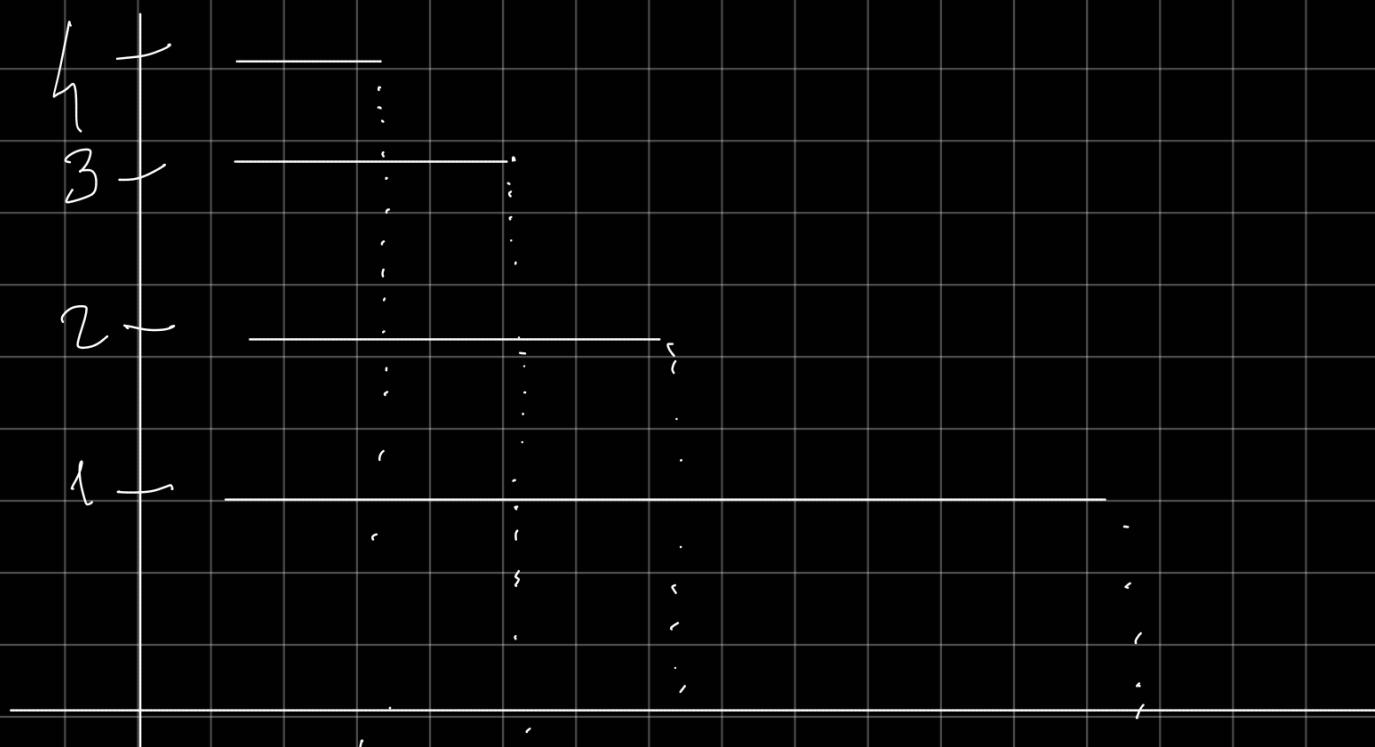
Verifichiamo inoltre che sia il monomio



(M)

$\frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) = \frac{1}{4}$$



$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 1

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{Anderwo} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

uniforme konvergenz
oder nicht

