

Ex Teorema. $\mathbb{D} \mathbb{N} 1$

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - y^2 \\ y(2x-1) \end{pmatrix}$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Trovare: punti in cui h è un diffeomorfismo
locale e dire se h è un diffeomorfismo
globale.

Sol. h è di classe C^1

$$J_p(v) \begin{pmatrix} \nabla h_1(v) \\ \nabla h_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2x-1 & -2y \\ 2y & 2x-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_p(v) =$$

$$= (2x-1)^2 + 4y^2$$

$$\det J_p(v) = 0 \quad \text{sse } v = (1/2, 0)$$

$\Rightarrow$ Si può applicare il Teo di inversa

$$\text{locale } \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1/2, 0)\}$$

Ω

$\Rightarrow \forall v \in \Omega$ f è un differenziale locale
in un intorno di v

f è differenziale? No: $f|_{\Omega}$ non è iniettiva!

Infatti: $\underline{f=0} : \begin{cases} x^2 - x - y^2 = 0 \\ y(2x-1) = 0 \Rightarrow y=0 \quad \forall \\ x=1/2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Se $y=0$, dalla prima componente

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x=0, x=1$$

$$\Rightarrow f(0,0) = f(1,0) = 0 \Rightarrow f \text{ non è iniettiva}$$

Ex 2

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad h(x, y) = \begin{pmatrix} 13 \sin x + 2 \sin y \\ 2 \cos x + \sin y \end{pmatrix}$$

stimo se è loc. invertibile in un
intorno di $(0, 0)$ stimo se è glob. invertibile.

Sol

$$J_p(v) = \begin{pmatrix} 13 \cos x & 2 \cos y \\ -2 \sin x & \sin y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(J_p(v)) &= 13 \cos x \sin y + 4 \sin x \cos y \\ &= \sin y (13 \cos x + 4 \sin x) \end{aligned}$$

$$\det(J_p(0,0)) \neq 0 \Rightarrow h \text{ è loc. invertibile in un intorno di } (0,0)$$

$\Rightarrow h$ è
per. inv. $\Rightarrow$ non in. inv. $\Rightarrow$ no glob.
inv.

Th. (2°) th. del Dini - funzioni implicite

caso bidimensionale

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ h_2 di classe C^1 e supponiamo che $h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$$M = \{(x, y) \in \Omega : h(x, y) = 0\}$$

$$[(\bar{x}, \bar{y}) \in M] \quad \frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \neq 0$$

$\frac{\partial h}{\partial y}$ intero di $\bar{x}$ intero di $\bar{y}$

Allora $\exists$ intorno aperto $D = V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} \subset \Omega$

$\exists \phi: V_{\bar{x}} \rightarrow W_{\bar{y}}$ di classe C^1 t.c.

$$1) M \cap D = \Lambda \phi = \{(x, y) \in D : y = \phi(x)\}$$

$$2) \text{ Se } y_0 \in W_{\bar{y}}, x_0 \in V_{\bar{x}}, h(x_0, y_0) = 0 \\ \Rightarrow \phi(x_0) = y_0$$

$$E_x. \exists h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x, y) = y^3 + 2x^3 + xy - 4x^2 + 2x$$

a) Verificare che in un intorno di $D = (1, 0)$

$h(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione

$$y = \phi(x)$$

Sol. Verificare che $h(P) = 0$:

$$h(1, 0) = 0 + 2 + 0 - 4 + 2 = 0 \quad \text{OK}$$

$$\phi'(y_0) = \frac{h_x(x_0, y_0)}{h_y(x_0, y_0)}$$

$$h_x = 6x^2 + y - 8x + 2$$

$$h_y = 3y^2 + x \Rightarrow h_y(P) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\exists$ intorno di P per cui

$h(x, y) = 0$ definisce implicitamente
una funzione $z = \phi(x)$

b) Calcolare $\phi'(1) = \frac{f_x(1, 0)}{f_y(1, 0)} = \frac{3}{1} = 3$

Es 4. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$$

a) Verificare che in un intorno di $P = (0, e, 1)$
l'eq. $f(x, y, z) = 0$ definisce
implicito. $z = h(x, y)$

Sol. $f(P) = 0$?

$$f(0, e, 1) = e^2 + 0 + 4 - e^2 - 4 = 0 \quad \underline{\text{ok}}$$

$$f_z(x, y, z) = x + 2z - e^z$$

$$h \in C^1, \quad f_z(P) = 0 + 4 - e^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ il c.h. vale in un intorno di P .

b) Calcolare $h_x(0, e)$.

$\Rightarrow$ risolvere l'eq. in un intorno di $\begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}$.

$$y^2 + x \cdot h(x, y) + h^2(x, y) - e^{h(x, y)} - 4 = 0$$

$$h(x, y) + x h_x(x, y) + 2h(x, y).$$

$$- h_x(x, y) - e^{h(x, y)} h_x(x, y) = 0$$

$$h_x(x, y) [x + 2h(x, y) - e^{h(x, y)}] = -h(x, y)$$

$\underbrace{h(0, e) = 2}$

Valuto $(x, y) = (0, e)$:

$$h_x(0, e) [0 + 4 - e^2] = -2$$

$$h_x(0, e) = \frac{-2}{4 - e^2}$$

