

Def.

Sia $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$.

due curve continue $\gamma, \psi: [a, b] \rightarrow B$,

si dicono **OMOTOPICHE** se esiste

una $H: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow B$

continua t.c. $H(0, \cdot) = \gamma(\cdot)$

Se esiste una $H(1, \cdot) = \psi(\cdot)$

omotopia t.c. nel punto di partenza vale la prima curva, nel punto di arrivo, vale la seconda

Def. Un $B \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

SEMPLICEMENTE CONNESSO se qualsiasi

curva continua di supporto in B

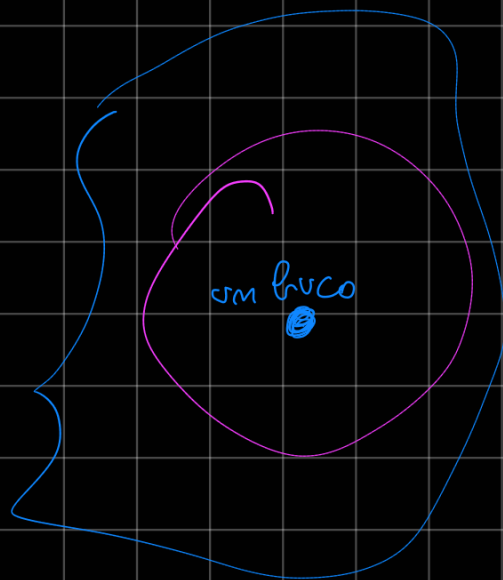
è OMOTOPA a $C_x: [a, b] \rightarrow B$,

$C_x(t) = x$, per qualche $x \in B$



essendo ad ogni
cammino, un punto
non hanno buchi all'interno

li useremo verso la
fine del corso.

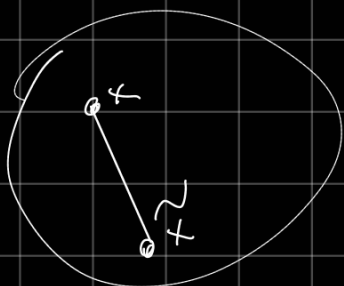


NON riesco a contrarla
in quel punto, NON
È SEMPLICEMENTE CONNESSO

Def.

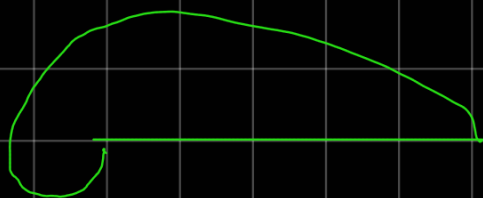
Sia $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$. Essendo si
dice **STELLATO** se $\exists \tilde{x} \in B$ per cui
 $\forall x \in B$, il segmento di estremi $\tilde{x}$ e x
è tutto contenuto in B .

vedi insiemi
convessi



$$\{(p, v) : p \leq (2\pi - v)\}$$

un insieme che
ha questa forma
è stellato, ma non
convesso.



se è stellato, è simplic.
convesso.

Prop.

B stellato $\Rightarrow B$ simplic. convesso

simplic. convesso e convesso per archi sono due concetti
diversi, non c'entra nulla

Def.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.

Sia $x \in \Omega$ e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Diciamo che F è DIFFERENZIABILE

in x se esiste una APPLICAZ. LINEARE

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ t.c. $\forall h \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$(x+h) \in \Omega$

se L esiste, è unica

$$* F(x+h) = F(x) + L(h) + R(x, h)$$

con
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x, h)\|_k}{\|h\|_n} = 0$$

$\left. \begin{array}{l} \text{norma in } \mathbb{R}^k \\ \text{norma in } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$

Prop.

Se F è differenziabile in X ,
allora L è univocamente determinata,
e si dice **DIFFERENZIALE** di
 F in X .

Dim.

Supponiamo L_1 e L_2 verifichiamo
la $*$, allora avremo

$$F(x+h) - F(x) - R_1(x, h) = L_1(h)$$

e contemporaneamente

$$F(x+h) - F(x) - R_2(x, h) = L_2(h)$$

$$\leq \left\| \frac{R_2(x, \epsilon)}{\epsilon} \right\| + \left\| \frac{R_1(x, \epsilon)}{\epsilon} \right\|$$

$\rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

Quindi, $\forall \hat{v}$ vettore, ϵ

$$L(\hat{v}) = \vec{0}$$

norma = 0 $\Leftrightarrow$ norma di $\vec{0}$

$$\text{Quindi } L \equiv \vec{0}$$

Applicaz. lineare che
per ogni vettore si annulla,
è LA FUNZIONE NULLA.

(quindi $L_1 = L_2$)

notazione

$$(dF)(x) \quad dF(x) \quad dF_x$$

Prop.

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenziabile
in $x \Rightarrow F$ continua in x $\square$

Dim

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} F(x+h) = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \left[F(x) + oF_x(h) + R(x,h) \right]$$

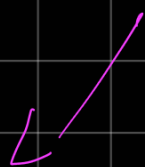
$$= F(x) + \lim_{h \rightarrow \vec{0}} oF_x(h) + \lim_{h \rightarrow \vec{0}} R(x,h) =$$

$$= F(x) + \vec{0} + \lim_{h \rightarrow \vec{0}} R(x,h)$$

passo alla norma

$$0 \leq \frac{\|R(x,h)\|_K}{\|h\|_n}$$

$$\cdot \|h\|_n$$



0



Def.

Siano $f, g: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$.

1) si dice che f è un

0 GRANDE Lip in x se esiste $M > 0$
t.c.

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq M$$

In tal caso si scrive $f = O(g)$

2) Si dice che f è un o piccolo di g in X se

$$\lim_{x \rightarrow X} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

In tal caso si scrive $f = o(g)$ $\square$

$$\|R(x, h)\|_K = o(\|h\|_n)$$

o piccolo

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineare.

$$L(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha L(\vec{v}) + \beta L(\vec{w})$$

sia $\{\vec{e}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$,

$\{e_i\}_{1 \leq i \leq k}$ base di $\mathbb{R}^k$.

Allora esiste ed è unica
una matrice M , di k righe e
 n colonne (dunque in $M(k \times n)$),
che me la rappresenta, i.e.:

$$L(\vec{v}) = M \cdot \vec{v} \quad \blacksquare$$

OSS.

Una volta per tutte fissato lo
spazio immagine e partenza, se
 F è differenziabile in $x \in \Omega$,
allora $\exists!$ $DF_x \in M(k \times n)$

che mi rappresenta il differenziale.

Tale matrice si chiama

JACOBIANA, JF_x

