

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ naturali. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali. $\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi.

Insieme finito quando si può mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali. Tutti gli altri insiemi sono infiniti.

$\emptyset$ insieme vuoto

$\mathcal{I}$ famiglia di insiemi

insieme formato da altri insiemi = famiglia di insiemi.

Def Spazio Topologico

Sia $\mathcal{T} = \{ \tau_\beta \}$ $\beta \in \Lambda$ una famiglia di

Λ maiuscolo
insieme di indici

Sottoinsiemi di X insieme universo

famiglia di sottoinsiemi

Def 1 $\mathcal{T}$ si definisce una **TOPOLOGIA** se verifica le seguenti condizioni.

devono essere aperti

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

l'insieme vuoto e tutto l'insieme $\in \mathcal{T}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e $\forall \tau_1, \dots, \tau_n \in \mathcal{T}$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \tau_i \right) \in \mathcal{T}$$

qualcuna
prende una copia di aperti, la loro intersezione deve essere un aperto.

3) $\bigcup_{\alpha \in I} \tau_\alpha \in \tau$

insieme di indici (?)
 Topologia chiusa rispetto ad unioni
 ordinario di τ di τ appartiene a τ
 Se uniamo gli elementi di τ , ci restituisce
 un elemento di τ

Se soddisfa ciò, τ è una Topologia

Uno Spazio Topologico è una
 coppia ordinata di 2
 ELEMENTI
 $(X, \tau) = \text{Spazio Topologico}$

$\neq \emptyset$ senso
 banale.
 τ una
 Topologia su X

analizziamo sul concreto

Esempio.

$\mathbb{R} = \mathbb{R}$
 insieme aperto
 semiretta aperta a dx
 (a, b) oppure $(-\infty, b)$, oppure
 $(a, +\infty)$, con $a < b$
 semiretta aperta a sx
 oppure $\emptyset$ oppure $\mathbb{R}$

è facile verificare che è una topologia (STANDARD)
 su $\mathbb{R}$.

questa famiglia GENERA una FAMIGLIA degli
 SISTEMI APERTI. ciò è una sottofamiglia.

Chiamiamo τ la famiglia formata da
 tutti i possibili punti aperti insieme.

Prendendo tutte le possibili unioni

Osservazione Non è difficile verificare che τ , la famiglia di tutte le possibili unioni di elementi di τ è una **TOPOLOGIA SU $\mathbb{R}$**

non è detto che in generale tutte le unioni sono una Topologia.

Mel caso di $\mathbb{R}$ ci va bene. è una peculiarità di $\mathbb{R}$.

Andiamo nel concreto con uno SPAZIO METRICO.

$X \neq \emptyset$
 $\xrightarrow{\text{prodotto cartesiano}} X \times X \xrightarrow{x^2} X \rightarrow [0, +\infty)$
 $\xrightarrow{\text{a valori non negativi}}$ si dice una

Metrica su X se

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
distanze
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 3) $\forall x, y, z \in X$ è $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$\hookrightarrow$ si può chiamare **Triangolo**

$(X, d) \leftarrow$ **Spazio metrico**

Esmpi: $X = \mathbb{R}$ $d_1(x, y) = |x - y|$
 Spazio Metrico = Coppia (X, d) distanza $x \neq y$

CLASSROOM

WS6abc

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_i = 1, \dots, m \cdot \in \mathbb{R} \right\}$$

VEktoren

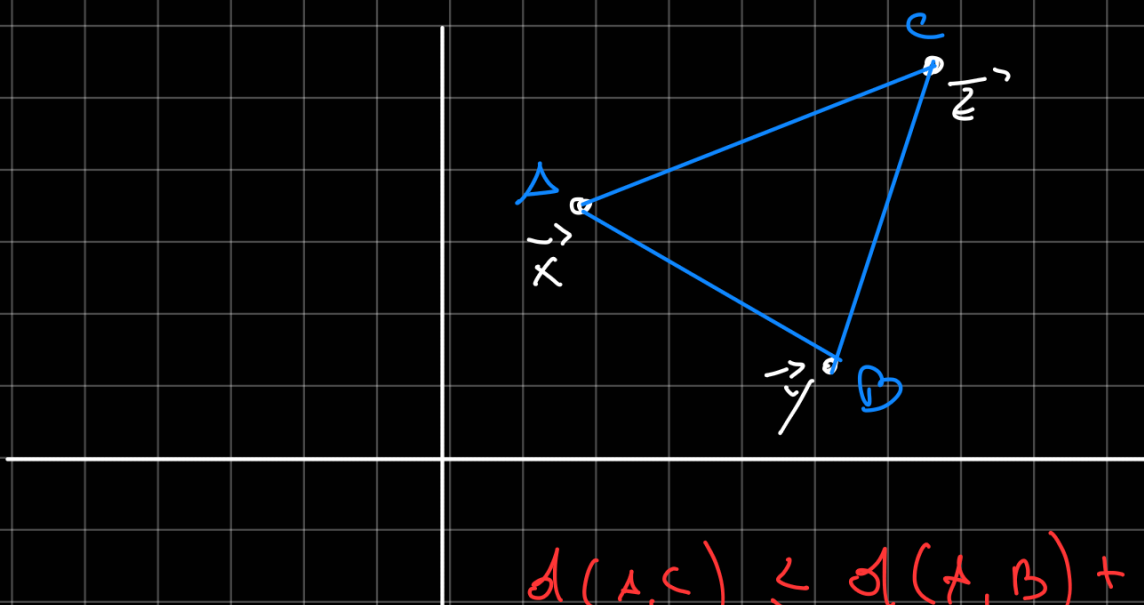
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$d_2(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)^T$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2)^T$$

$$\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

*calcolo
distanza*

TRIANGOLARE perché in $\mathbb{R}^2$



$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

$$= \sum_{i=1}^m \left((u_i - v_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathbb{R}^n$

$$d_n(\vec{u}, \vec{v}) := \left(\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

distanza euclidea in $\mathbb{R}^n$

Es. Sia $p \geq 1$

$$d_{n,p}(\vec{u}, \vec{v}) := \left(\sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es. spazio vettoriale di dim. infinita.

$$C([a, b]) := \{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

chiusa rispetto a somma vettoriale f continua $\}$
e prodotto per scalare.

le funzioni continue sono spaz. vettoriali.

→ non è generato da una base finita

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

faccio scorrere x nel mio dominio, prendo il massimo,
il max esiste per il Teorema di Weierstrass in
funzioni continue.

OSS

$$\forall x \in [a, b], \forall f, g, h \in C^0([a, b])$$

$$|f(x) - h(x)| = |[f(x) - g(x)] + [g(x) - h(x)]|$$

$$\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq$$

$$\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)| =$$

la prima dipende da x *secondo fisso*

$$= d(f, g) + d(g, h)$$

$$|f(x) - h(x)| \leq$$

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$$

Se invece del max, uso l'estremo superiore, la disuguaglianza si mantiene.

$$\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

la palla centrata in x , x centro della palla

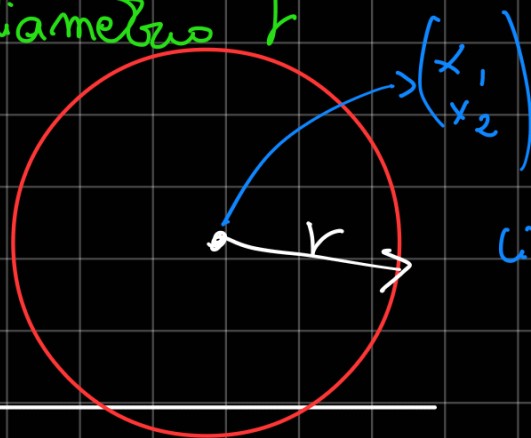
$$B(\vec{x}, r) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r \right\}$$

la distanza è minore di r

$$(-r+x, r+x) \quad \text{in } \mathbb{R}^1$$

$\text{in } \mathbb{R}^2$

semidiametro r



circonfenza.

$\text{in } \mathbb{R}^3$ sfera.

Palla chiusa

$$B_n(\vec{x}, r) := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq r \right\}$$

ci sto aggiungendo il bordo.

✓ Palla puntata

$$B_n(\vec{x}, r) := \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r \right\}$$

gli toglierei il centro

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = r \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

prendo solo il bordo
ipersfera.

Def. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ^{insieme} X si dice

Aposto se: $\bigcap X = \emptyset$ oppure
 $\emptyset \times \emptyset$ insieme vuoto

$\forall x \in X \exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq X$

Se esiste almeno un raggio r che esista
una palla centrata in x di raggio r
contenuta in X

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

La Famiglia di tutti gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$

Prop. La famiglia $\mathcal{A}$ di tutti gli aperti
di $\mathbb{R}^n$ è una Topologia su $\mathbb{R}^n$.

OSS

Siamo $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k$; Sia $x \in \mathbb{R}^n$

Allora $\bigcap_{i=1}^k B(x, p_i) = B(x, p_k)$

Questo vale se abbiamo finite palle.

l'intersezione di $\mathcal{F}_k$ è una palla

Dim

1) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, con $A_\alpha \in \mathcal{A}$, e' in $\mathcal{A}$

Possiamo supporre che $\exists \bar{\alpha} \in \Lambda$ t.c. $A_{\bar{\alpha}} \neq \emptyset$

Allora $\exists \bar{r}_\alpha > 0$, $\exists \bar{x} \in A_{\bar{\alpha}}$, t.c.

$$B(\bar{x}, \bar{r}_\alpha) \subseteq A_{\bar{\alpha}} \subseteq A$$

Dim

Sia $B = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_k$, con

$A_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq k$ numero finito di aperti.

Allora $\exists p_1, p_2, \dots, p_k > 0$,

$\exists x \in B$ t.c. $B(x, p_i) \subseteq A_i$, $1 \leq i \leq k$

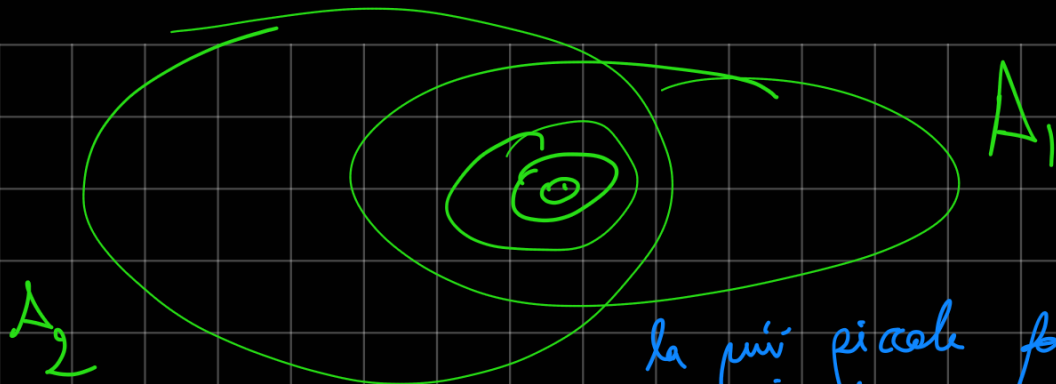
... Se esiste una palla contenuta ...

Allora, preso $p > 0$, $p = \min_{1 \leq i \leq k} p_i$ per

la precedente

oss.

$$B(x, p) \subseteq \bigcap_{i=1}^k B(x, p_i) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_k = B$$



la più piccola palla è
inclusa in tutte le altre
ha senso solo con famiglie intersezione.

il tutto si generalizza negli spazi metrici.

l'intersezione
infinita di aperti, non
è un aperto

$$\bigcap_{r>0} (-r, r) = \{0\}$$

Def. Sia (X, d) spazio metrico.

Sia $x \in X, r > 0$

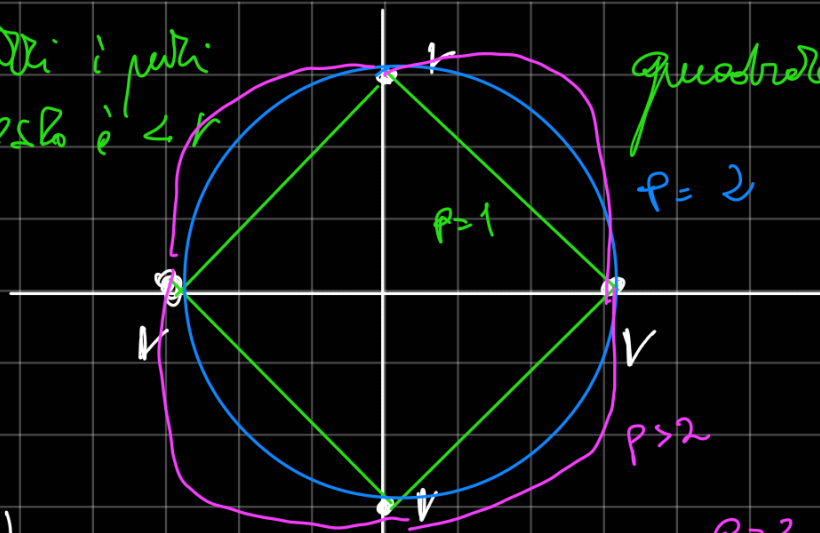
$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Prop. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia degli aperti di X ,
allora essa è una topologia su
 X detta la Topologia indotta dalla distanza d
e denotata con τ_d

$$(\mathbb{R}^2, d) \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$B(\vec{0}, r)$$

Prendiamo tutti i punti
in cui questo è $\leq r$



quadrato di $\mathbb{R}^2$ per
 $p=2$

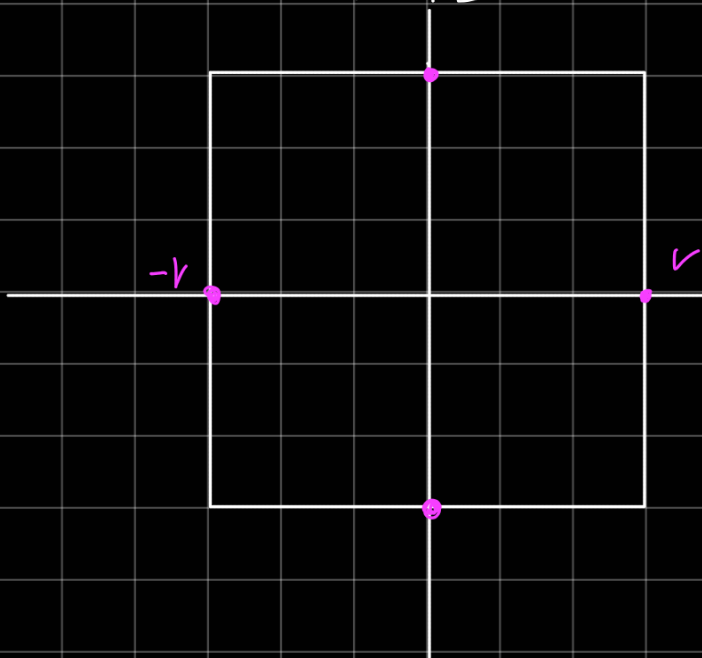
$p \geq 1$

$p \geq 2$ metrica
euclidea.

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quando p tende all'infinito, otteniamo la
Metrica del ∞

$$d_{\infty}(\vec{x}, \vec{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



Tutte queste metriche
inducano la
stessa Topologia

Definizione

Sia $X \neq \emptyset$ e X Spazio Vettoriale
su $\mathbb{R}$

Una funzione $N: X \rightarrow [0, +\infty)$ si dice

una norma su X se:

$$1) N(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \quad \text{elemento nullo rispetto alla somma}$$

$\forall \vec{x} \in X$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad N(\alpha \vec{x}) = |\alpha| N(\vec{x});$$

positiva

omogeneità

$$3) \forall \vec{x}, \vec{y} \in X \quad N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$$

$(X, N) \leftarrow$ Spazio normato.

Oss Sia N una norma su X , allora essa induce su X la seguente metrica.

$$d_N(\vec{x}, \vec{y}) := N(\vec{x} - \vec{y})$$

metrica = distanza indotta

LEZIONE 2 11/03/22

$\mathbb{R}^m$

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

NORMA

$$p \geq 1$$

$\vec{x}$

$$\|\vec{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|\vec{x}\| := \|\vec{x}\|_2$$

$$\|\vec{x}\|_2$$

norma euclidea

$$\hookrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

in $\mathbb{R}^n$, quella che induce la distanza euclidea.

strettamente maggiore di 0

OSS. Siano $a_1, \dots, a_n > 0$

quando $a_i = 1$, norma euclidea

$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ è una norma, da pesi differenti alle varie componenti.

$$\left(\sum a_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Def. NORME EQUIVALENTI.

Sia X spazio vettoriale, N e $\tilde{N}$ due sue norme. Si dicono EQUIVALENTI se

$$\exists c_1, c_2 > 0 \text{ t.c.}$$

costanti positive

$$c_2 N(x) \leq \tilde{N}(x) \leq c_1 N(x) \quad \forall x \in X$$

due norme equivalenti inducono lo stesso spazio metrico.

OSS. Se N è equivalente a $\tilde{N}$, allora

$$(X, d_N) = (X, d_{\tilde{N}})$$

la famiglia degli aperti rispetto a N è uguale alla famiglia di aperti rispetto a $\tilde{N}$

OSS $\forall p, q \geq 1$

$$\| \cdot \|_p \stackrel{\text{equiv.}}{=} \| \cdot \|_q$$

norma per esponente p norma per esponente q

Def Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ infinito,

$B \neq \emptyset$. Allora una qualsiasi funzione $S: S \rightarrow B$ si dice codominio spazio metrico.

SUCCESSIONE (a valori in B)

di solito si prende $S = \mathbb{N}$, ma altre volte conviene prendere un generico S infinito.

$(a_n)_{n \in S}$ se è chiaro il dominio, si omette $\{a_n : n \in S\}$ Supporto della successione, l'immagine, valori aggiunti almeno una volta.

Def Sia $\sigma: S \rightarrow S$ una funzione **STRETTAMENTE CRESCENTE** (relaz. ordine totale su $\mathbb{N}$)

Sia (a_n) una successione $(a_{\sigma(n)})$ si dice una sua **SOTTOSUCCESSIONE** $\rightarrow$ modo comodo

Es. $S = \mathbb{N}$, al posto solo indici pari, questo è una sottosuccessione.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ definito su tutti gli n { $\left(\frac{1}{2n}\right)$ solo pari { $\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ solo dispari.
 basta che sia { $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ scelto i quadrati. } Sto scegliendo σ
 DIRETTAMENTE CRESCENTE.

Sia (X, d) spazio metrico, Prima su B

(a_n) successione a valori in X

Sia $\bar{x} \in X$. Si dice che (a_n) TENDI a $\bar{x}$ per $n \rightarrow +\infty$, e

si scrive $(a_n) \rightarrow \bar{x}$, oppure

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \bar{x}$ se

tipo $\mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in S$ t. c.

INVECE del valore scelto, prendo la distanza.

$n \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(a_n, \bar{x}) \leq \varepsilon$

sostituisco la distanza con il valore assoluto.

(per quanto preso piccolo ε , trova un indice
 per cui la distanza tra a_n e $\bar{x}$ è più piccola di ε
) immediata generalizzazione di ciò che
 abbiamo visto ad $\mathbb{A}^1$ e $\mathbb{A}^n$.

UNIFORMITÀ

UNICITÀ DEL LIMITE, se esiste è unico

OSSSS. Se (a_n) ammette limite, questo
 limite è UNICO.

PROP. $(a_n) \rightarrow \bar{x} \Rightarrow (a_{\sigma(n)}) \rightarrow \bar{x}$,

$\forall$ sottosuccessione

PROP. Siano $x_1 \neq x_2$ in X . Sia (a_n) sottosuccessione
 Supponiamo esista $(a_{\sigma(n)}) \rightarrow x_1$ e
 $(a_{\tilde{\sigma}(n)}) \rightarrow x_2$. Allora (a_n) NON

AMMETTE LIMITE.

PROP Sia (a_n) tale che $\exists x \in X$ per cui
 da ogni sottosuccessione $(a_{\sigma(n)})$ sia possibile
 estrarre una ulteriore sua sottosuccessione

$(a_n) \rightarrow \bar{X}$. Allora $(a_n) \rightarrow \bar{X}$
 può essere usato sia in positivo che in negativo -
 ↳ successione di successioni (a_n)

Se il codominio, X oltre ad essere spazio metrico, è
 anche uno spazio vettoriale, ha senso sommare
 successioni, moltiplicare per scalari ecc. ecc., per
 limiti anche ecc.

Sia (X, N) spazio normato. Siano
 $(a_n) \rightarrow \bar{a}$, $(b_n) \rightarrow \bar{b}$ e siano
 elementi di X

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$1) (\alpha a_n + \beta b_n) \rightarrow \alpha \bar{a} + \beta \bar{b};$$

$$2) (N(a_n)) \rightarrow N(\bar{a}) \quad \text{norma}$$

$$3) (a_n) \rightarrow \vec{0} \Leftrightarrow (N(a_n)) \rightarrow \vec{0} \quad \text{numero}$$

↳ "successione infinitesima", vale solo per $\vec{0}$

SUCCESSIONE DI CAUCHY

naturale generalizzazione

Def. Sia (X, d) sp. metrico. Una (a_n)
 si dice fondamentale (o di Cauchy), se

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$$

per questo piccolo numero ε , i termini della succ. distano meno di ε

$\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \right)$ successione, non non è definita per $n=1, n=2$
 $n=0$. quindi invece di N , prendo $\mathbb{N}$

Def. Uno Spazio Metrico (X, d) si dice **COMPLETO**, se ogni successione fondamentale converge al limite che appartiene a X

Prop. $\mathbb{R}^n$ dotato della metrica euclidea è **COMPLETO**. → indotta dalla norma euclidea

non tutti gli spazi metrici sono completi.

$X = (0, 1)$ non è completa. Prendo una succ. che tende a 0, in $\mathbb{R}$ converge a 0, ma 0 non appartiene a X . Succ. fondamentale ma 0 non appartiene a X . devo sempre vedere di X .
La metrica la vedo in $\mathbb{R}$ e poi la restringo a X , insieme aperto.

Posso espandere una metrica ad un insieme più grande?

Ritorno alla Topologia.

Def. Sia (X, τ) spazio Topologico.

Un insieme A si dice aperto se
 $A \in \tau$. un insieme B si dice chiuso
se $C B \in \tau$.

$C B$ complemente di B , $C B = X \setminus B$
unione di aperti è aperto, l'intersezione di
chiusi è un insieme chiuso. l'unione FINITA
di chiusi, è chiusa.

Def. un Ricoprimento $\mathcal{A} \in \tau$

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ di $D \subseteq X$ e'

una qualsiasi famiglia di APERTI di
 X , t.c. $D \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$

famiglia di insiemi aperti cui l'unione
contiene D .

X e $\emptyset$ sono sia aperti che chiusi.

Def. Sia (X, τ) spaz. Topologico.

Un insieme $K \subseteq X$ si dice

COMPATTO se per ogni suo ricoprimento

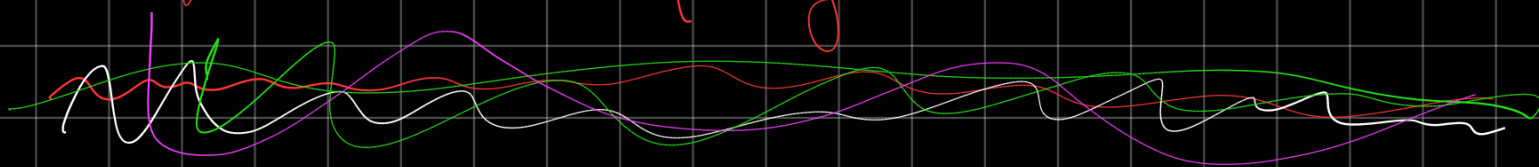
aperto è possibile estrarre un
 SOTTOSEQUENZA FINITA.
 sottoinsieme di un ricoprimento aperto.

Es $X = (0, 1)$ non è compatto,
 non possiede un
 sottoinsieme finito.
 $\hookrightarrow A_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right)$
 $n \geq 3$

se prendo un numero
 sufficientemente
 grande,

ma se prendo un numero
 finito, no.
 Se chiudo $[0, 1]$, allora è COMPATTO.

Definizione Topologica



Def. Sia (X, d) spazio metrico

$K \subseteq X$ si dice COMPATTO per
 successioni se: $\forall (a_n)$ t.c. $\{a_n\} \subseteq K$
 esiste una sottosuccessione che converge ad un punto
 di K .

$$\exists (a_{\sigma(n)}) \rightarrow \bar{a} \in K$$

esiste una sottosuccessione che converge ad un punto
 dell'insieme.

Es. prendo una successione che converge a 0 , $0 \notin X$

Teorema. Sia (X, d) spazio Metrico
 $K \subseteq X$. K è compatto se e solo se
 K è compatto per successioni.



Sia C chiuso, $C \subseteq K$.

Allora C è compatto.

ogni insieme chiuso contenuto in un compatto,
è a sua volta compatto

OSS (X, d) Sp. Metrico

K compatto $\Rightarrow K$ è chiuso.

Def Punto di accumulazione
in (X, d) sp. metrico.

Sia $D \subseteq X$. Un $\bar{x} \in X$ si dice
punto di accumulazione per D

Se $\forall r > 0$

$\rightarrow$ $\checkmark$ $B(\bar{x}, r) \cap D \neq \emptyset$ non contenga
il centro, quanto piccole prende la palla,
cade almeno un punto. in realtà ne cadono
infiniti. $\subseteq \text{Acc}(D)$ insieme dei punti di acc.

Teo. Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$.

(caso $X = \mathbb{R}$) Sia $D \subseteq \mathbb{R}$, D limitata
ed infinita.

Allora $\text{Acc}(D) \neq \emptyset$.

Teo. B-W (enunciato equivalente)

Sia (x_n) successione in $\mathbb{R}$ limitata
e a supporto infinito. $\text{Supporto} = \text{insieme di immagini}$ e supporto
infinito

Allora $\exists$ sottosuccessione

(x_{σ_m}) convergente a $\bar{x}$ ed **INFINITA**

Da ogni succ. limitata e infinita posso
sempre estrarre una sottosucc. convergente
equivalente perché se ho una sottosucc.
riesco sempre a trovare una succ.
convergente a quel punto di accumulazione
* quindi $\bar{x}$ è punto di accumulazione del
supporto

Def. Sia (X, d) spazio Metrico

$D \subseteq X$ si dice **LIMITATO**

se $\forall \bar{x} \in X, \exists r > 0$ t.c.

$$D \subseteq B(\bar{x}, r)$$

oss. se (X, N) è normato,

D è limitato $\Leftrightarrow \exists k > 0$ t.c.

$$\sup_{x \in D} N(x) \leq k$$

perché il sup
perché non so
se esiste il MAX

al vertice di
x

il minimo dei
maggioranti di quell'insieme

Dim. Seconda versione B-W
(caso $\mathbb{R}^n$)

Sia (x_k) infinita e limitata.

$$x_k = \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^n \end{pmatrix} \quad \text{Poiché } \forall 1 \leq i \leq n,$$

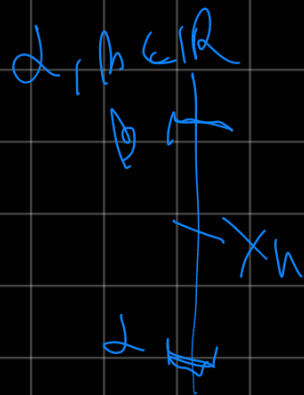
Componente
②
indice
di x_k

$$|x_k^i| \leq \sqrt{(x_k^1)^2 + \dots + (x_k^n)^2}$$

il valore esatto di una componente è $\leq$ della norma del vettore

allora (x_k^i) è limitata.

successione in $\mathbb{R}$



$$\alpha \leq x_n \leq \beta$$

(x_n) non

assume valori fuori intervallo

Poiché (x_k) è infinita, allora esiste almeno un indice i per cui (x_k^i) è infinita.

OS. Se (y_k) è una successione numerica limitata, essa ammette sempre una sottosuccessione convergente

Se il sopralto è finito, è banale, se è infinito, teorema B-W unidimensionale.

Per ogni delle componenti posso applicare questo risultato

Per $i=1$ estraggo una sottosuccessione $(x_{\sigma_1(k)}^1)$

Converge.

$\downarrow$
 x^1 infinite

Considero ora

$$\begin{pmatrix} x_{\sigma_1(k)}^1 \\ x_{\sigma_1(k)}^2 \\ \vdots \\ x_{\sigma_1(k)}^n \end{pmatrix}$$

Ho ottenuto una successione vettoriale la cui prima componente converge a x^1

Poiché (x_k) è infinita, allora ^{↓ esiste:} esiste almeno un indice i per cui

(x_k^i) è infinita. A meno di permutare gli indici, posso supporre $i=1$

(Fero questo procedimento altre $n-1$ volte stando a scegliere sottosuccessioni in modo da mantenere $\bar{x}^i$ come punto di accumulazione per

$$x^1 \sigma_2 \circ \sigma_{1(k)}, x^1 \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_{1(k)}, x^1 \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_{1(k)}$$

e di modo che $(x^i \sigma_i \circ \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1(k))$ converge

ad un certo $\bar{x}^i$. In più ho anche ottenuto che $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix}$ è punto di accumulazione per il supporto di (x_k)

1° componente, prima succ. da usare come B-V
indizim. estraggo la succ in modo che
che converga...

... itero n volte, in modo che la

1° componente converga e le altre convergono.
ottenso che IL LIMITE È UN PUNTO DI ACC.

