

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$F(x + \vec{h}) = F(x) + M_L \vec{h} + R(x, \vec{h})$$

$$\|R(x, \vec{h})\|_k = o(\|\vec{h}\|_n), \text{ se } \vec{h} \rightarrow \vec{0}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}, \quad f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{h} = h \cdot \hat{e}_j, \quad \hat{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j, \quad h \in \mathbb{R}, \text{ sufficientemente piccolo}$$

$$\forall 1 \leq i \leq k \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$f_i(x_1, \dots, x_j + h \hat{e}_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{M_L \cdot [h \hat{e}_j]}_h + o(h)$$

↑ sviluppare la componenteesima.

$$= h \cdot (M_L)_{ij} + o(h) \quad \rightarrow h \rightarrow 0$$

sto valore è l'elemento della riga i -esima e colonna j -esima

Prop.

Se F è differenziabile in x , allora la sua matrice jacobiana DF_x è t.c.

$$(DF_x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Equivalentemente

$$DF_x = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_k(x) \end{pmatrix}$$

matrice $k \times n$
avente come righe i
gradienti:
la riga, primo gradiente
ecc... 

$$DF_x = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Scalare per colonne...

Prop

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora se $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile, allora è anche

derivabile in x lungo una qualsiasi
direzione $\hat{v}$ e la derivata direzionale

$$\frac{df}{d\hat{v}}(x) = \langle \nabla f(x)^T, \hat{v} \rangle = \nabla f(x) \cdot \hat{v}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. notazione Random

$$C^0(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$$

$$C^1(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua, esiste } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ e sono continue} \right\}$$

Teorema del differenziale Totale

Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ di Classe C^1 .

Allora F è differenziabile

per ottenere che esistono F differenziabili, non hanno
derivate parziali continue.

Lo dimostreremo con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 0$, e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 1$

Dimostrazione (Caso $n=2, k=1$)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f continua

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continua

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

devo far vedere che

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - \nabla f(x, y) \cdot \vec{h} \rightarrow 0$$

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

per $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow 0$

aggiungo e sottraggo $f(x, y+h_2)$

$$\begin{aligned} f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) &= \underbrace{f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y)}_{\text{green}} + \underbrace{f(x+h_1, y) - f(x, y)}_{\text{purple}} \\ &= \underbrace{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}_{\text{purple}} + \underbrace{f(x, y+h_2) - f(x, y)}_{\text{green}} \end{aligned}$$

Il h è sufficientemente piccolo in modo che il vettore $\vec{h}$ sempre in Ω

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(x+th_1, y+h_2)$

$x+th_1, y+h_2$ sono sempre in Ω , funzione composta di due f continue, e assolutamente derivabile

* Teorema

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. G differenziabile in
 x , F differenziabile in $y = G(x)$.

Allora $F \circ G$ è differenziabile
in x e $d(F \circ G)_x = (dF)_y \circ (dG)_x$;
matrice Jacobiana

$$D(F \circ G)_x = (DF)_y \cdot (DG)_x$$
$$DF \in M(m, k), \quad DG \in M(k, n)$$

Generalizzazione: funzioni composte unidimensionali

OSS.

$h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 g derivabile in x , h derivabile in $g(x)$.
Allora $h \circ g$ è derivabile in x e
 $(h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ *

$$\hookrightarrow \ell: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \ell(t) = \begin{pmatrix} x_1 + th \\ y + h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= D\gamma_t = D(h \circ \ell)_t = (Dh)_{\ell(t)} \cdot (D\ell)_t = \\ &= \nabla h(x_1 + th, y + h_2) = \\ &= \frac{\partial h}{\partial x}(x + th, y + h_2) \cdot h_1 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\quad}_{\downarrow} = \underbrace{h(x + h_1, y + h_2) - h(x, y + h_2)}_{\downarrow} = \gamma(1) - \gamma(0)$$

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile (a, b) . Allora $\exists \bar{x} \in (a, b)$ t.c.
 $f(b) - f(a) = f'(\bar{x}) \cdot (b - a)$. □ *

Per il Teo. di Lagrange, $\exists \bar{t} \in (h_1, h_2)$

$$0 < \bar{t} < 1, \text{ t.c. } \gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(\bar{t}) \cdot 1 =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} (x + \bar{t} h_1, y + h_2) \cdot h_1 -$$

$$- \frac{\partial h}{\partial x} (x + \bar{t} h_1, y + h_2) \cdot h_1$$

ora è la y che varia. Lagrange all'incirca

$$\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(t) = h(x, y + t h_2)$$

Per il Teo di Lagrange $\exists \bar{t} \in (h_1, h_2)$

$$0 < \bar{t} < 1, \text{ t.c.}$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\bar{t}) \cdot 1$$

$$\rightarrow \underbrace{\hspace{10em}} = \underbrace{h(x, y + h_2) - h(x, y)}_{\psi(1) - \psi(0)}$$

$$\psi'(t) = \frac{\partial h}{\partial y} (x, y + t h_2) \cdot h_2$$

$$\rightarrow = \frac{\partial h}{\partial y} (x, y + \bar{t} h_2) \cdot h_2$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} (x + \bar{\epsilon} h_1, y + h_2) \cdot h_2 + \frac{\partial h}{\partial y} (x, y + \bar{\epsilon} h_2) \cdot h_1 - \frac{\partial h}{\partial x} (x, y) \cdot h_1 - \frac{\partial h}{\partial y} (x, y) \cdot h_2 \right] =$$

$$h(x + h_1, y + h_2) - h(x, y + h_2) + h(x, y + h_2) - h(x, y) - \frac{\partial h}{\partial x} (x, y) \cdot h_1 - \frac{\partial h}{\partial y} (x, y) \cdot h_2$$

$$= \left(h_1 \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x + \bar{\epsilon} h_1, y + h_2) - \frac{\partial h}{\partial x} (x, y) \right] + h_2 \left[\frac{\partial h}{\partial y} (x, y + \bar{\epsilon} h_2) - \frac{\partial h}{\partial y} (x, y) \right] \right) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

divido tutto per $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, e devo trovare tutto a 0 per $h \rightarrow 0$

sufficientemente continuo

per $h \rightarrow 0$

$$|x - x + \bar{\epsilon} h_1| = |\bar{\epsilon} h_1| \leq |h_1| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$$

Quindi $x + \bar{\epsilon} h_1 \rightarrow x$ se $h \rightarrow 0$

teo. del confronto.

Analogamente, $y + \bar{\epsilon} h_2 \rightarrow y$ se $h \rightarrow 0$

QSS.

$$\left| \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq 1 \quad \text{perché}$$



$$\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2}} = 1$$

$0 \leq$

Ma magnificato, il
coglione
direz. tripartito

$$\left| \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x + \bar{\epsilon} h_1, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \right| + \left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \bar{\epsilon} h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \right|$$

$\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$



$$p(t) = \begin{cases} t^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0 \\ t = 0 \text{ in } 0 \end{cases}$$

derivabile in
una dimensione.

$$\text{Se } t \neq 0 \Rightarrow p'(t) = +2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

hanno rapporto incrementale, va'...

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(h) - p(0)}{h} \right| &= \left| h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right| = \left| h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right| \\ &\leq |h| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right| \leq |h| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$v'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t=0 \\ 2t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\vec{x}) = v(\|\vec{x}\|)$$

Dimostrare che è differenziabile nell'origine

$$\frac{v(\|h, 0\|) - v(\|0\|)}{h} =$$

$$= \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow 0$$

OSS.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{h(\vec{h}) - h(\vec{0}) - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 - \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \cdot h_2}{\|\vec{h}\|}$$

||

$$\frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

che zero

la mia funzione è
DIFFERENZIABILE

però se calcoliamo le deriv.
parziali...

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \varphi'(\|x\|) =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left[2\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right]$$

Discontinua perché lim tende a zero diversi

Per esempio Differenziabile, nell'
origine ha derivate parziali discontinue

~~~~~

$\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti:

$F: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  di classe  $C^1$ , invertibile,  
con  $F^{-1}$  di classe  $C^1$ . Eutraziale

differentiabili ovunque.

Differentiabile funzione inversa?

$$F'(x) \xleftrightarrow{y = F(x)} F'(x)$$

OSS. se  $n=1$

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(x)}$$

derivato  
funzioni inverse

lineare applicazione  
inversa

→ Allora  $(dF^{-1})_{F(x)} = (dF)_x^{-1}$   
e  $(D F^{-1})_{F(x)} = (D F)_x^{-1}$  

$$F^{-1} \circ F = \text{id}_\Omega \quad \text{id}_\Omega(x) = x$$

eutraziali  
differentiabili

Derivoli:

$$d(F^{-1} \circ F) = (dF^{-1})_{F(x)} \circ (dF)_x =$$

$$= d(\text{id}_\Omega)_x. \quad *$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Allora  $\begin{pmatrix} 0 & | & F \end{pmatrix}_x$  e  $\begin{pmatrix} 0 & | & F^{-1} \end{pmatrix}_{F(x)}$

sono invertibili e l'una è inversa dell'altra.

Quindi applicando a destra nello

espressione  $(*) \begin{pmatrix} 0 & | & F \end{pmatrix}_x^{-1}$  si ha i membri:

$$\begin{pmatrix} 0 & | & F^{-1} \end{pmatrix}_{F(x)} = \begin{pmatrix} 0 & | & F \end{pmatrix}_x^{-1} \quad \square$$