

Teorema di Weierstrass

Sia (X, d) spazio metrico.

$\emptyset \neq K \subseteq X$ compatto. in metrico, anche per successioni Sia

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

$\exists x_m, x_M \in K$ punti di minimo e di massimo assoluto rispettivamente

Def.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ insieme qualsiasi. Un $\bar{x}$ si dice punto di minimo assoluto se $\forall x \in A, f(\bar{x}) \leq f(x)$

Dimostrazione Teo di Weierstrass

1° passo, dim che $\text{Im}(f)$ è limitato

Il $\text{Im}(f)$ è un insieme limitato. Dimostriamo

che è superiormente limitato, cioè che

$\exists \tilde{x} \in X, \exists M > 0$ t.c.

$$d(x, \bar{x}) \leq M, \forall x \in A.$$

Supponiamo $\text{Im}(f)$ non sia.

allora $\exists (y_n)$ a supporto

in $\text{Im}(f)$ t.c. $y_n \rightarrow +\infty$

Scelgo $x_n \in K$ t.c. $x_n \in f^{-1}(y_n)$

Per compattezza posso estrarre

da (x_n) una sottosuccessione

$(x_{\sigma(m)}) \rightarrow \bar{x} \in K.$

Per continuit  di f

$$(f(x_{\sigma(m)})) \rightarrow f(\bar{x})$$

Ma $f(x_{\sigma(m)}) = y_{\sigma(m)}.$ Ora

$(y_{\sigma(m)})$   ~~s~~ sottosuccessione di (y_n) e quindi

$$(y_{\sigma(m)}) \rightarrow +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

Caso inferiore finito = ANALogo

QSS.

$$\left. \begin{array}{l} \sup \{m(p)\} < +\infty \\ \inf \{m(p)\} > -\infty \end{array} \right\} m(p) \text{ è superiormente} \\ \text{e inferiormente limitato.}$$

② Dimostrare che esiste un x_m punto di massimo assoluto.

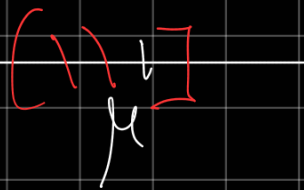
Prop. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A

superiormente limitato. Allora

$$\sup A = \min \{ M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M \} \quad \text{minimo tra i maggioranti.} \quad \blacksquare$$

Prop. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e superiormente limitato. $\mu = \sup A$ se e solo se $\forall \delta > 0$, $[\mu - \delta, \mu] \cap A \neq \emptyset$, $\mu \geq x, \forall x \in A$
sopra di ogni elemento di A \(\blacksquare\)

OSS.



Se $\mu \in A$ allora è il suo massimo,

Se $\mu \notin A$, allora $[\mu - \delta, \mu) \cap A$ è un insieme infinito. \(\blacksquare\)

continuo con la Dim...

Ora se $\sup(\text{Im}(f)) \in \text{Im } f$, allora

$\sup(\text{Im}(f)) = \max^{M''}(\text{Im}(f))$, e quindi
 $\exists x \in K$ t.c. $f(x_M) = \max(\text{Im}(f))$.

Per cui x_M è punto di max assoluto

Dimostriamo allora che $\sup(\text{Im}(f)) \in \text{Im}(f)$, cioè che è punto si minimo dell' $\text{Im}(f)$

Se per assurdo così non fosse, potrei
costruire una successione $y_n \nearrow \sup(\text{Im}(f))$
a supporto in $\text{Im}(f)$ converge crescendo

$S_n = \frac{1}{n}$

M

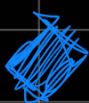
$\frac{1}{n}$

Ad esempio, $\forall n$ scelgo
 $y_n \in \text{Im}(f) \cap (M - \frac{1}{n}, M)$

Sia $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $x_n \in K$.

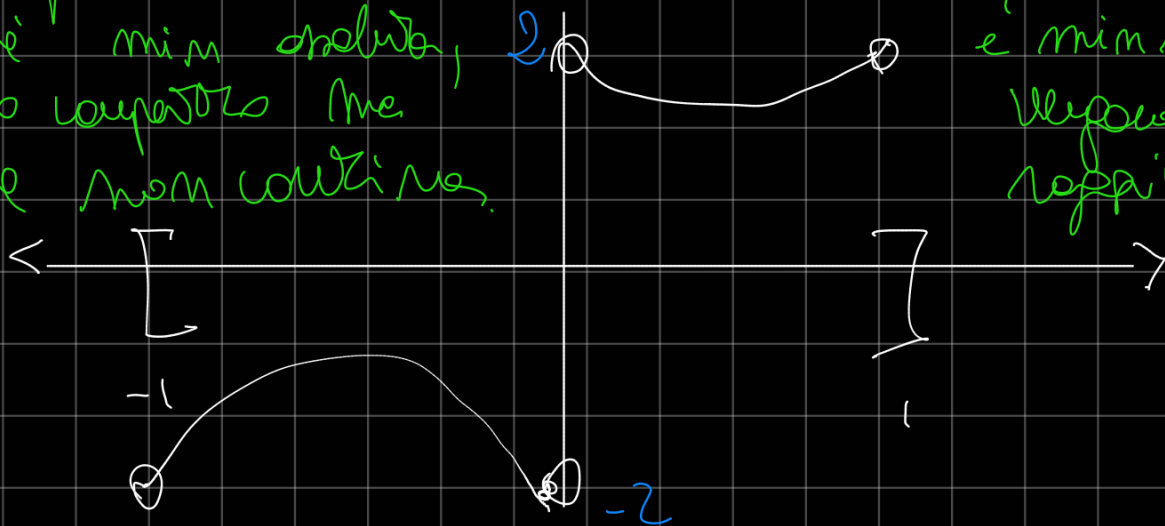
Per compattezza di K esiste una sottosuccessione $(x_{\sigma(m)}) \rightarrow x_H$,
 $x_H \in K$.

Allora per continuità di f ,
 $(f(x_{\sigma(m)})) \rightarrow f(x_H)$ e
 $(y_{\sigma(m)}) \rightarrow \mu$, in quanto sottosuccess.
di (y_n) .

Quindi $f(x_H) = \mu$ 

questa f non ha né
max né min assoluta, 2.
dominio compatto ma
funzione non continua.

i punti di max
e min non
vengono mai
raggiunti.

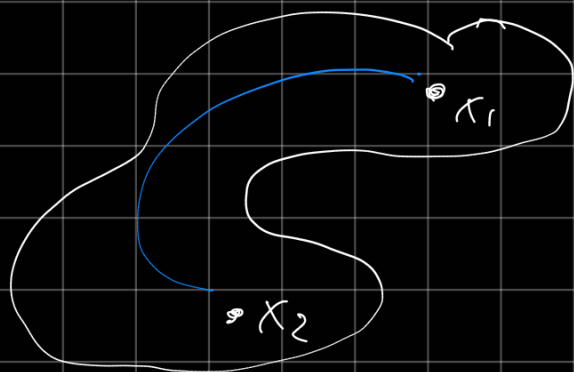


Def.

Sia (X, d) spazio metrico.

$C \subseteq X$ si dice **CONNESSO PER ARCHI**

se, $\forall x_1, x_2 \in C$ $\exists \gamma: [a, b] \rightarrow C$
continua, t.c. $\gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2$



Teorema degli Zerri:

Sia (X, d) sp. metrico, $C \neq \emptyset$,

C connesso per archi.

Sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

$\exists x_1 \in C$ t.c. $f(x_1) < 0$,

$\exists x_2 \in C$ t.c. $f(x_2) > 0$

Allora $\exists \bar{x} \in C$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$

Dim. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua
t.c. $\gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2$

Sia $\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(t) = f \circ \gamma$
 $\tilde{f}(t) = f(\gamma(t))$ $\tilde{f}$ continua perché composta
di due f continue

$\tilde{f}$ è continua, $\tilde{f}(a) < 0, \tilde{f}(b) > 0$,

Per il teorema degli zeri unidimensionali
1-dimensionale, esiste un $\bar{t} \in (a, b)$ t.c.

$\tilde{f}(\bar{t}) = 0$. Quindi posto $\bar{x} = \gamma(\bar{t})$,

$f(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{t}) = 0$ 

Def

Sia V spazio vettoriale, $C \subseteq V$

Si dice convesso se $\forall x_1, x_2 \in C$,

$\forall \mu \in [0, 1], (\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \in C$ 

